KERTÉSZETI ÉS ÉLELMISZERIPARI EGYETEM

Tájépítészeti, -védelmi és -fejlesztési Kar

Bárdné Feind Teréz

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

Kézirat

Budapest, 1997.

Lektorálták:
Dr. Babós Lajos tanszékvezető egyetemi docens
Edőcs Ottó egyetemi adjunktus

Az ábrákat rajzolta:
Fekete Csaba építészhallgató

Kiadta a BPR Bt.

Budapest, 1997.

Bevezetés

A műszaki ábrázolás kezdeteiről már az ókori épületek néhány fennmaradt tervtöredékéből, vagy Vitruvius római építész 2000 évvel ezelőtt írt (1988-ban magyarul is megjelent) könyvéből is tájékozódhatunk. A perspektíva geometriai elméletét Brunelleschi olasz építész kezdte vizsgálni és Alberti öntötte végleges formába a XV. században. A projektív geometria Desargues francia építész munkáiban jelenik meg. Az ábrázolás fejlődésében minőségi ugrást jelent Gaspard Monge fölfedezése, a két képsíkos ábrázolás (bár Monge nevét a tudományos világban analitikus és differenciálgeometriai kutatásai tették ismertté). Az ő egyetemi munkássága idején (XVIII. század vége) fejlődik ki az alkalmazott matematikának az az ága, amelyet ma ábrázoló geometria néven ismerünk.

Az építés iparosítása és a technika fejlődése következtében pl. egy ház építése több -- akár különböző szakterületekhez értő – ember együttműködését igényli. Ehhez a terv olyan egyértelmű, szabatos leírása szükséges, mely a szakemberek számára érthető. A tervek geometriai megjelenítésének és a rajzok olvasásának elsajátításában alapvető szerepet játszik az ábrázoló geometria. (Az anyag- és szerkezeti jelöléseket, tervezési elveket és előírásokat a szaktárgyak oktatják.)

Kis túlzással még úgy is mondhatnánk, hogy a műszaki ábrázolás a mérnökök nemzetközi nyelve. E nyelv elsajátításához nélkülözhetetlen az ábrázoló geometria ismerete. A középiskolában megtanult elemi geometriára támaszkodva olyan geometriai törvényszerűségeket és szerkesztési módszereket ismertetünk, amelyek egyúttal elősegítik a térszemlélet fejlesztését is. (Az agykutatók mai tudása szerint az emberi látás a másodlagos, harmadlagos látókéreg fejlettségén, a benne tárolt /tanult/ információkkal való összehasonlításon alapul. A térlátás kialakulása elhúzódó folyamat. Az első kritikus periódus 4-5 éves korig, de komplex látási percepcióval kapcsolatban 14-16 éves korig tart. Mindenki egyénileg tanul meg látni. Az emberek képi gondolkodása a vizuális nevelésből és tanulásból adódó különbözőségek miatt egymástól igen eltérő szintű.)

A *térszemlélet* jó térlátáson alapuló sajátos absztrakciós képesség, amivel a csak gondolatban levő „objektumokat" úgy tudjuk elképzelni, ahogy megvalósulásuk után térben és időben működnek. A jó térszemlélet nemcsak velünk született képesség, hanem jól megalapozható és fejleszthető kreatív tulajdonság. (20-25 éves korig a kreatív tulajdonságok általában fejleszthetők; később csak különleges motiváció esetén.) Mivel az ember az őt érő külső hatásokat 75%-ban vizuális információ formájában fogja fel, a „látás" fejlesztése igen fontos.

A *térszemlélet fejlesztésé*hez nem elegendő egy-egy szerkesztés megértése, esetleg megtanulása vagy ismételgetése. Állandó aktív közreműködést, modellezést, rajzolást igényel, esetenként a már megértett ábrák más feltételek melletti újraszerkesztését és térbeli elképzelését is. A térbeli feladatok sík papíron való ábrázolása, majd a megoldások térbeli visszaállítása néhány hónapi gyakorlás után olyan készséggé válik, amely már az összetettebb ábrák modell nélküli elképzelését eredményezheti. Erre a szintre mindenki egyénileg, különböző munkabefektetés árán jut el. Egy jegyzet, egy jó könyv sokat segíthet, de nem pótolja az előadások és gyakorlatok célratörő térszemlélet-fejlesztését. A tananyag megértését, agyi rögzítését a jegyzetelés leginkább azzal segíti elő, hogy a térbeli megoldást annak rajzi, technikai kivitelezésével együtt jeleníti meg.

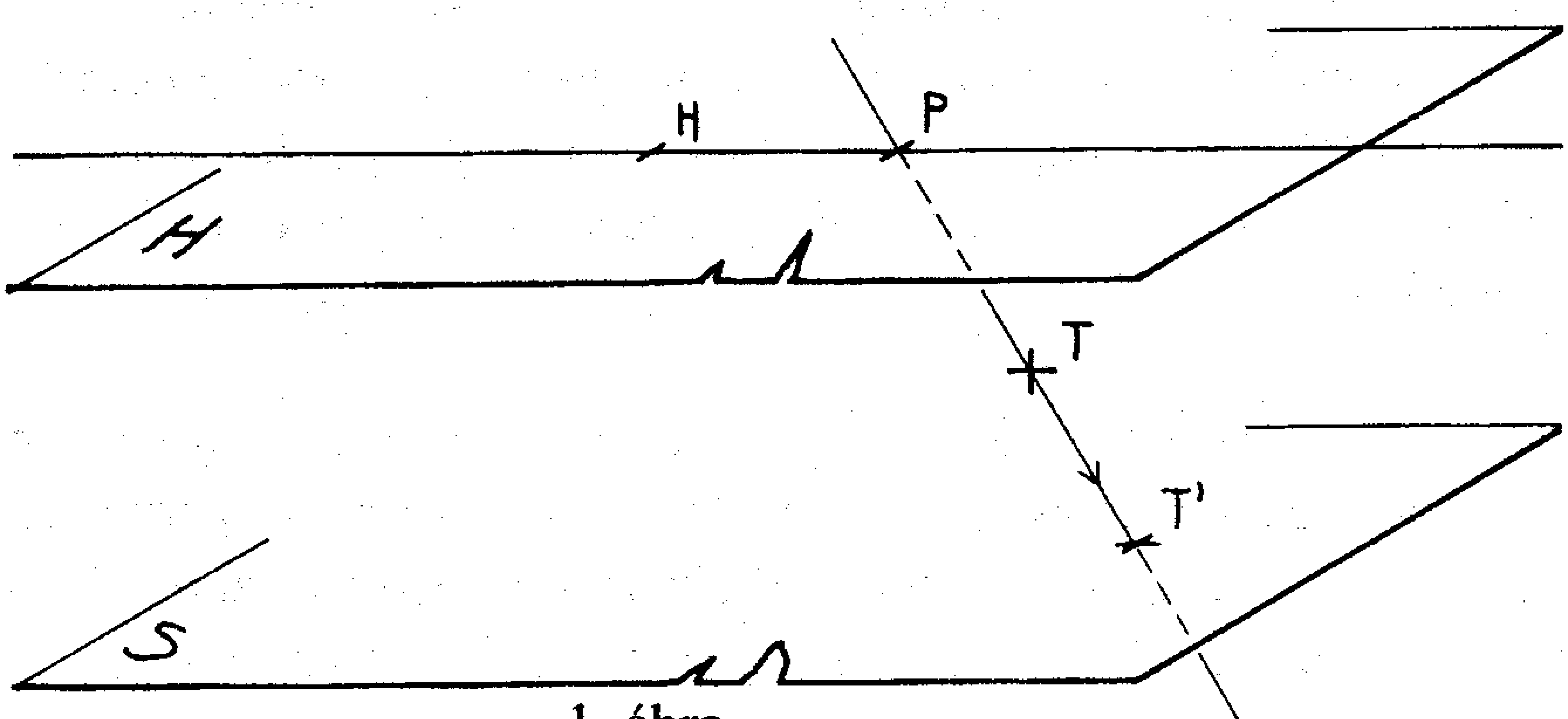
Az ábrázoló geometria tanulása a műszaki nyelv tanulásának kezdete. Sajátos kifejezéseit, elnevezéseit és szerkesztési eljárásait pontosan meg kell tanulni. Ezeket alkalmazni és begyakorolni sík- és térgeometriai feladatokon lehet. A jegyzet feltételez elemi geometriai ismereteket, s ezekre támaszkodva újabb és mélyebb geometriai összefüggéseket mutat meg.

Középiskolában az euklideszi geometriát tanítják, hiszen ez kiválóan alkalmas környezetünk tárgyainak, formáinak és távolságainak jellemzésére. Ha a geometria axiómarendszerében az euklideszi párhuzamossági axiómát (egy ponton át a síkban egy egyenessel csak egy párhuzamos egyenes húzható) egy másik, vele egyenértékűvel cseréljük ki (a ponton át több mint egy, vagy egyetlen párhuzamos egyenes sem húzható), továbbra is ellentmondásmentes geometriákat kapunk. A XIX. század matematikusai a matematika és ezen belül a geometria rendszerezése és axiomatikus felépítésének vizsgálata során sokféle geometriát definiáltak és modelleztek (gömbi geometria, elliptikus geometriák, hiperbolikus geometria, projektív geometria). Ezek között vannak a fizikai tér leírására jól alkalmazható rendszerek is, de az emberi érzékelés tartományában az euklideszi geometria szabályai továbbra is helytállóak.

Az euklideszi tér geometriai jellemzésének alapelemei: a pont, az egyenes és a sík. E három térelem alapfogalom. Ugyanígy alapfogalomnak tekintjük (nem definiáljuk) az összekötést és metszést sem.

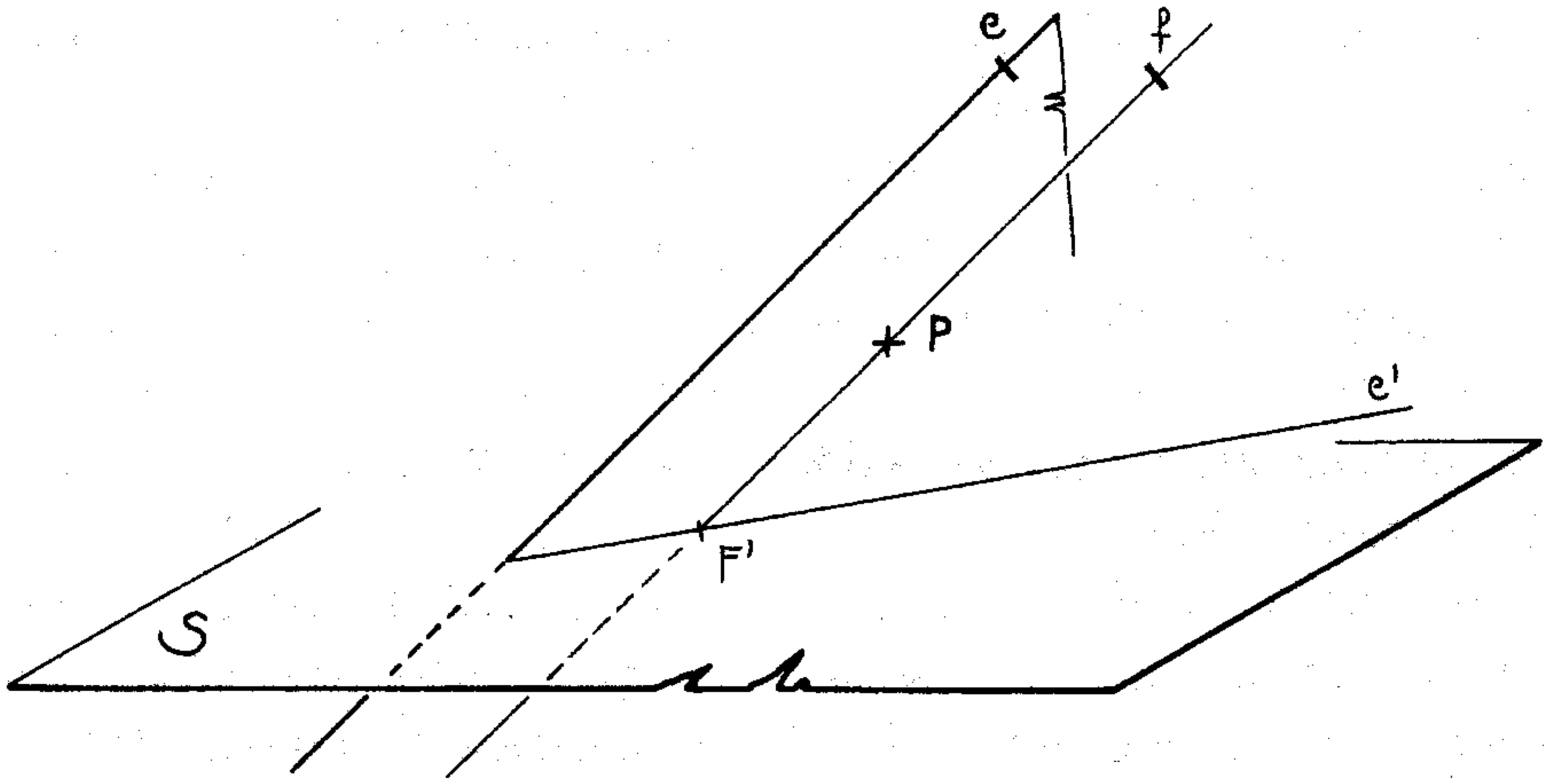
Az euklideszi tér kibővítése

Az ábrázoló geometria alapvető feladata a térbeli alakzatok leképezése, megjelenítése a síkon (a rajzlapon vagy táblán) illetve a síkbeli ábra visszaállítása, térbeli megfelelőjének megmutatása, a rekonstrukció.
A feladat első része viszonylag egyszerű: vetítsük a tér minden pontját egy külső P pontból a választott S síkra. A tetszőleges T és az adott P pont összekötő egyenese metszi az S síkot T'-ben, ez a T pont képe. Ha a H pont ugyanolyan messze van a síktól, mint P, a HP egyenese nem metszi a síkot, vagyis a H-nak nincs képe a síkon. (A P-re illeszkedő, az S síkkal párhuzamos sík egyetlen pontjának a képe sem szerkeszthető ilyen módon.) (1. ábra)



1. ábra

Egyenes képét az egyenes és a P pont összekötő síkja metszi ki az S síkból. Az **[e,P]** síkra illeszkedő f egyenes, amelyet a P-n keresztül, **e**-vel párhuzamosan húztunk, metszi F'-ben az egyenes képét, **e'**-t, de nem metszi magát az egyenest, vagyis az egyenes „nemlétező" végtelen távoli pontjának is van képe. Sőt, az [e,P] síkban minden e-vel párhuzamos egyenes végtelen távoli pontjának ugyanaz az F' pont a képe. (2. ábra)



2. ábra

Azért, hogy a leképezés során a párhuzamos elemeket ne kelljen külön kezelnünk, bevezetjük a végtelen távoli elemek fogalmát. Párhuzamos egyenesekhez hozzárendelünk egy-egy irányt, mely az egyenesek végtelen távoli „metszéspontjának" tekintendő. (Minden egyenesnek egy végtelen távoli pontja van.) Párhuzamos síkokhoz hozzárendelhető egy síkállás, egy végtelen távoli egyenes, amely a két sík „metszésvonala". (Minden síknak egy végtelen távoli egyenese van, melyet a vele *párhuzamos síkok állása* jellemez.) A tér végtelen távoli egyenesei az egyetlen végtelen távoli síkra illeszkednek.

A végtelen távoli elemek bevezetésével minden síkra és egyenesre vonatkozó metszési feladat egységesen kezelhető, megszűnt a párhuzamos elemek kitüntetett szerepe. Az 1. ábrán a H sík képe az S sík végtelen távoli egyenese, a 2. ábrán pedig F' az e egyenes végtelen távoli pontjának képe.

A végtelen távoli elemekkel az előbbi módon kibővített euklideszi teret *projektív tér*nek nevezzük. (A projektív tér többféleképpen is definiálható, ez számunkra annak egy praktikusan használható modellje.)

A műszaki ábrázolás előkészítésének során az ábrázoló geometria idő és alapismeretek híján nem vállalkozhat semmiféle axiomatikus felépítésre, ezért néhány, az axiómákból levezethető tételt kiindulásként axiómának fogadunk el. A továbbiakban nem törekszünk az állítások helyességének részletes geometriai bizonyítására, helyette inkább többféle szerkesztési eljárást mutatunk ugyanazon feladatok megoldására, lehetőséget adva a szerkesztés helyességének ellenőrzésére.

Térelemek kölcsönös helyzete

A pont, egyenes és sík kölcsönös helyzetének jellemzésére vezessük be az alábbi egyszerű jelöléseket:

–•–	illeszkedik, rajta van
$\overset{\circ}{-}$	nem illeszkedik, nincs rajta
$\equiv$	azonos
$\times$	metsző, metszi
$\dot{\times}$	kitérő, nem metszi
$\parallel$	párhuzamos
$\perp$	merőleges
—|	távolság
$\sphericalangle$	szög

A térelemek lehetséges kölcsönös helyzetét az alábbi táblázat tünteti fel.

	P	e	S
P	$P_1 \equiv P_2$ $P_1 \overset{\circ}{-} P_2$	$P \multimap e$ $P \overset{\circ}{-} e$	$P \multimap S$ $P \overset{\circ}{-} S$
e	$e \multimap P$ $e \overset{\circ}{-} P$	$e_1 \equiv e_2$ $\quad e_1 \times e_2$ $e_1 \parallel e_2$ $\quad e_1 \times e_2$	$e \multimap S$ $e \times S$ $e \parallel S$
S	$S \multimap P$ $S \overset{\circ}{-} P$	$S \multimap e$ $S \times e$ $S \parallel e$	$S_1 \equiv S_2$ $S_1 \times S_2$ $S_1 \parallel S_2$

A felsorolás bizonyára ismerős az előtanulmányokból. Javasoljuk, hogy a hozzájuk tartozó térbeli viszonyokat gondolják át. Pl. **e** $\multimap$ S azt jelenti, hogy az e egyenes illeszkedik az S síkra, vagyis az egyenes minden pontja benne van az S síkban.

Két térelem távolsága azon térelem-pároknál értelmezhető, amelyek nem illeszkedek, és nem is metszik egymást. Minden távolságfeladat visszavezethető a következő alapesetekre:

1. két pont távolsága
2. pont és egyenes távolsága
3. pont és sík távolsága
4. kitérő egyenesek távolsága

*Térelemek szögé*nek meghatározásánál előforduló alapesetek:

1. két egyenes szöge
2. sík és egyenes szöge
3. két sík szöge

Az alapesetek definíciói és a többi feladat ezekre való visszavezetése középiskolából ismert.

Térbeli dualitás

A térelemek összekötésével és metszésével újabb térelemek állíthatók elő. Ha két vagy több térelem pontot, egyenest vagy síkot határoz meg, akkor az elemek nevét szokás ( ), | | vagy [ ] zárójelben felsorolni. Figyeljük meg az itt felsorolt állítások szerkezetét. (Ezeket szintén axiómáknak tekintjük.)

$|P_1,P_2| = \mathbf{e}$
Két pont meghatároz egy egyenest, amely azok összekötése

$|S_1,S_2| = \mathbf{e}$
Két sík meghatároz egy egyenest, amely azok metszése

$[P_1, P_2, P_3] = S$
Három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre meghatároznak egy síkot, amely azok összekötése

$[S_1, S_2, S_3] = P$
Három sík, melyek nem illeszkednek egy egyenesre meghatároznak egy pontot, amely azok metszése

$[\mathbf{e},P] = S$
Egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont meghatároz egy síkot, amely azok összekötése

$(\mathbf{e},S) = P$
Egy egyenes és egy rá nem illeszkedő sík meghatároz egy pontot, amely azok metszése

$[\mathbf{e},\mathbf{f}] = S$
Két egyenes, amelyek egy pontra illeszkednek, meghatároznak egy síkot, amely azok összekötése

$(\mathbf{e},\mathbf{f}) = P$
Két egyenes, amelyek egy síkra illeszkednek, meghatároznak egy pontot, amely azok metszése

A baloldali axiómákból úgy kaphatjuk meg a jobboldaliakat, hogy a pont-sík, egyenes-egyenes, összekötés-metszés szavakat felcseréljük. Ez a helyettesíthetőség a *dualitás elve*, a projektív geometriának egyik kellemes tulajdonsága.

Ez a dualitás nemcsak az említett térelemek között áll fenn, de igen jelentős a másodrendű felületek pontjai és pontbeli érintősíkjai vagy a szabályos testek illetve a perspektív leképezés esetén is.

Az ábrázolás alapjai

Térbeli alakzatot sokféle módon ábrázolhatunk. Készülhet róla művészi festmény vagy fénykép, akár videofelvétel vagy egyszerű vázlat. Ezek a háromméretű tárgyat a síkon kétméretű vetületben jelenítik meg, és részben az ábrázolás céljától, eszközeitől, részben pedig ügyességünktől függ, hogy mennyi jellemzőjét mutatják meg a tárgynak. De a méretek közvetlenül nem olvashatók le belőlük. A térképről általában mérethűen tudjuk leolvasni az ábrázolt terep adatait, de a kép egyáltalán nem szemléletes. A *képiessség* és a *mérethűség* kettős követelményét egyetlen síkbeli ábrázolási módszer sem képes teljesíteni. Egyiket a másik rovására, a felhasználási igény szerint helyezzük előtérbe.

Az ábrázoló geometria feladata, hogy a térbeli alakzatokat egyértelműen ábrázolja, úgy, hogy azok az ábrákból rekonstruálhatók (térbe visszaállíthatók) legyenek. Ennek elsajátításához meg kell ismernünk a leggyakrabban előforduló síkidomokat és testeket a geometriai tulajdonságaikkal együtt. A térgeometriai feladatok megoldása és ábrázolásuk kiváló eszköz nemcsak a térszemlélet fejlesztéséhez, hanem az egyes ábrázolási módszerek szerkesztési eljárásainak begyakorlásához is.

A térbeli alakzat síkrajza, a tér leképezése a síkra - akár egy pontból történik, akár párhuzamos vetítéssel (végtelen távoli pontban metsződő vetítősugarakkal) - önmagában nem egyértelmű. Egy vetítősugár metszéspontja a síkkal a vetítősugár minden egyes pontjának képét jelenti. Ahhoz, hogy a képből a térbeli alakzatot egyértelműen visszaállíthassuk, további kiegészítések szükségesek. Mi csak a műszaki ábrázolásban leggyakrabban használatos *ábrázolási rendszerekkel* ismerkedünk meg. A különböző ábrázolási módszerek alkalmazása esetén mindig meg kell mondanunk, hogy milyen a vetítés típusa (centrális, párhuzamos, merőleges), milyen síkra vagy síkokra vetítünk, a tárgynak milyen jellemző adatait (esetleg azok vetületeit is) vetítjük, végül a kép(ek)ből hogyan rekonstruálható az eredeti objektum.

Centrális vetítés (vagy perspektíva)

A leképezés egy pontból történik (ez a vetítési középpont vagy centrum). A térbeli alakzatokat egy síkra képezzük le, de a rekonstruálhatóság miatt a tárggyal együtt vetíteni kell annak alaprajzát is.

Párhuzamos vetítés (a vetítés centruma végtelen távoli pont)

1. Axonometria

Egy síkra vetítjük az alakzatot tetszőleges irányból, párhuzamosan, egy térbeli koordinátarendszerben elhelyezve, valamelyik koordinátasíkra merőlegesen vetített képeivel együtt. Rekonstruáljuk a koordinátarendszert, majd benne az alakzatot. A vetítés iránya lehet a képsíkhoz viszonyítva merőleges vagy ferde. A speciális helyzetű koordinátasík vagy vetítési irány választása befolyásolja a szerkesztés és a rekonstrukció bonyolultságát, de a megjelenítés szemléletes.

2. Mérőszámos ábrázolás (vagy kótás projekció)

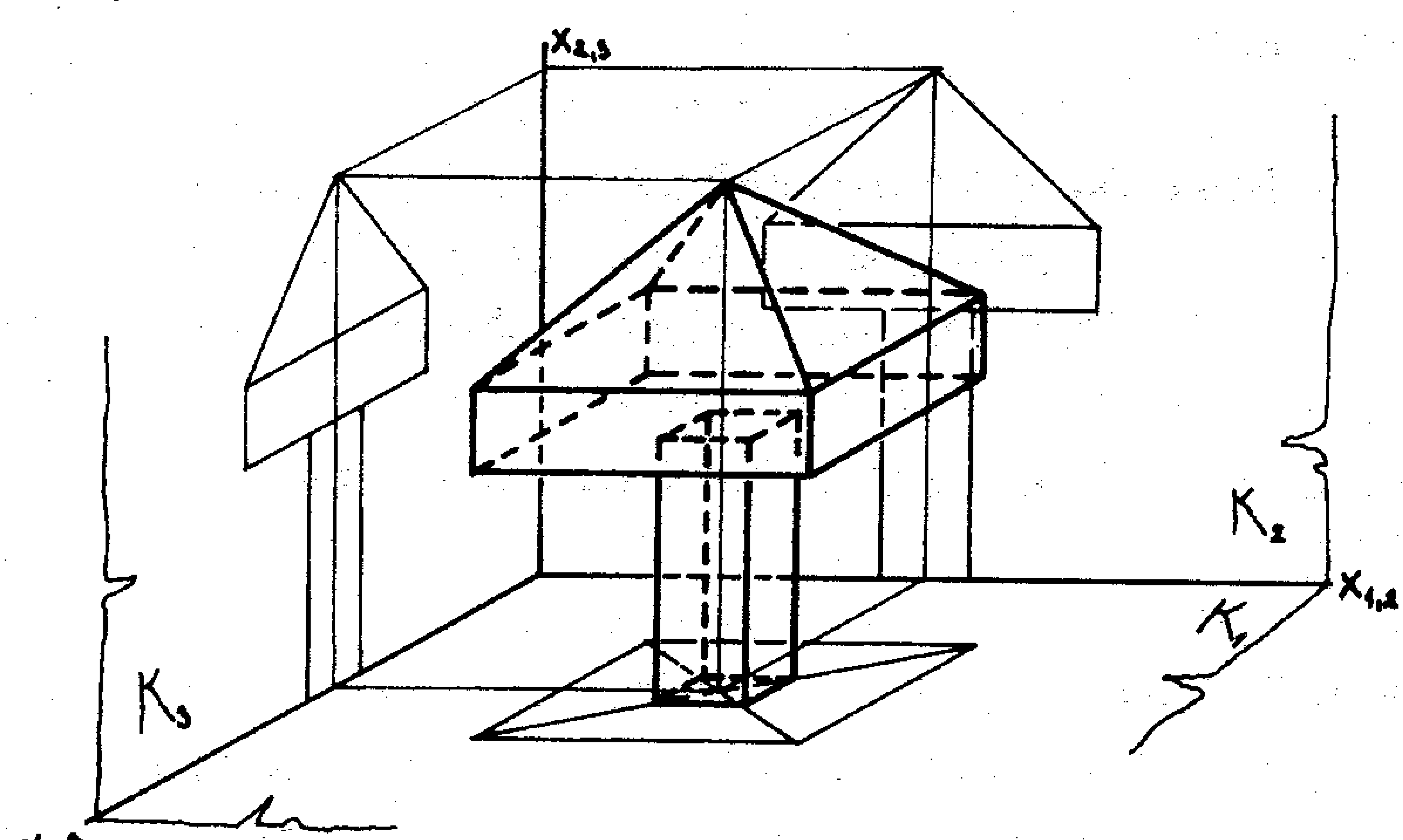
A térbeli alakzatokat merőlegesen vetítjük egy tetszőlegesen választott vízszintes síkra és minden lényeges pont vetülete mellé odaírjuk a pont síktól mért előjeles távolságát. A visszaállítás ennek a távolságnak a megfelelő irányú fölmérésével történik. Ezt a módszert alkalmazzák a térképkészítésnél is.

3. Monge-féle kétképsíkos ábrázolás

Két, egymásra merőleges síkból áll a képsíkrendszer. A térbeli alakzatot mindkét síkra külön-külön merőlegesen vetítjük, majd a képsíkok metszésvonala körül az egyiket a másikba hajtjuk. Rajzunkon az egyesített képsíkokat ábrázoljuk a képekkel együtt. A visszaállítás az előbbi fordítottja: a képsíkrendszer rekonstrukciója, majd a vetületekből az alakzat térbeli helyzetének meghatározása. Az építészetben az alaprajz és a homlokzat rajza kapcsolódhat így egymáshoz

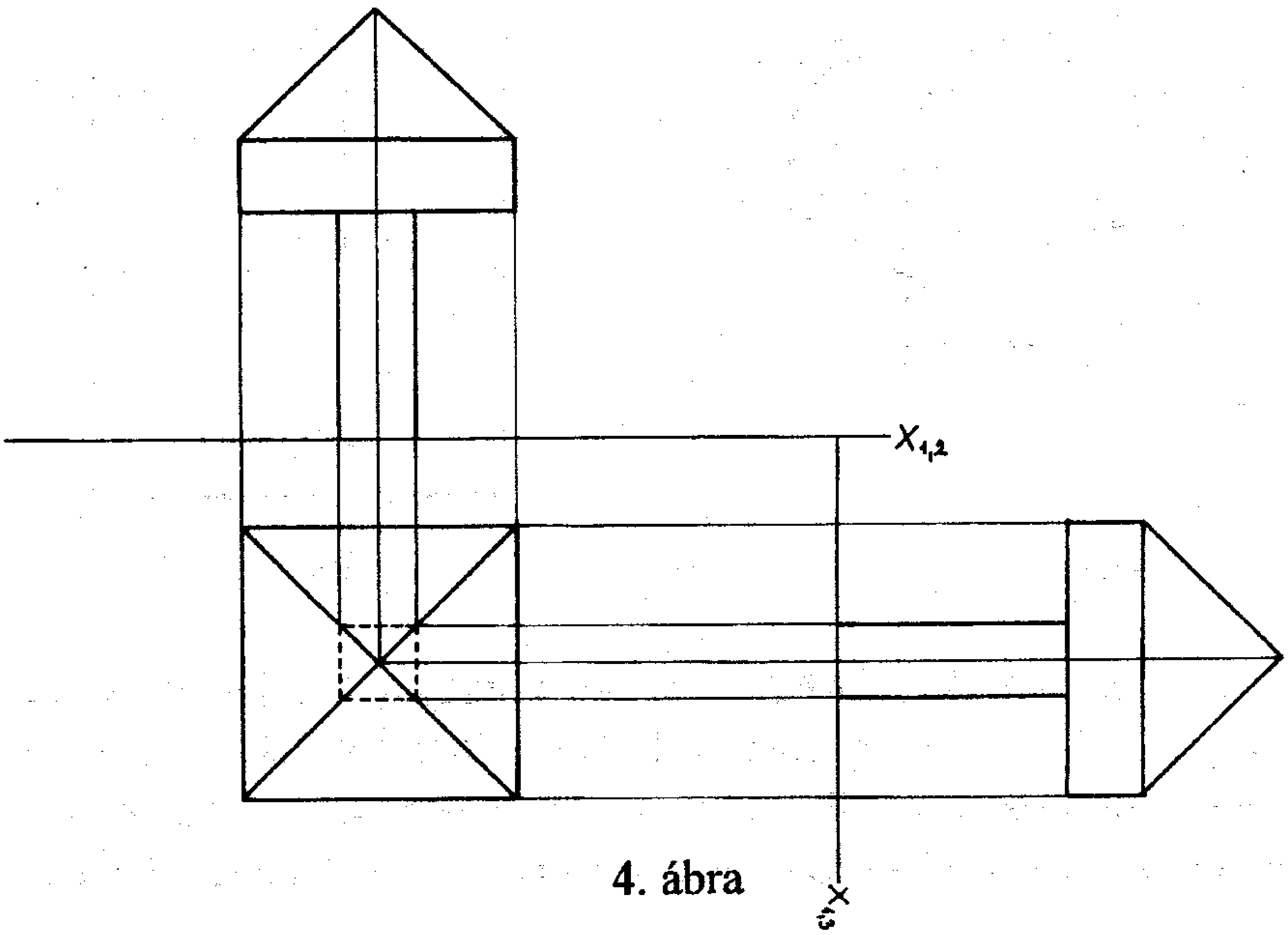
A MONGE -FÉLE KÉTKÉPSÍKOS ÁBRÁZOLÁS

Ezt az ábrázolási módot használják leginkább a műszaki gyakorlatban, mert célszerűen választott képsíkokon a térbeli alakzat méretei a vetületekről közvetlenül leolvashatók. Alaprajzot és homlokzati ábrákat már az ókorban is készítettek, de más - más léptékben. Gaspard Monge ötlete volt az azonos léptékű vetületek összekapcsolása, amelyből már a térbeli alakzat egyértelműen visszaállítható. A tér bármely két egymásra merőleges síkja *képsíkrendszert* alkothat. Szokás egyiket első, a másikat második képsíknak nevezni. Jele K_1 és K_2. Az egyszerűbb szemléltetés miatt válasszuk K_1-et vízszintesnek, a rá merőleges K_2 így függőleges lesz. A képsíkrendszerben elhelyezett tárgyat vetítsük merőlegesen K_1-re és K_2-re! Mivel a képsíkrendszer síkjai párhuzamos helyzetűek az objektum alap- és homloksíkjával, ezért azok vetületéről a valódi méretek egy része leolvasható (3. ábra) .



Úgy képzeljük, hogy előttünk áll a tárgy, mögötte a képsík, melyre merőlegesen vetítünk, így a tárgy képsíktól távolabbi (felénk eső) oldallapja jelenik meg a vetületen. Ha az objektum másik homlokzatát szeretnénk megmutatni, válasszunk a K_2 helyett egy másik képsíkot. K_3 merőleges K_1-re,így vele szintén képsíkrendszert alkot. Két képsík metszésvonalát képsíktengelynek, röviden *képtengelynek* nevezzük. Jele: $x_{i,k}$, ahol az *i* és *k* index jelzi, hogy melyik képsíkok közös egyeneséről van szó. Az ábrán a K_3 képsík különleges helyzetű, mert nemcsak K_1-re, de K_2-re is merőleges, tehát vele is képsíkrendszert alkot.

Meg kell állapodnunk abban, hogy a K_1K_2 képsíkrendszert milyen módon egyesítjük, vagyis az előbbi testcsoport vetületeit hogyan lehet egyetlen rajzlapon ábrázolni. A két képsík a teret négy egyenlő részre bontja. Irányítsuk a síkokat úgy, hogy a tárgy az első térnegyedben helyezkedjék el , vetületei pedig essenek a képsíkok pozitív felére. $x_{1,2}$ körül forgassuk a síkokat egymásra olyan módon, hogy a K_1 pozitív fele (a tárgy alaprajza) az $x_{1,2}$ alatt, a K_2 pozitív félsík pedig (a tárgy elölnézete) az $x_{1,2}$ fölött legyen! Az így egymásba hajtott síkokat már meg tudjuk jeleníteni egyetlen rajzlapon (4. ábra). A K_1K_3 képsíkrendszert is ábrázolhatjuk a rajzlapon, akár ugyanazon az ábrán is.



4. ábra

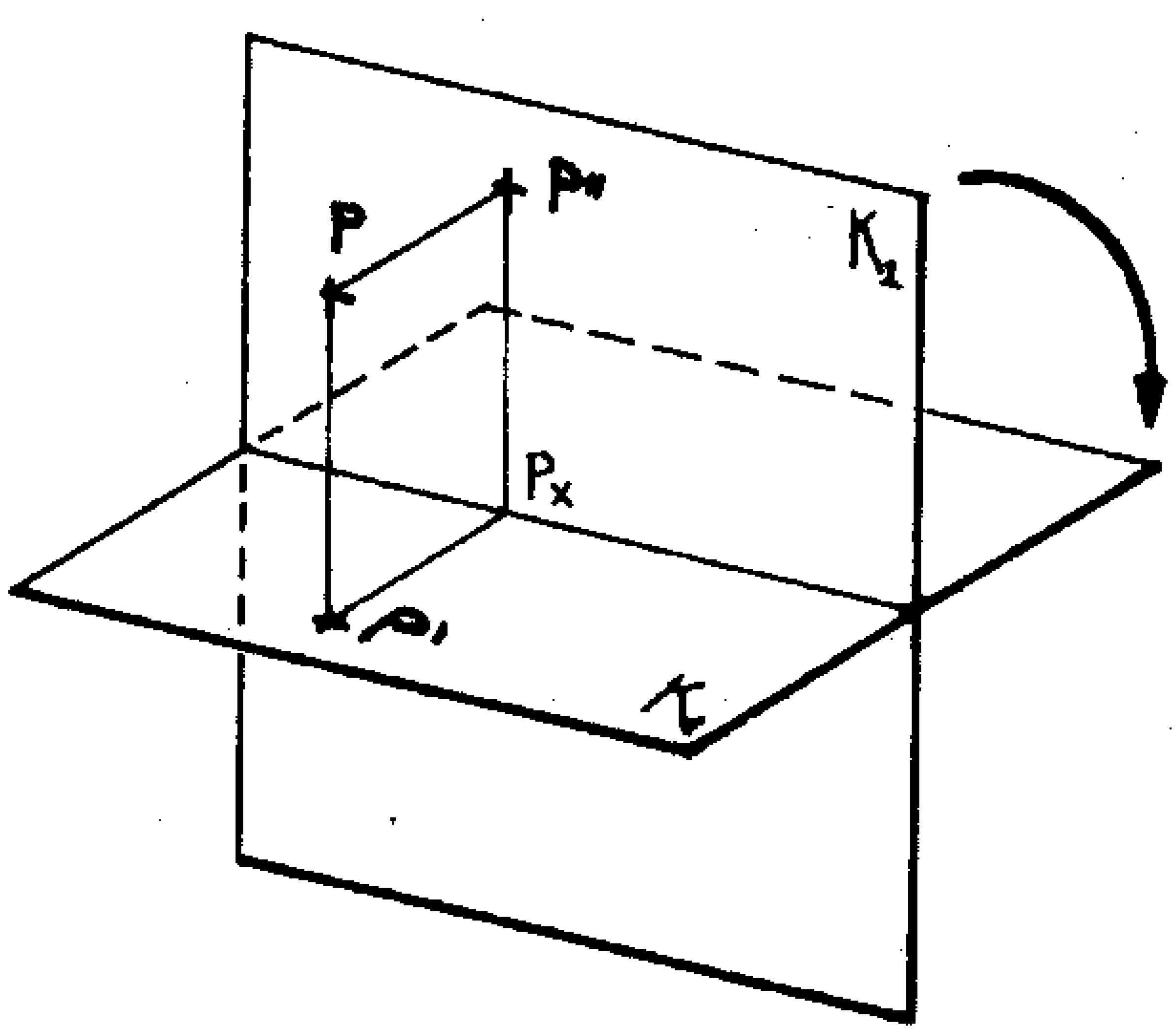
Azok az oldalak, amelyek párhuzamosak valamelyik képsíkkal, valódi nagyságban látszódnak, de a képsíkokhoz képest ferde élek (és síkidomok) vetülete kisebb a valóságosnál.

Térelemek ábrázolása

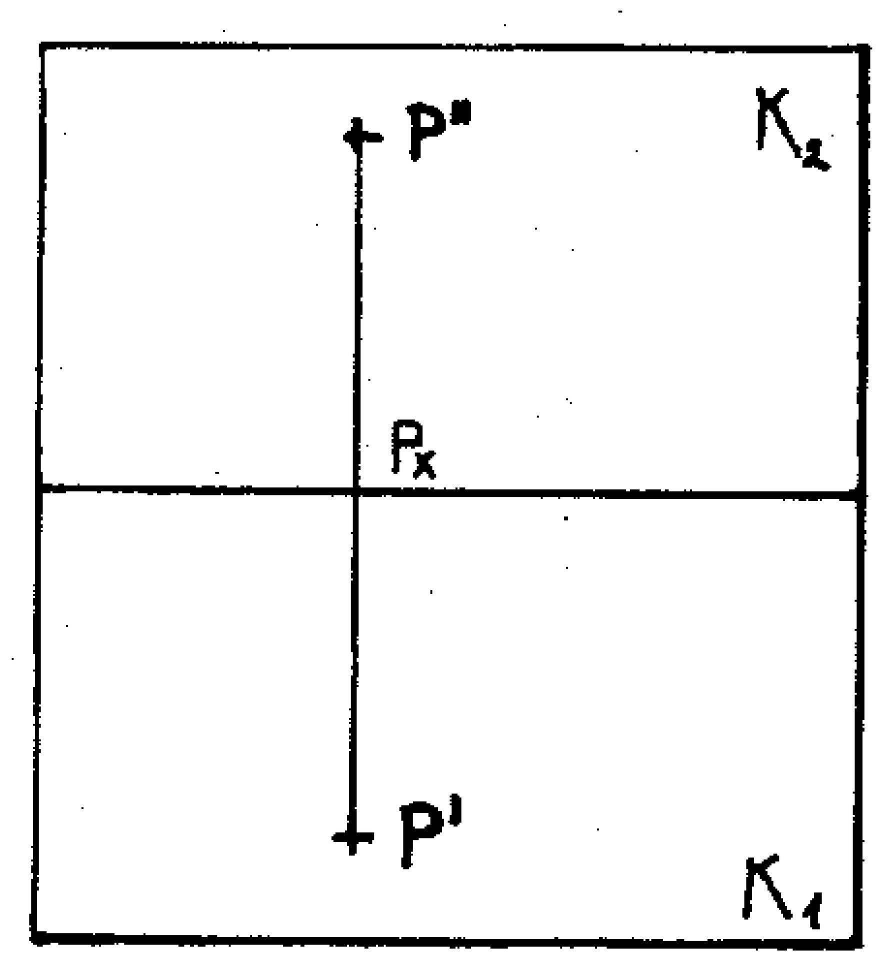
A Monge-féle kétképsíkos ábrázolás alapjait célszerű a térelemek ábrázolásával kezdeni. Ezek ismeretében térünk rá a bonyolultabb testek (testcsoportok) helyes ábrázolására, láthatósági viszonyaira, majd a velük kapcsolatos geometriai feladatok megoldására.

Pont ábrázolása

A térbeli P pontot tetszőlegesen választott képsíkrendszerben merőlegesen vetítjük mindkét képsíkra. A K_1-en létrejövő vetületét P'-vel, K_2-n pedig P"-vel jelöljük. A P ponton átmenő, képsíkokra merőleges egyenesek (vetítősugarak) egy olyan síkot alkotnak, amelyik merőleges $x_{1,2}$-re és azt P_x-ben metszi. Így a PP"P_xP' négyszög téglalap. (5. ábra)



5. ábra

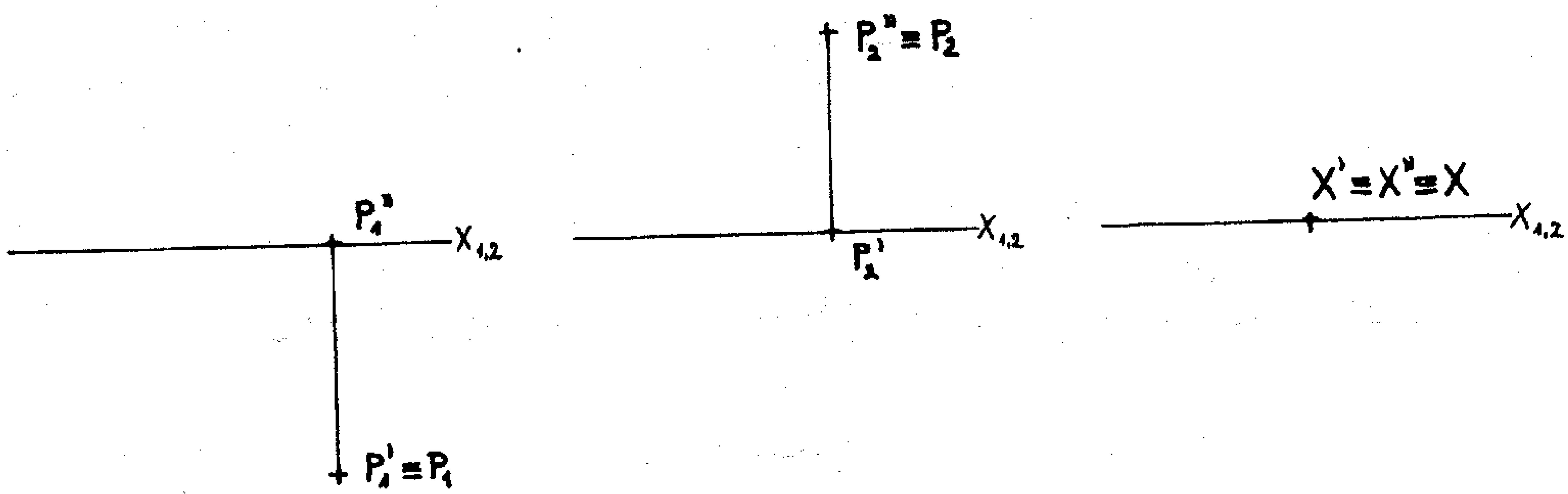


6. ábra

A képsíkrendszer egymásba forgatása után a rajzlapon megjelenik a pont két képe, melyeket (a vetítőtéglalap helyzete miatt) az $x_{1,2}$-re merőleges *rendezővonal* köt össze. A P_xP' szakaszt *első rendező*nek nevezzük, melynek hossza megegyezik a PP" szakaszéval. Az első rendező megmutatja,hogy a pont milyen messze van a második képsíktól. A P_xP'' szakasz a pont *második rendezője*, amelyik ugyanakkora, mint PP', a pont első képsíktól való távolsága. (6. ábra)

Mivel a képsíkok szerepe (számozása) az ábrázolás során felcserélhető, az előbbieket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a pont *egyik rendezőjének hossza* megmutatja a pont *másik képsíktól való távolságát.*

A pont visszaállítása a térbe az előbbi leképezés megfordítása: $x_{1,2}$ mentén hajtsuk föl az egyik képsíkot, (hogy visszakapjuk a térben az egymásra merőleges síkokból álló képsíkrendszert) a rajta levő vetületekkel együtt. A pont vetületi képeiben merőlegest állítunk a képsíkokra. Ezek a merőlegesek egyetlen P térbeli pontban metszik egymást (mert benne vannak a $P'P_xP''$ által meghatározott, $x_{1,2}$-re merőleges síkban). A térbeli pontot két vetülete mindig egyértelműen meghatározza. Az első térnegyedbeli pontok második képe az $x_{1,2}$ tengely fölött, első képe pedig alatta helyezkedik el. Képsíkokon vagy másik térnegyedben levő pontokat képeik helyzete alapján ismerhetünk fel, és az előbbiek szerint rekonstruálhatunk. A P_1 pont az első, P_2 a második képsíkra illeszkedik, X az $x_{1,2}$ tengely pontja. (7. ábra)



7. ábra

Feladat: Készítsen rajzlapból képsíkrendszert, ábrázoljon különböző térnegyedbeli pontokat és rekonstruálja őket!

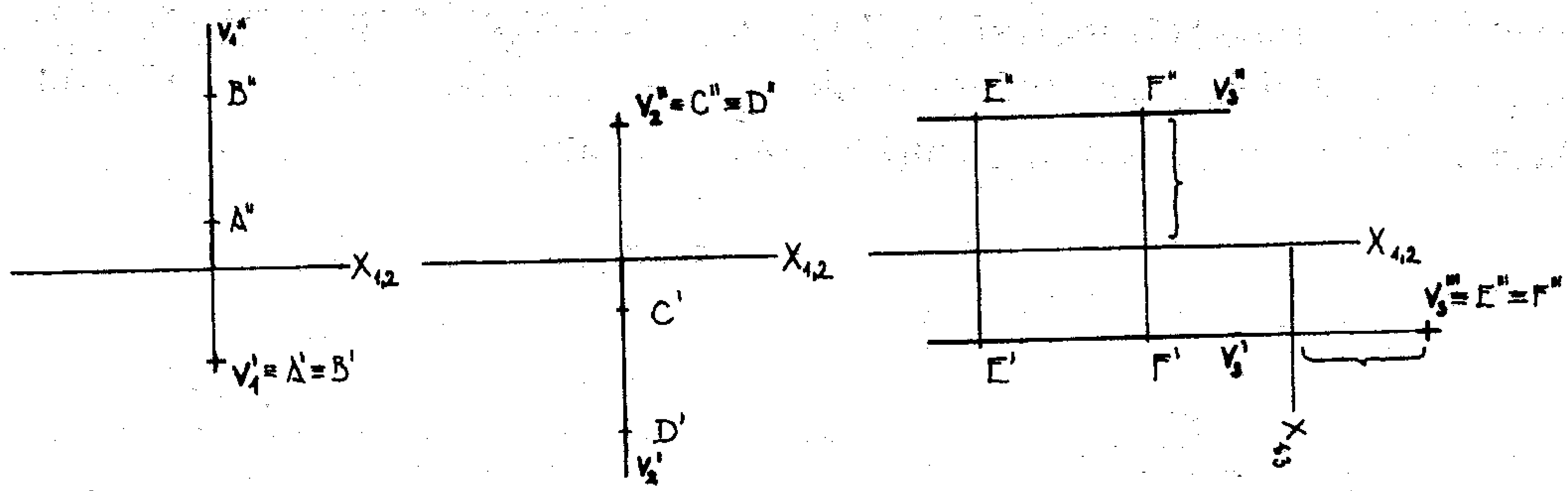
Egyenes ábrázolása

Két tetszőleges pont mindig meghatároz egy egyenest, így a pont ábrázolásának ismeretében már egyenest is ábrázolhatunk. Az egyenes képei a megfelelő képpontokat kötik össze. Az egyenesek képeiből általában csak az első térnegyedbe eső véges darabot szokás ábrázolni.

Különleges helyzetű egyenesek:

1. Vetítősugarak

A képsíkokra merőleges egyeneseket vetítősugaraknak hívjuk. Az első vetítősugár az első képsíkra merőleges, ezért minden pontjának ugyanaz az első képe. Hasonlóan jeleníthető meg a második és a harmadik vetítősugár is (8. ábra). A harmadik vetítősugár párhuzamos az $x_{1,2}$ tengellyel, ezért első és második képe is párhuzamos vele.

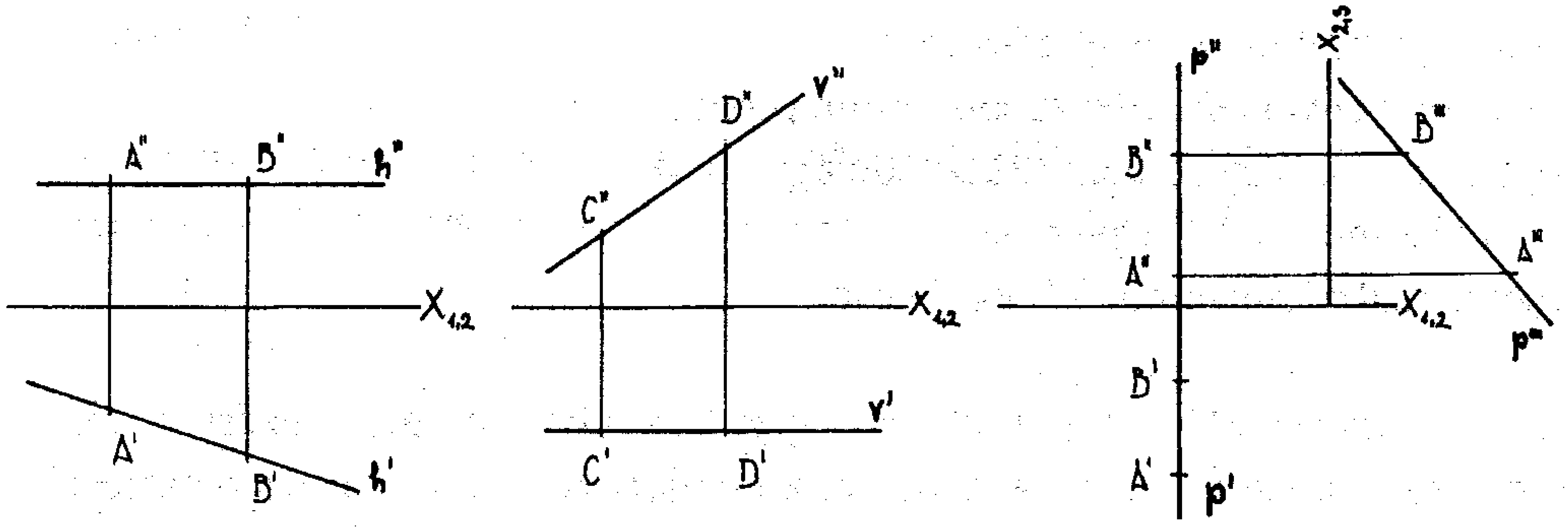


1. vetítősugár　　2. vetítősugár　　3. vetítősugár

8. ábra

2. Fővonalak

A képsíkokkal párhuzamos egyeneseket fővonalaknak nevezzük. Az első fővonal párhuzamos az első képsíkkal. Mivel minden pontja ugyanolyan távol van az első képsíktól, második képe az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamos egyenes. Az első képsík második képe maga az $x_{1,2}$ tengely. Az első fővonal első képét tetszőlegesen fölvehetjük. A képsíkkal párhuzamos helyzet miatt az egyenes bármelyik szakasza valódi nagyságban látszik az első vetületen (9. ábra).



1. fővonal 2. fővonal 3. fővonal

9.ábra

A képsíkok szerepe fölcserélhető, ezért a második fővonal az elsőhöz hasonlóan értelmezhető. A harmadik képsík, K_3, az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges, az első és második képsíkot is az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges egyenesben metszi. Ezért a harmadik fővonal első és második képe is az $x_{1,2}$-re merőleges egyenes lesz, melyet az előzőek szerint két pontjával (azok első és második képével) adhatunk meg. A harmadik fővonalat szokás *profilegyenes*nek is nevezni.

Az egyenes térbeli rekonstrukciója a képsíkrendszerben (a leképezés megfordításával) két pontjának vetületekből való visszaállításával történik.

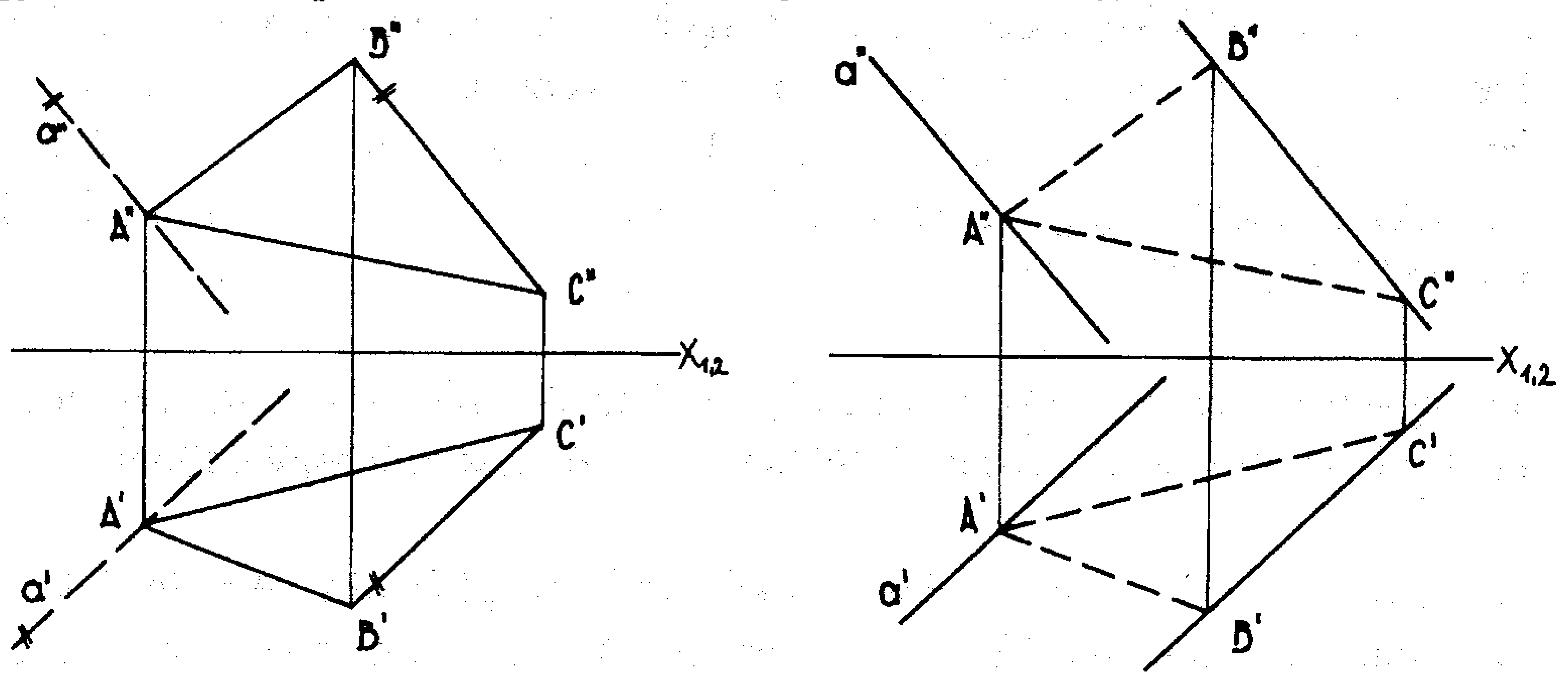
Az egyenes képsíkokra vetítését másképpen is megtehetjük. Az előzőekben két pontjával ábrázoltunk egy egyenest. A két pont első vetítősugara tulajdonképpen az egyenes első képsíkra merőleges vetítősíkját határozza meg. Ennek a síknak a képsíkkal alkotott metszésvonala az egyenes képe a képsíkon. Ezért egy egyenest úgy is rekonstruálhatunk, hogy az egyenes vetületeiben képsíkokra merőleges síkokat állítunk. A térbeli egyenes ezeknek a síkoknak a metszésvonala. (*Figyelem!* Profilegyenesnél és vetítősugarak esetében ez nem vezet eredményre.)

Sík ábrázolása

A síkot egyértelműen meghatározza:

1. nem egy egyenesre illeszkedő három pontja,
2. egy pontja és egy rá nem illeszkedő egyenese,
3. egymást metsző két egyenese,
4. egymással párhuzamos két egyenese.

Már megismerkedtünk a pontok és egyenesek ábrázolásával, ezért a síkot meghatározó adatok fölvétele nem okoz gondot. A geometriai szerkesztések során mindig azokat az elemeket alkalmazzuk, amelyekre a feladatok megoldásánál szükségünk van, vagy a szerkesztést könnyebbé teszik. A 10. ábrán látható, hogy a négyféle sík meghatározás ábrázolási szempontból csak néhány vonal elhagyását vagy behúzását jelenti ugyanabban a geometriai modellben. Az A, B, C pontok vagy az A pont és a BC egyenes ugyanazt a síkot jelenti, mint a C pontra illeszkedő AC és BC egyenesek, vagy a BC egyenes és az A pontra illeszkedő, vele párhuzamos a egyenes.



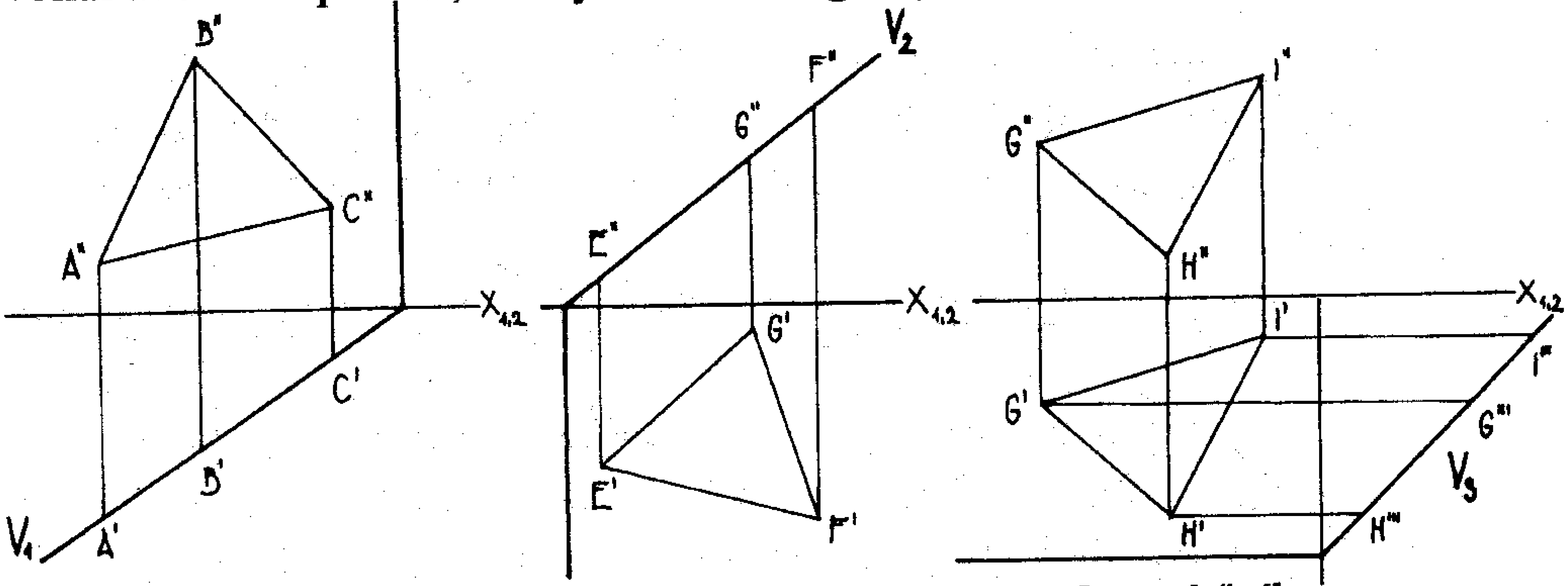
10. ábra

Az egyeneseknek és síkoknak mindig csak a feladat megoldása szempontjából lényeges, véges darabját ábrázoljuk.

Különleges helyzetű síkok

1. Vetítősíkok

A képsíkra merőleges síkot vetítősíknak nevezzük. A vetítősík képe egyenes vonal azon a képsíkon, amelyikre merőleges (11. ábra).

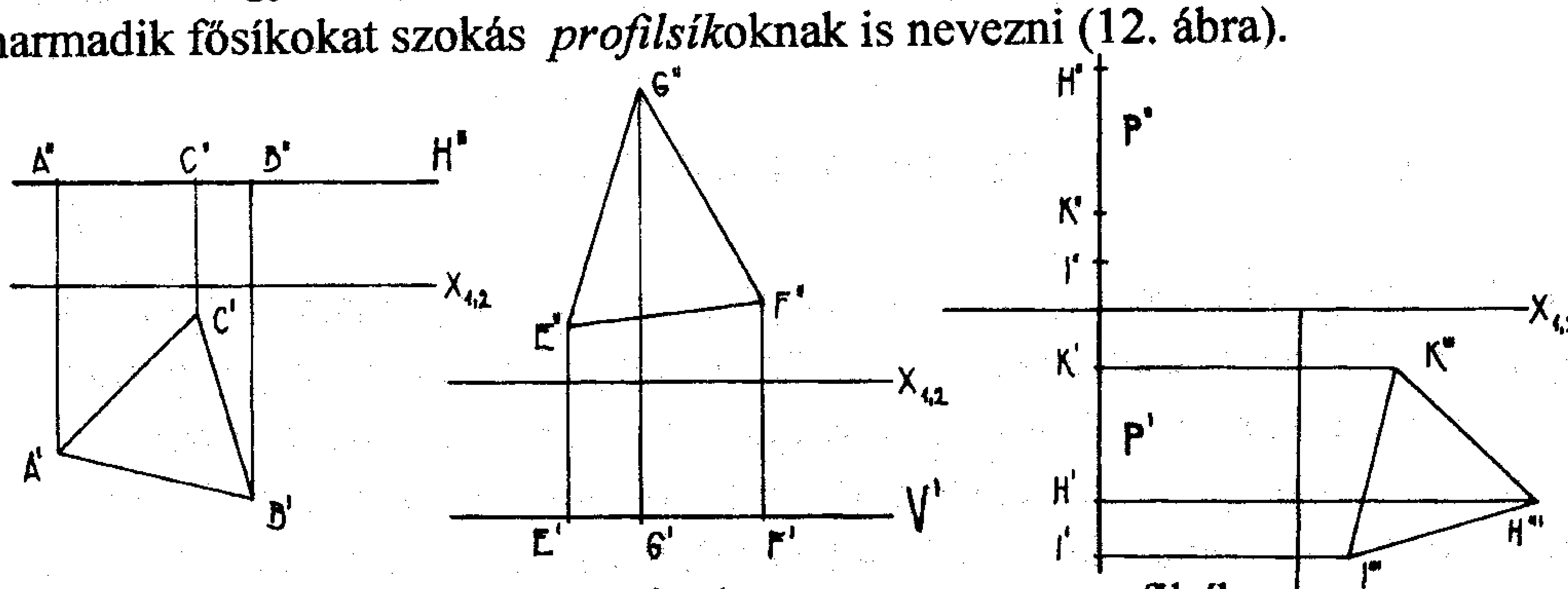


1. vetítősík   2. vetítősík   3. vetítősík

11. ábra

2. Fősíkok

A képsíkkal párhuzamos helyzetű síkok a fősíkok.(A fősík egy különleges helyzetű vetítősík.) Az első fősíkban elhelyezkedő alakzat első képe az eredetivel egybevágó, a második képe egyetlen vízszintes szakasz. A harmadik fősíkokat szokás *profilsík*oknak is nevezni (12. ábra).

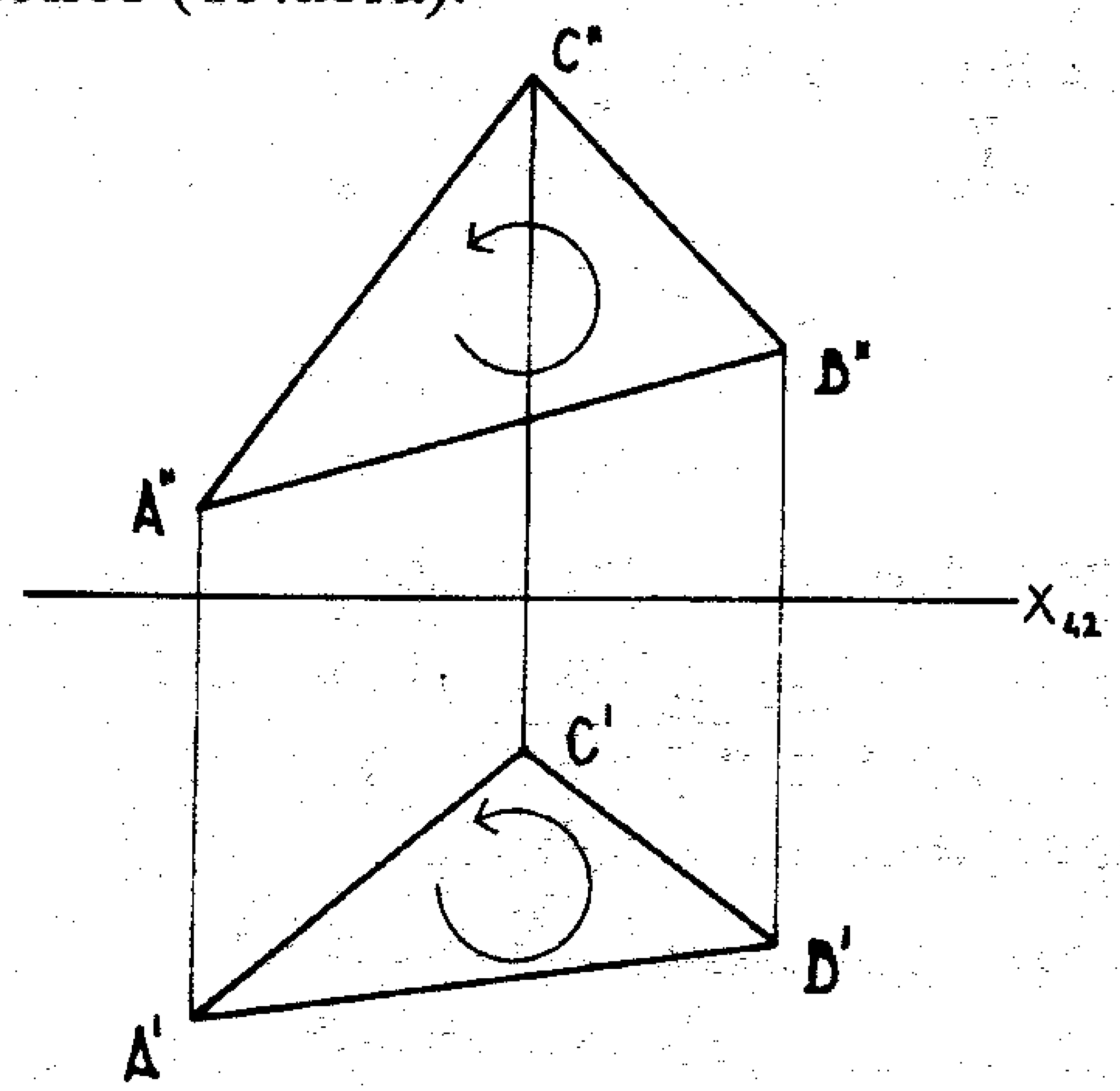


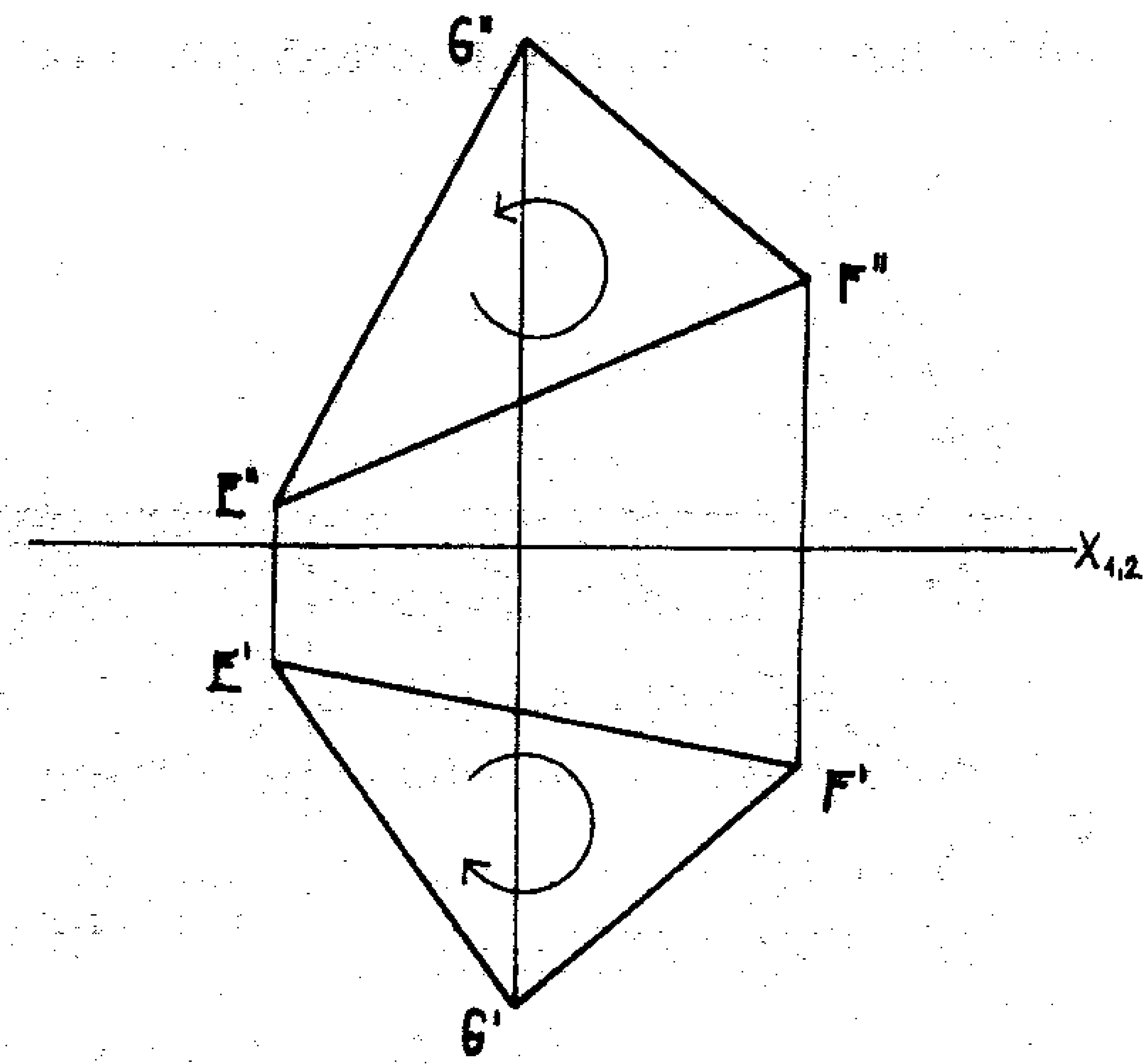
1. fősík   2. fősík   profilsík

12. ábra

3. Általános helyzetű síkok

Ha a síknak mindkét képen ugyanazt az oldalát látjuk, a síkot dőlt (vagy dűlt) síknak nevezzük. Dőlt síkban fekvő alakzat képeinek körüljárási iránya azonos (13.ábra).





13. ábra

Ha a síknak a képeken különböző oldalait látjuk, a síkot feszített síknak nevezzük. Feszített síkú alakzat képein a körüljárási irány ellentétes (13.ábra).

Térelemek illeszkedése

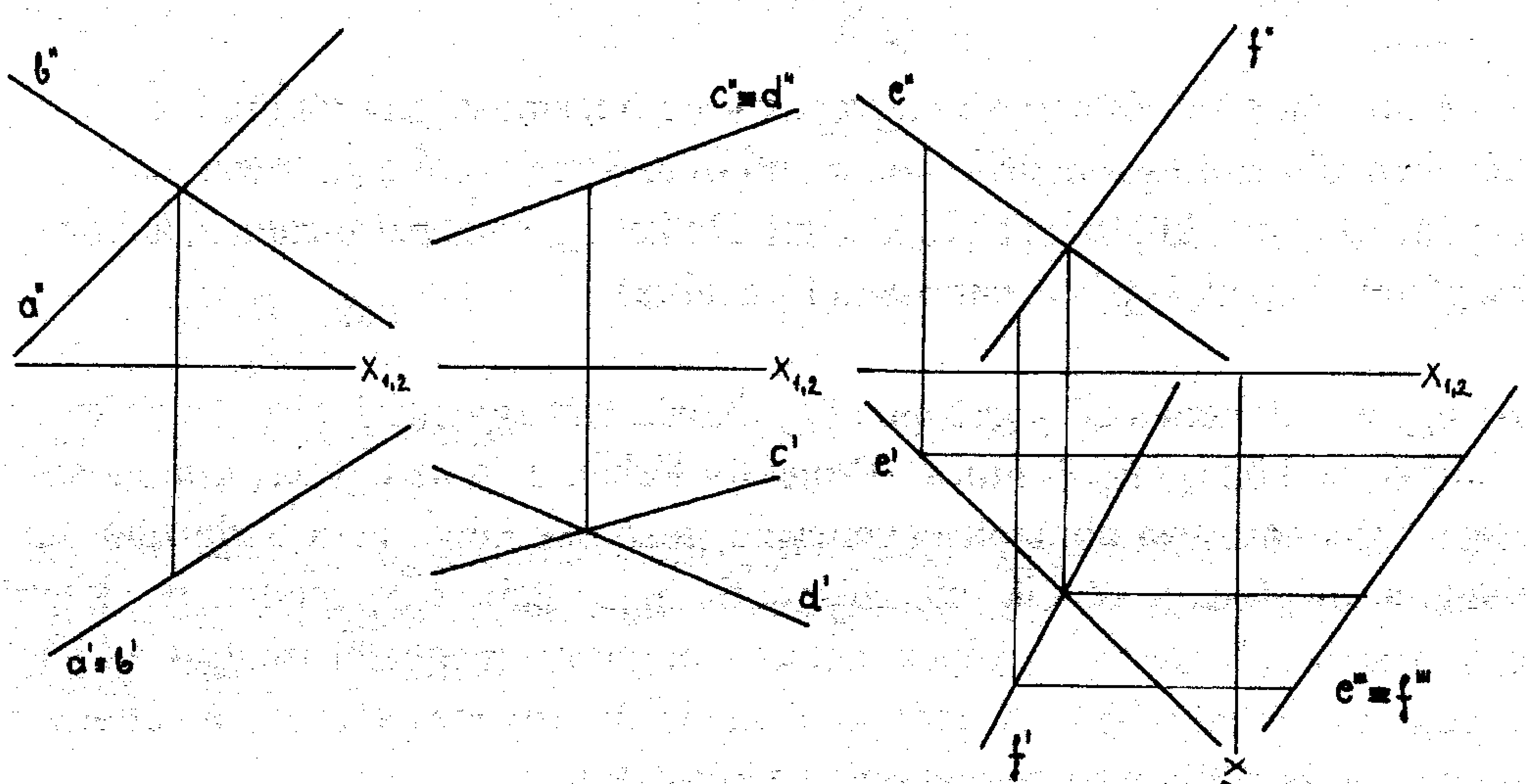
Közös síkban fekvő két egyenes lehet párhuzamos vagy metsző. A projektív geometria ezt a két esetet nem különbözteti meg : két síkbeli egyenes mindig metsző, közös pontjuk rajta van mindkét egyenesen (azok véges vagy végtelen távoli pontja).Megállapodásunk szerint mi a projektív teret a végtelen távoli elemekkel kibővített euklideszi térrel modellezzük. Ezért szóhasználatunkban (mivel a középiskolában szerzett geometriai ismeretekre nagymértékben támaszkodunk) az euklideszi térben megszokott kifejezéseket használjuk, . s ahol szükséges, külön hangsúlyozzuk a projektív vonatkozásokat.

Két pont *illeszkedik* egymásra (azonosak), ha az első és második vetületeik is külön-külön egybeesnek.

Ha két pontnak csak az egyik (azonos képsíkra eső) vetületei esnek egybe, *fedőpontok*nak hívjuk őket. Ekkor a másik képük egy rendezőn, a rájuk illeszkedő vetítősugár képén van (8. ábra).

Két egyenes *azonos*, ha megfelelő képeik egybeesnek.

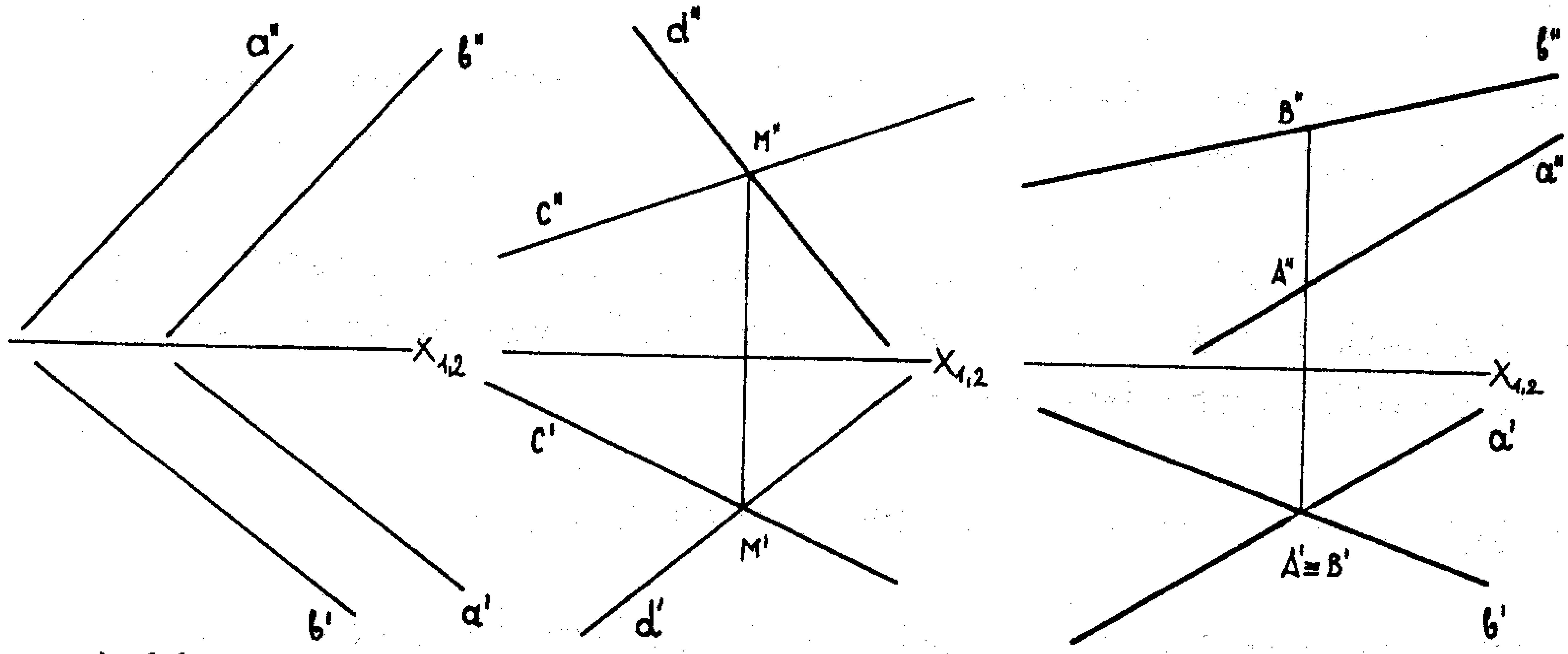
Azokat az egyeneseket, amelyeknek megfelelő képei csak az egyik képen azonosak, a másikon különbözőek, *fedőegyenesek*nek nevezzük. A fedőegyeneseknek szükségképpen közös az egyik vetítősíkjuk (14. ábra).



1. fedőegyenesek 2. fedőegyenesek 3. fedőegyenesek

14. ábra

Metsző egyenespár közös pontjának képe a képeknek is közös pontja.A metszéspont képei egy rendezőre esnek (15/b. ábra).



a)párhuzamos egyenesek b)metsző egyenesek c) kitérő egyenesek

15. ábra

A párhuzamos vetítés során az egyenesek párhuzamossága öröklődik a képeken, ábrázoló geometriai szempontból ezért célszerű a párhuzamos egyeneseket megkülönböztetve kezelni. Ha két egyenes párhuzamos, akkor megfelelő képeik is párhuzamosak.(15/a. ábra)

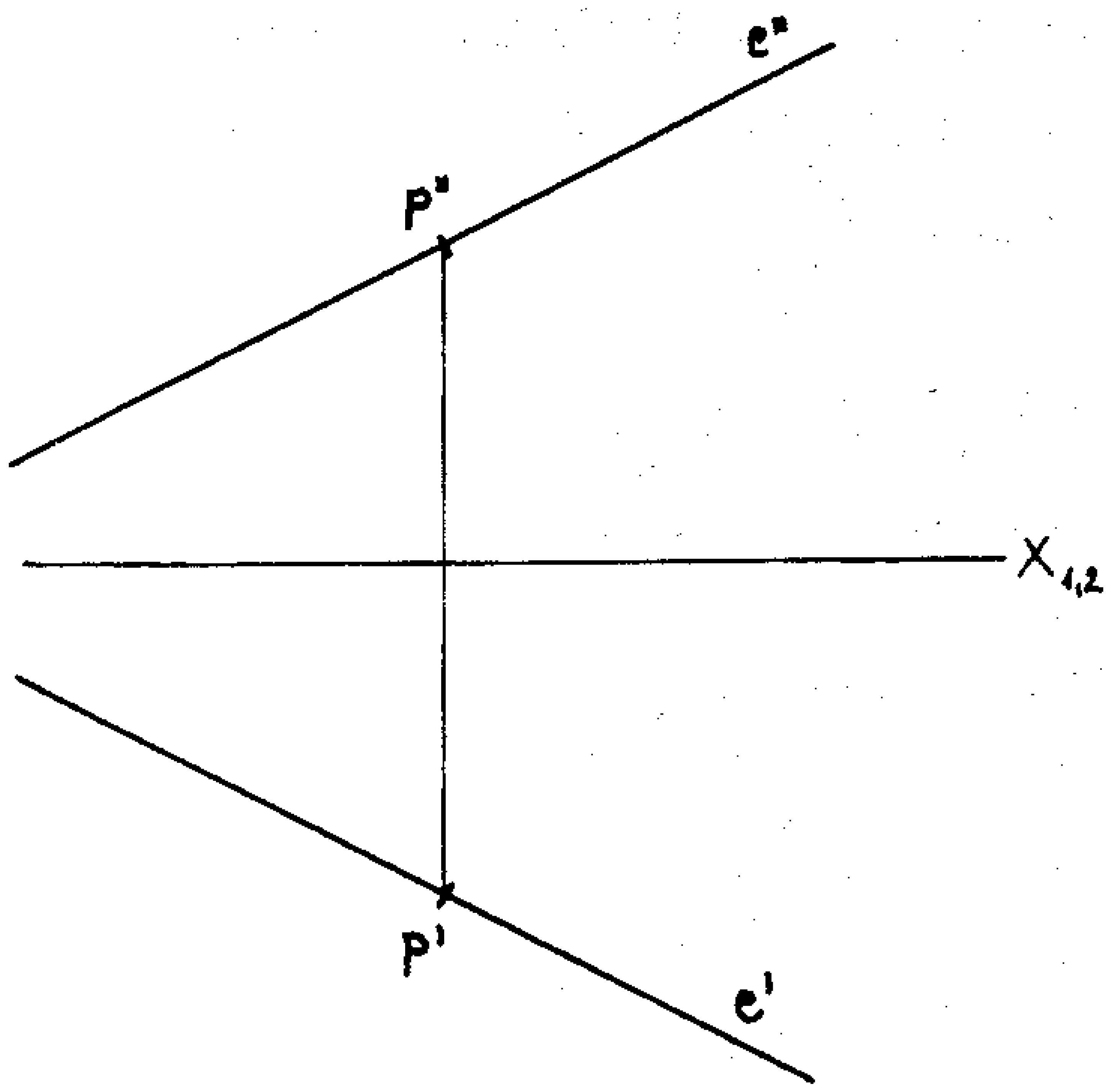
Az egyenesek nem szükségképpen egysíkúak. Két egyenes kitérő, ha se közös pontjuk, se közös síkjuk nincs. (Projektív térben elég az egyiket kimondani.) Ezért minden olyan ábrázolt egyenespár, melynek képei nem párhuzamosak, vagy a megfelelő képeik metszéspontja nem esik egy rendezőre, kitérő egyenespár (15/c.ábra). A képek metszéspontjaiban meghatározhatjuk a kitérő egyenesek láthatóságát. A fedőpontban az az egyenes látszik, amelyiknek pontja a vizsgált helyen távolabb van a képsíktól.

Határozzuk meg két kitérő egyenes láthatóságát! (15/c.ábra)
Illesszünk az **a** és **b** egyenesekre első vetítősíkokat! A két sík metszésvonala metszi az egyeneseket az A és B pontokban. B" távolabb van az $x_{1,2}$ tengelytől, azaz a B pont magasabban van, mint az

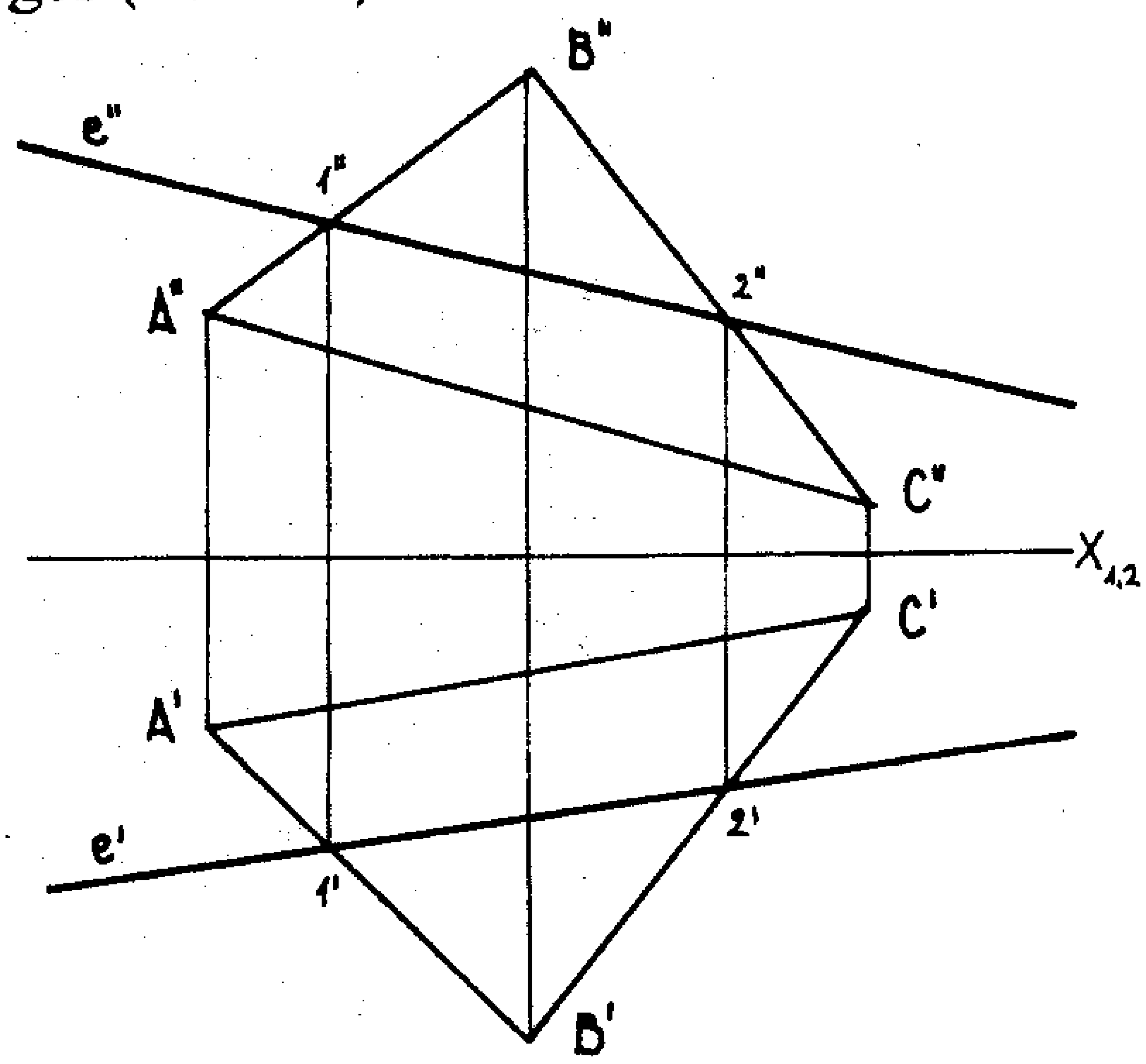
A, ezért első képen a **b** egyenes látható. (Az **a** egyenes első képét az ábrán kicsit megszakítjuk.)

Pont illesztése egyenesre

A két ponton átmenő egyenes ábrázolásának fordítottja: a pont képei illeszkednek az egyenes megfelelő képeire. A pont képeit összekötő rendezővonal az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges (16.ábra).



16. ábra



17. ábra

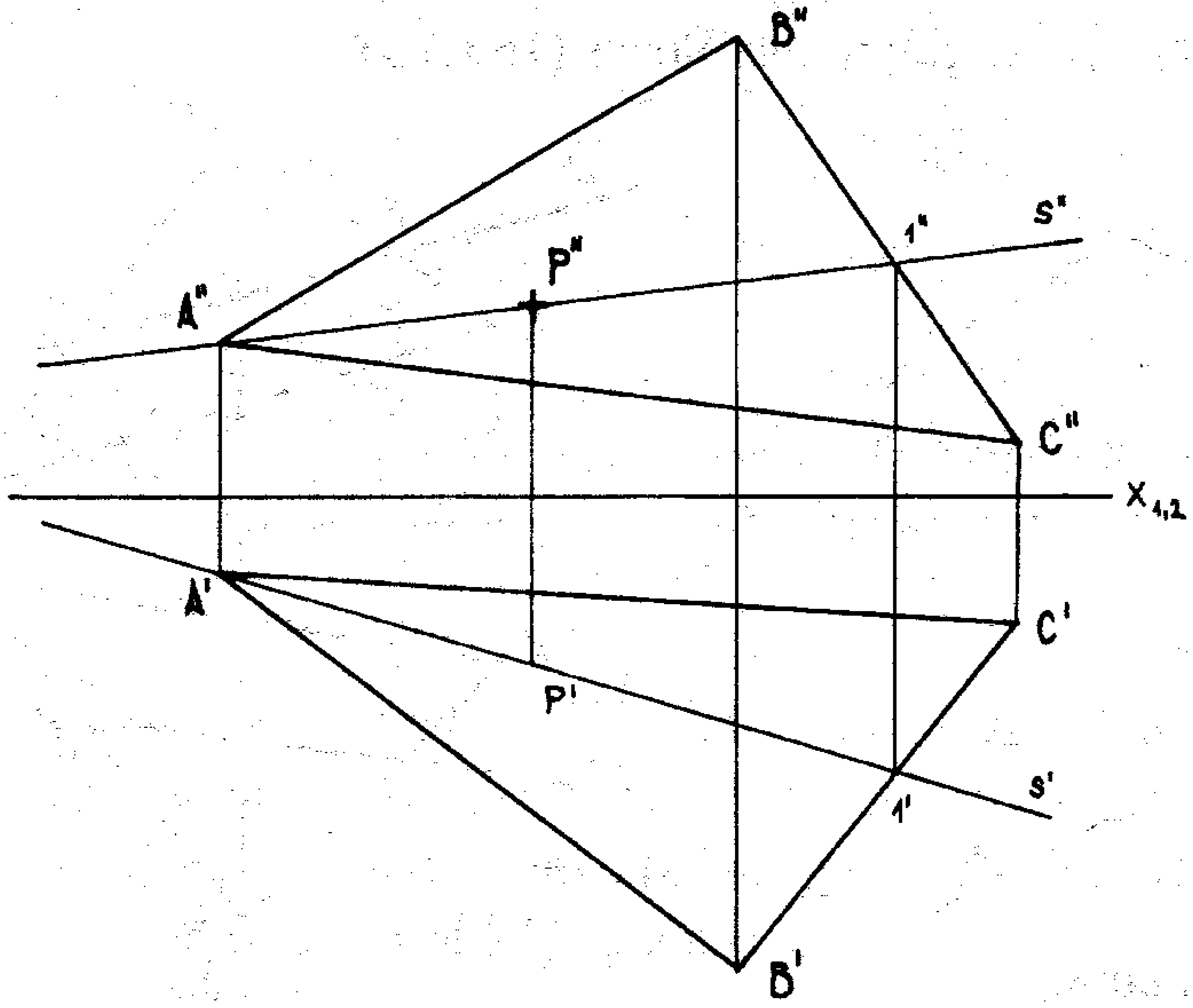
Egyenes illesztése síkra

Az ABC háromszög síkján további egyeneseket úgy célszerű fölvenni, hogy a háromszög oldalain fölveszünk egy-egy pontot, s ezeket (képenként) összekötjük (17.ábra).

Síkbeli pont ábrázolása képeivel

Az ABC háromszög síkjára illeszkedő P pont egyik képét (pl. a másodikat) tetszőlegesen kijelölhetjük. Tudjuk, hogy a pontot a P"-re illesztett második vetítősugár metszi ki a síkból, de ezt a metszéspontot eddigi ismereteinkkel még nem tudjuk megszerkeszteni.

Keressünk a pontra illeszkedő tetszőleges síkbeli s segédegyenest! Legyen ez pl. az AP egyenese (18.ábra). Az AP egyenese metszi a háromszög BC oldalát az 1 pontban. Ez a pont a második képen megszerkeszthető. A"P"× B"C"=1". Az 1 pont rendezője kimetszi B'C'-n az 1' pontot. Az A' és 1' összekötő egyenese , s', tartalmazza a pont első képét is, melyet a P"-ből húzott rendező metsz ki a segédegyenes első képéből.



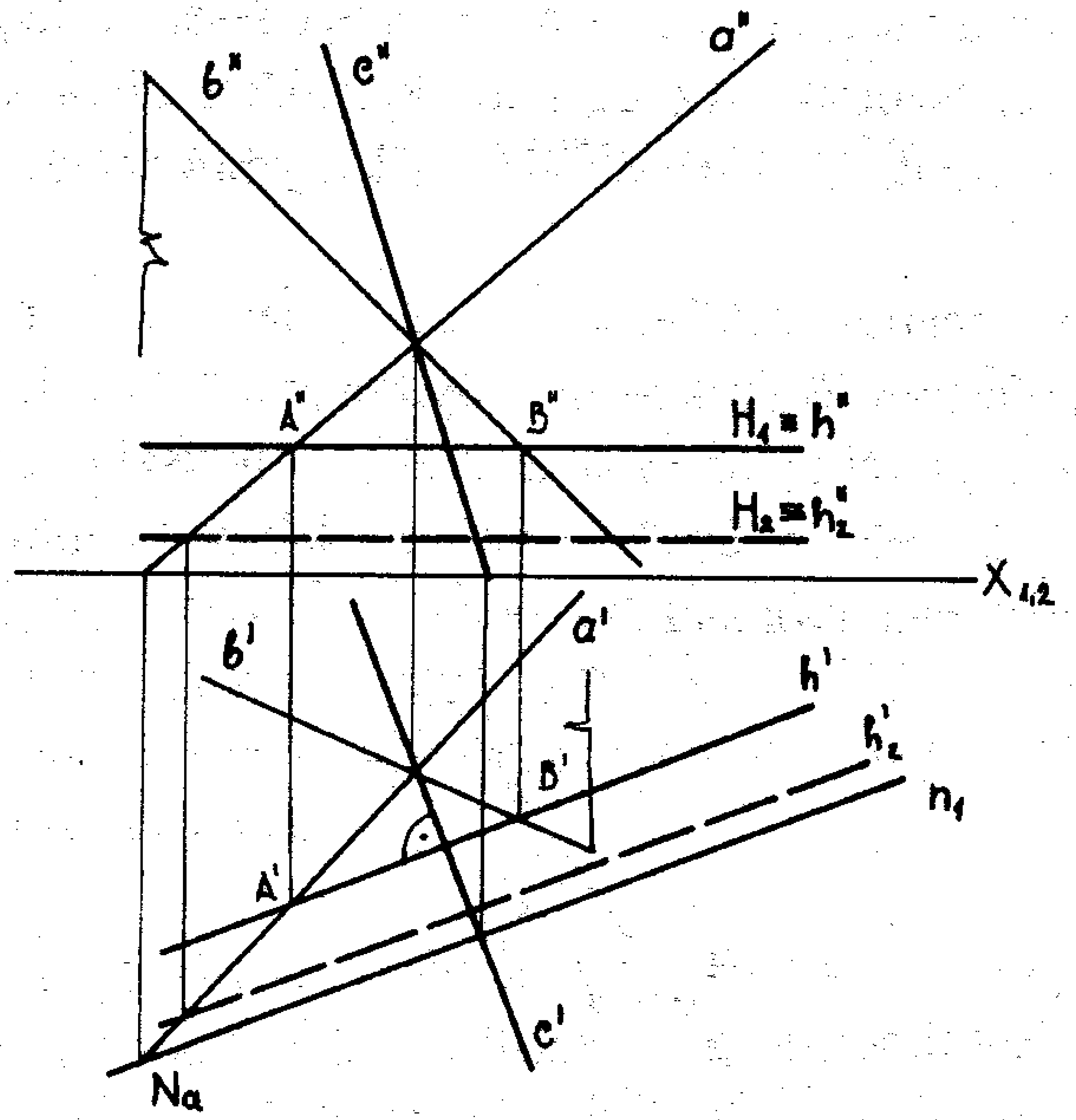
18. ábra

Ábrázoló geometriában *egy pont megszerkesztése* mindig azt jelenti, hogy ábrázolunk legalább két olyan egyenest (a képeivel), amelyeknek a metszéspontja meghatározza a keresett pontot. A P pontot választhatjuk a háromszögön kívül is, s további síkbeli pontok szerkesztésével a háromszöget tetszőleges oldalú sokszöggé alakíthatjuk.(*Vigyázat!* Mivel a síkot három pontja egyértelműen meghatározza, a tetszőleges sokszögnek csak az egyik képe választható szabadon.)

A sík különleges egyenesei

Az *első fővonalak* az első képsíkkal párhuzamos egyenesek .

Illesszünk az **a** és **b** egyenesek által meghatározott síkra első fővonalat! (19.ábra) Az **a** és **b** síkját az első fősíkok első fővonalakban metszik. Az első fősík második képe $x_{1,2}$-vel párhuzamos egyenes, $\mathbf{H_1}$. A sík tartóegyenesei metszik a $\mathbf{H_1}$ fősíkot az A és B pontokban. Ezek első képét rendezővel megkaphatjuk. Az AB egyenese illeszkedik a síkra és párhuzamos az első képsíkkal, ezért AB első fővonalon van.



19. ábra

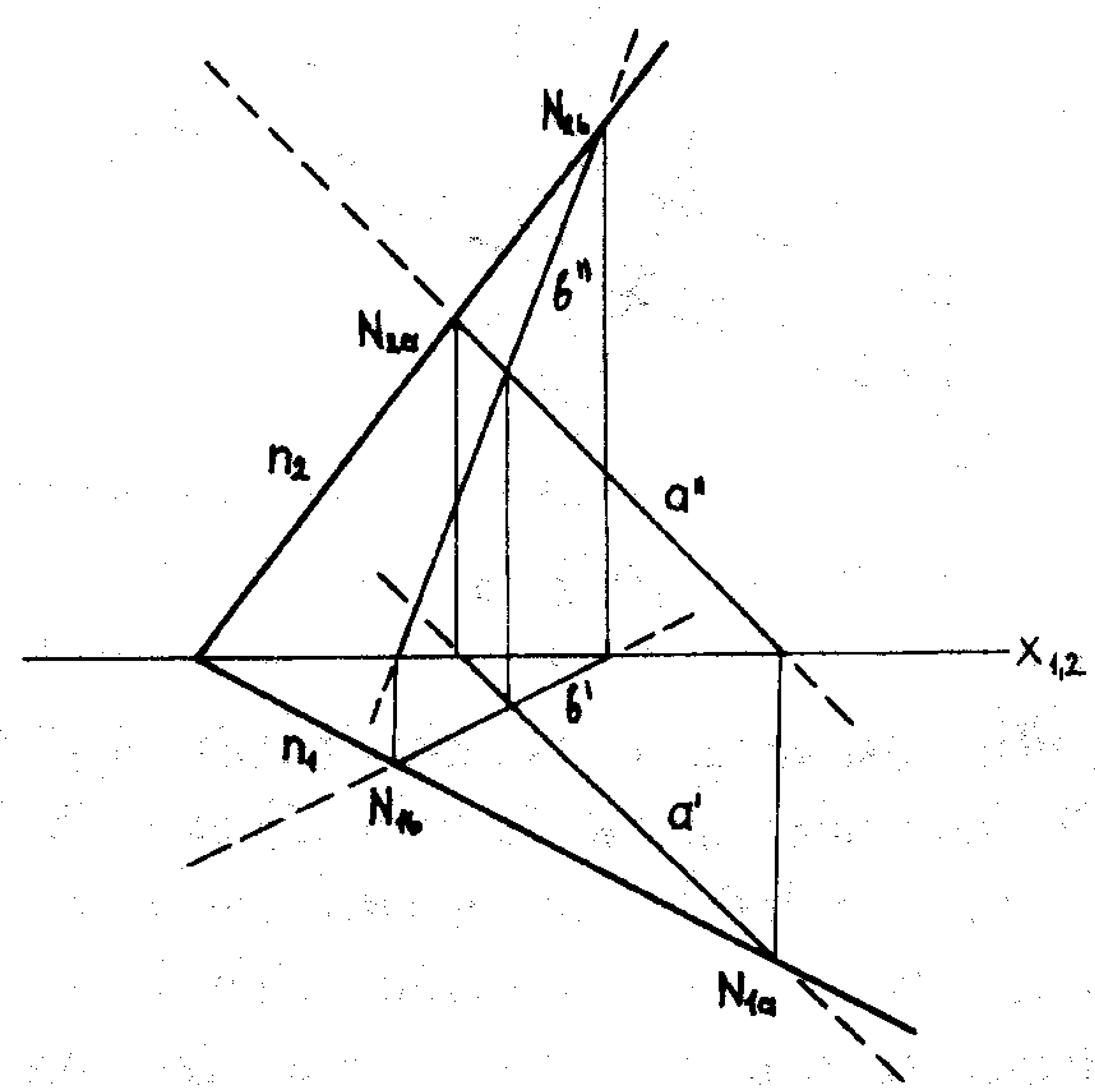
Ha a síkot további első fősíkokkal metsszük, az AB-vel párhuzamos síkbeli egyeneseket (első fővonalakat) kapunk. Az első képsík is fővonalban metszi a síkot, de ezt megkülönböztetésül *első nyomvonal*nak nevezzük. Az első nyomvonal azonos az első képével, második képe az $x_{1,2}$ tengely. A sík fővonalakra merőleges egyenesei a sík *esésvonal*ai. Az első esésvonal merőleges a sík első fővonalaira. A merőlegesség az első vetületen is megjelenik, mert a derékszög egyik szára (a fővonal) a képsíkkal párhuzamos helyzetű. Az esésvonal másik képét az illeszkedés alapján szerkeszteni kell. Az első esésvonal iránya egyúttal a síkról lefolyó víz vagy a leguruló golyó mozgásiránya. Az első fővonalakhoz hasonlóan megszerkeszthetők a sík *második fővonal*ai, esésvonalai és a második nyomvonal is.

Egy sík nyomvonalai a képtengelyen metszik egymást. (A sík és a két képsík egyetlen közös pontját a képsíkok metszésvonala jelöli ki a síkon.) Szokás a nyomvonalaknak csak az első térnegyedbeli darabját ábrázolni úgy, mint az egyenesek ábrázolásánál. A sík és a képsíkok összes közös pontját a nyomvonalak tartalmazzák, ezért a sík egyenesei a képsíkokat csak a nyomvonalakon metszhetik. Az egyenes képsíkkal alkotott metszéspontját *nyompont*nak nevezzük. A 20. ábrán a sík nyomvonalainak szerkesztését mutatjuk be.

Először meghatározzuk két síkbeli egyenes első és második nyompontjait. Ezek összekötése a nyomvonal.

Ellenőrzés: 1. A két nyomvonal a tengelyen metszi egymást.

2.A sík további egyeneseinek nyompontjai is a megfelelő nyomvonalakra esnek.



20. ábra

A síkot megadhatjuk különleges egyeneseivel is. A nyomvonalaival ill. fővonalaival megadott sík is tekinthető metsző egyeneseivel ábrázolt síknak. Néhány különleges helyzetű sík a nyomvonalairól is fölismerhető. Például: a vetítősíkok egyik nyomvonala merőleges a képtengelyre. Párhuzamos síkok nyomvonalai egymással párhuzamosak. Fősíkoknak csak egyetlen, tengellyel párhuzamos nyomvonala van.

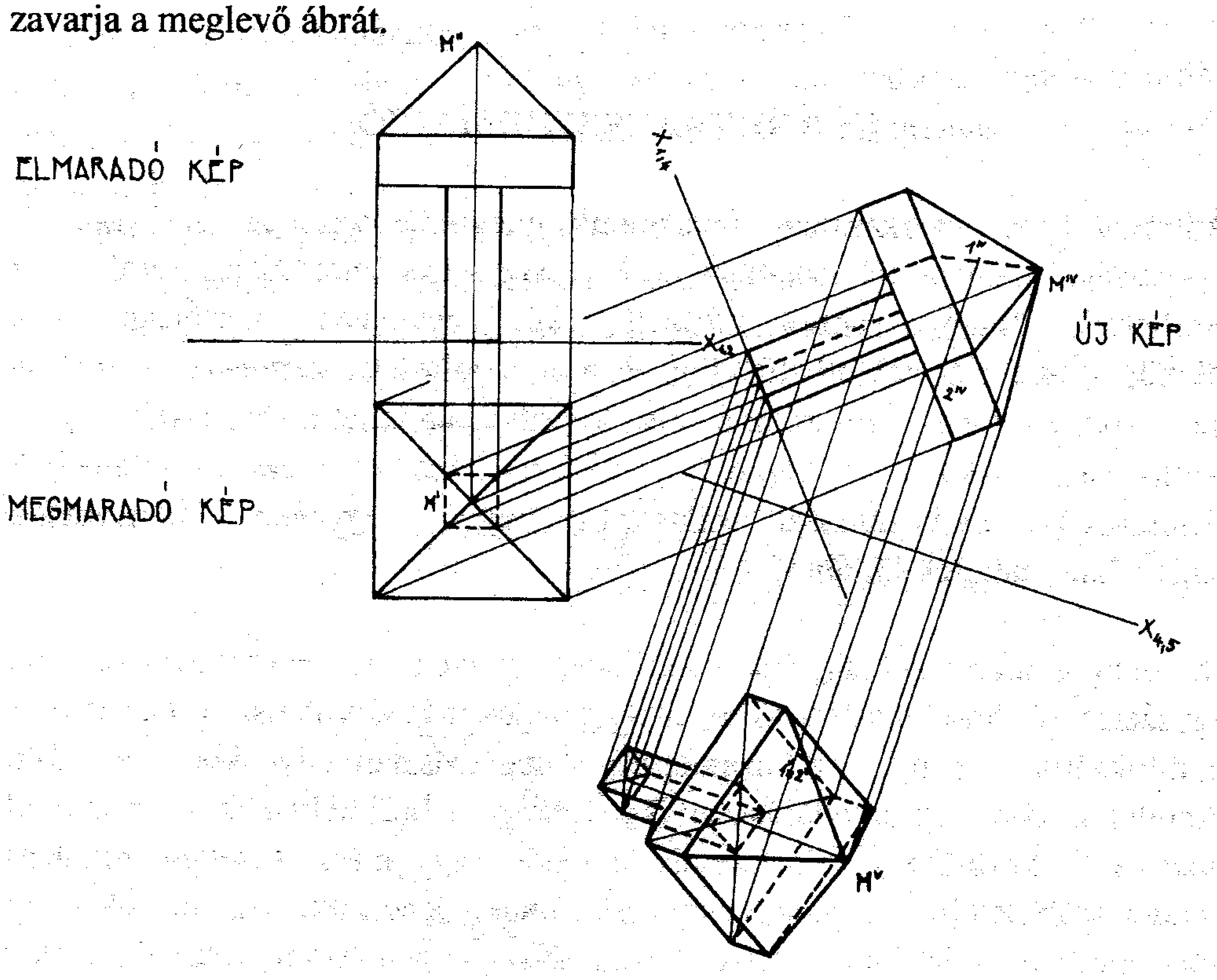
Mielőtt a metszési feladatok ábrázoló geometriai megoldását tárgyalnánk, ismerkedjünk meg egy olyan eljárással, amelyik lényegesen megkönnyíti és leegyszerűsíti a munkánkat.

KÉPSÍKTRANSZFORMÁCIÓ

Ábrázolási és szerkesztési feladataink megoldásának egyszerűsége és gyorsasága nagymértékben függ a képsíkrendszer megválasztásától. Már említettük, hogy bárhol fölvett, két egymásra merőleges sík képsíkrendszernek tekinthető. Egy ház ábrázolásánál természetes módon mégis vízszintesnek választjuk az első képsíkot, ha lehet a földfelszín vagy a padló magasságában. A függőleges második képsíkot is szokás valamelyik homlokzattal párhuzamosan választani, hogy legyenek közvetlenül leolvasható méretek (3. ábra).

Ha nem a méreteket akarjuk megmutatni, hanem az épület formáját, pl. egyszerre két homlokzatot, akkor a függőleges második képsíkot célszerű a homlokzattal nem párhuzamosan megválasztani.(Ilyenkor a kép szemléletesebb.)Azt az eljárást, amikor a tárgy térbeli helyzetét változatlanul hagyva körülötte a képsíkrendszer egyik vagy másik (esetleg mindkét) elemét változtatjuk, *képsíktranszformáció*nak nevezzük. Az új képsíkok választásának célja, hogy a feladat megoldásához kedvezőbb vetületi képeket kapjunk. - Matematikában a „transzformáció" szó két halmaz elemei közötti megfeleltetést jelent, így geometriai transzformáció minden leképezés. Az egybevágósági és hasonlósági transzformációk a középiskolából ismertek. Ábrázoló geometriában szokás a képsíktranszformáció helyett csak röviden *transzformáció* elnevezést használni, s az egyéb transzformációkat pontosabban megnevezni.

A transzformáció az új képsík célszerű megválasztásával kezdődik. Ez szükségképpen valamelyik meglevő képsíkkal képsíkrendszert alkot. (Ha nem, akkor egyetlen közbeiktatott új képsík segítségével ez elérhető.) Először berajzoljuk a régi és az új képsík metszésvonalát - ez az új tengely pl. $x_{1,4}$, amely kijelöli az új képsík helyét, s az új képsíkrendszert. Elkészítjük ebben a rendszerben is az alakzat új képét, s az új képsíkot rajzunk síkjába hajtjuk. A lehajtás iránya tetszőleges. Általában arra az oldalra hajtsuk, ahol kevésbé zavarja a meglevő ábrát.



21. ábra

A 21.ábrán két hasábból és egy gúlából álló test új képét szerkesztettük. Az első képsíkhoz csatoljuk az új, negyedik képsíkot úgy, hogy a testnek két oldalát láthassuk. Megállapodás, hogy *harmadik képsíknak* mindig a *profilsíkot* nevezzük. A tárgy térbeli helyzete változatlan, ezért első képe a K_1K_4 rendszerben is ugyanaz, mint a K_1K_2 rendszerben volt. Nem változott az M csúcspont első képsíktól való távolsága sem.Ezért az M pont negyedik képét megkaphatjuk, ha az M'-ből húzott $x_{1,4}$-re merőleges rendezővonalra felmérjük a pont második rendezőjének hosszát. A további pontok negyedik képét hasonló módon, az elmaradó (második) rendezők tengelytől mért megfelelő irányú fölmérésével kaphatjuk meg.

Tetszőleges alakzat *új képe* az előző képsíkrendszerbeli ábrázolásból a következőképpen szerkeszthető: Az új képsíkrendszer régebbi képsíkján (a *megmaradó képből*) *új rendezőket* állítunk (merőlegesen) az új tengelyre, majd ezekre *fölmérjük* az elmaradó képsíkról az egyes pontok *elmaradó rendezőinek* hosszát az új tengely megfelelő oldalára.

Előfordul, hogy egyetlen transzformációval nem érhető el, hogy a képsík kedvező állású legyen. Ilyenkor további transzformálás szükséges. Ez ugyanúgy történik, mint az előző, csak most az új kép veszi át a megmaradó kép szerepét, s ehhez szerkesztünk további alkalmas nézetet (21. ábra, negyedik és ötödik kép).

A test képét szemléletesebbé tehetjük a láthatósági viszonyok föltüntetésével. A látható éleket folytonos, a nem láthatókat szaggatott vonallal jelöljük. Természetesen a vetületi ábra széle mindig látható (folytonos vonal). A vetület belső szakaszainak láthatóságát szemlélet alapján is eldönthetjük. Úgy képzeljük, hogy a térbeli alakzat mindig a szemlélő és a képsík között, az első térnegyedben helyezkedik el. A vetületen azokat az éleket (lapokat) ábrázoljuk láthatónak, amelyek a képsíktól távolabb vannak, vagyis a szemlélő felőli oldalról látszanak.

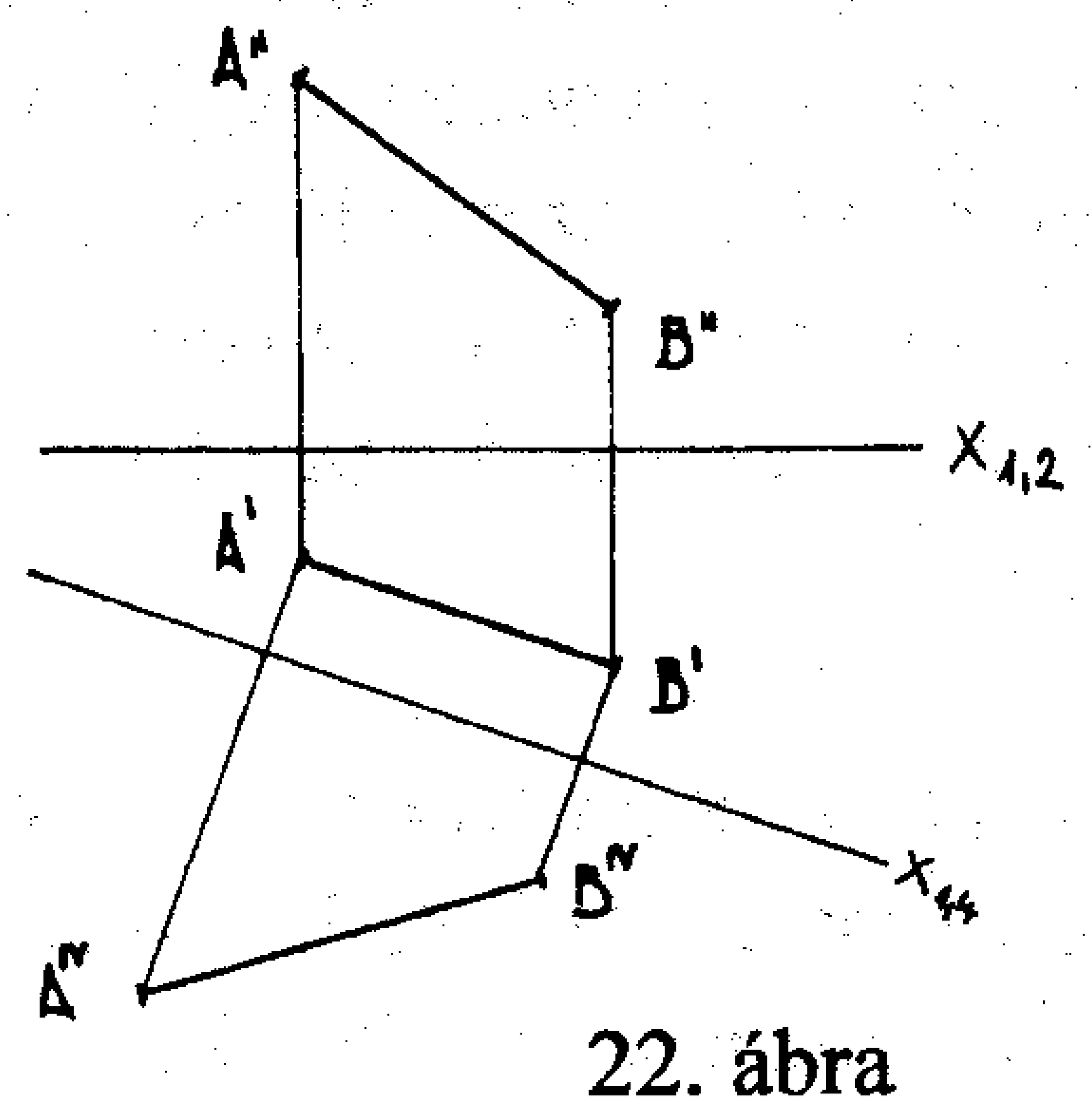
Ha nem tudjuk, vagy nem akarjuk a rekonstrukciót elvégezni, két-két kitérő helyzetű, de a képen metsződő szakasz térbeli helyzetének vizsgálatát kell elvégezni. A kitérő egyenesek láthatóságának vizsgálatából következik, hogy az egyik kép láthatósága csak a hozzá rendezett másik kép segítségével dönthető el. Ezért válasszunk ki az egyik képen két egymást metsző (belső) szakaszt (21.ábra ötödik kép 1 és 2 pontja)! Vizsgáljuk meg, hogy a metszéspontbeli vetítősugár negyedik képén elhelyezkedő fedőpontok közül melyik van távolabb a képsíktól. A távolabbi, 1-es pontra illeszkedő gúlaél a másik képen látható, míg a képsíkhoz közelebbi, 2-es pontra illeszkedő szakaszt szaggatott vonallal jelöljük. Elegendő mindegyik képen egy-egy él láthatóságát eldönteni, hiszen látható belső csúcspontból csak látható élek indulnak ki. Így a többi él láthatósága már egyszerűen adódik.

TÉRELEMEK TÁVOLSÁGÁNAK SZERKESZTÉSE

A térelemek közötti távolságok alkalmasan választott képsíkrendszerben valódi méretükben láthatóak. Képsíktranszformáció segítségével a kívánt helyzet mindig elérhető.

1. Két pont távolsága

A különleges helyzetű egyeneseknél láttuk, hogy képsíkkal párhuzamos egyenes esetén a vetületen a térbelivel megegyező, eredeti méretek látszódnak. Így a két pont távolságát első vagy második vetítősíkjukkal párhuzamos, új képsíkon szerkeszthetjük meg. A 22.ábrán $x_{1,4}$ párhuzamos A'B'-vel, vagyis az AB szakasz párhuzamos a negyedik képsíkkal. Az $A^{IV}B^{IV}$ a szakasz valódi hossza.

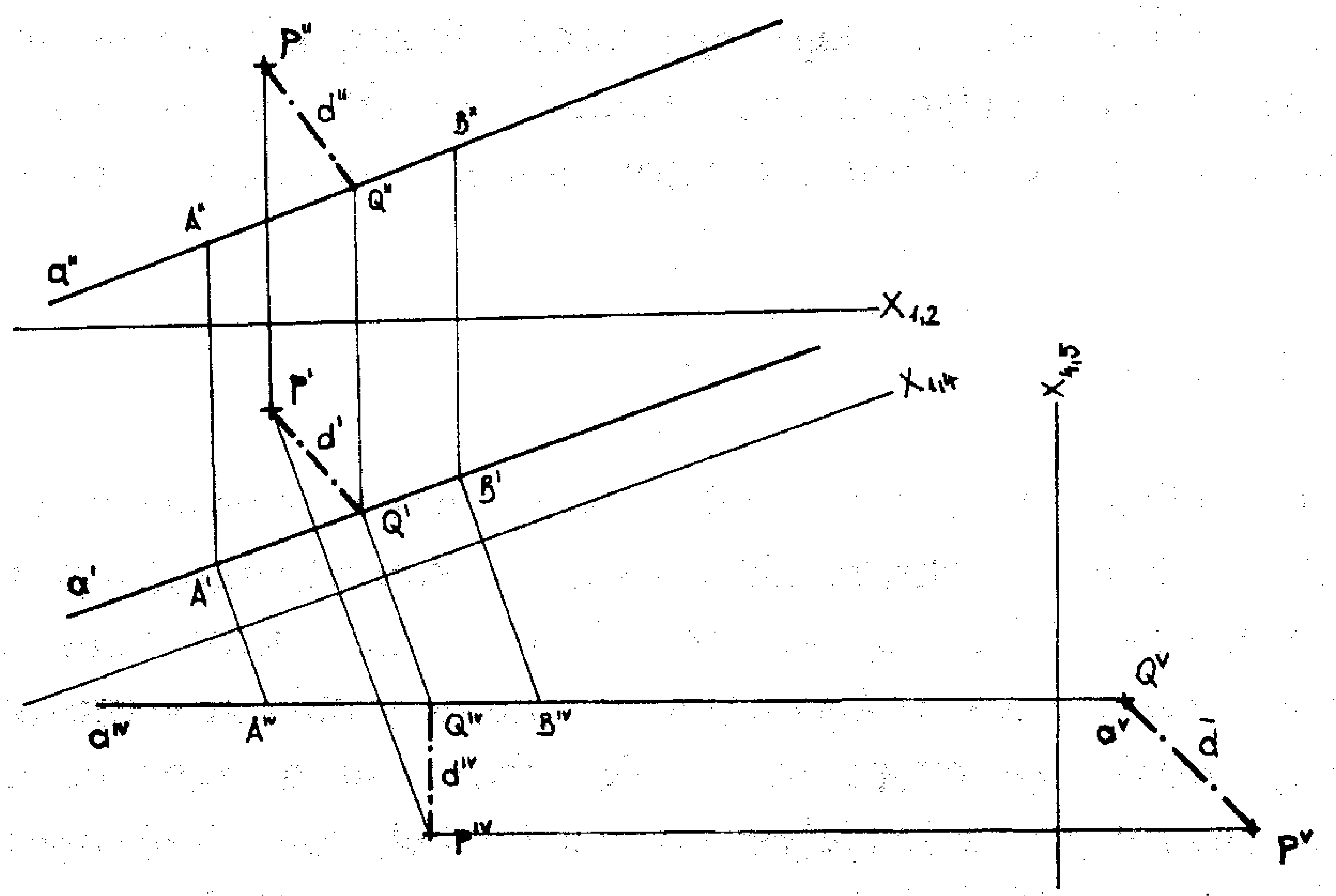


22. ábra

2. Pont és egyenes távolsága

Azon az új képsíkon, ahol az egyenes képe pontként jelenik meg, ott a pont és egyenes távolsága valódi nagyságban látszik.

A K_1K_2 képsíkrendszerben az általános helyzetű egyenesre merőleges sík nem alkot képsíkrendszert sem K_1-gyel, sem K_2-vel. Ezért a feladat egyetlen transzformációval nem szerkeszthető meg. Jelöljük K_5-tel az egyenesre merőleges síkot. Ezen az egyenes képe egy pont, vagyis az egyenes ötödik vetítősugár. A K_5-tel képsíkrendszert alkotó síkok mindegyike párhuzamos az egyenessel. Ezért az előző feladat alapján válasszuk negyedik képsíknak azt, amelyik K_1-gyel és K_5-tel is képsíkrendszer alkothat (23. ábra).



23. ábra

Adott két képével az **a** egyenes és a P pont. Első lépésben vegyünk fel az **a** egyenessel párhuzamos új képsíkot (**a'** párhuzamos $x_{1,4}$) Az **a** egyenes negyedik fővonal, így az $\mathbf{a}^{IV}$ -re merőlegesen fölvett új képsíkon ($x_{4,5}$ merőleges $\mathbf{a}^{IV}$) egy pontban látszik A P pont negyedik és ötödik képét is megszerkesztve ötödik képen az **a** egyenes és P pont távolsága valódi nagyságban látszik. Jelöljük Q-val az egyenesnek azt a pontját, amelyik legközelebb van P-hez. Q-t a P-ből állított merőleges metszi ki az **a** egyenes képeiből ($P^{IV}Q^{IV}$ párhuzamos $x_{4,5}$), Q' és Q" a rendezőkkel illeszthető az egyenes megfelelő képeire.

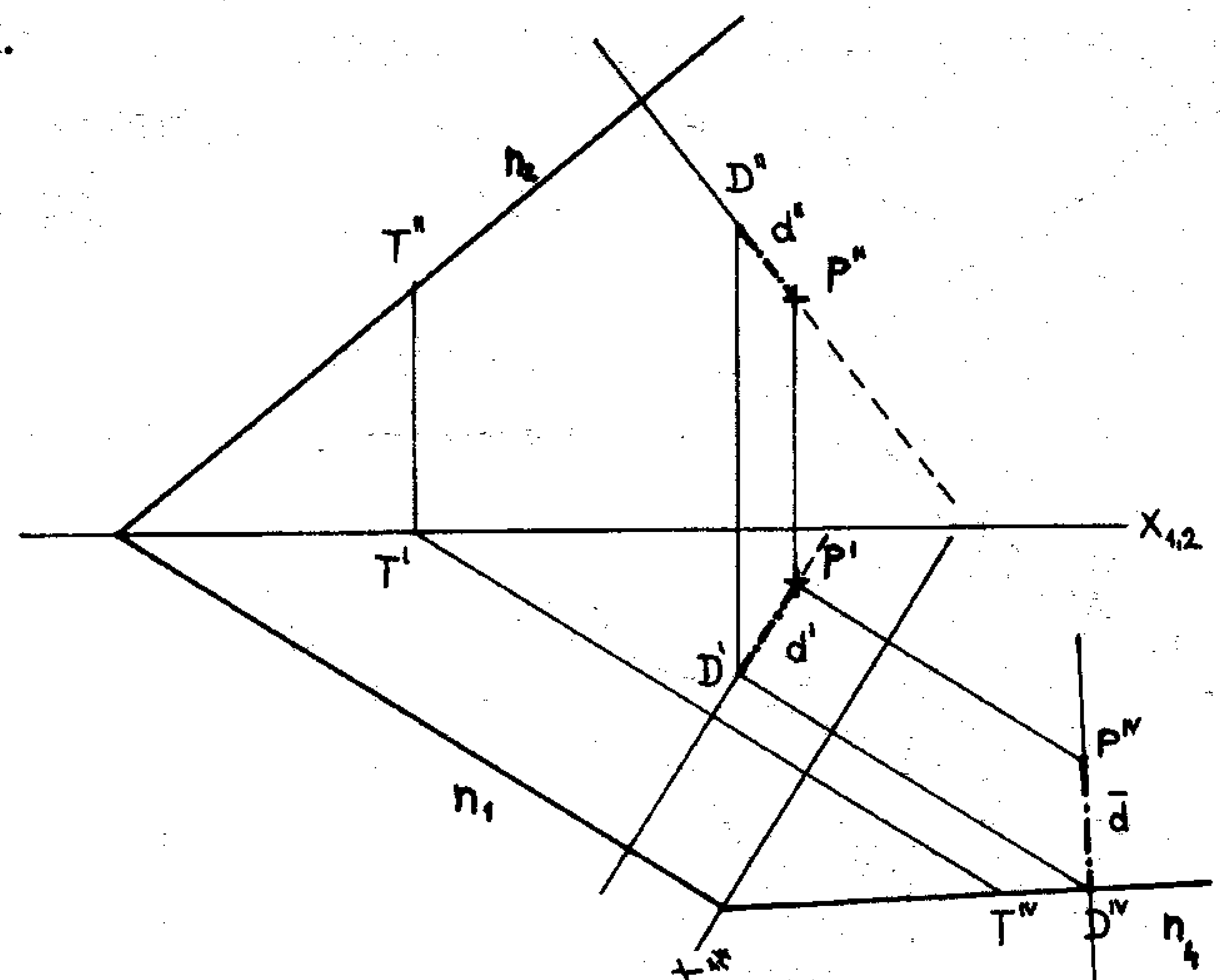
Pont és egyenes távolságát a pontból az egyenesre állított, azt merőlegesen metsző egyenes pont és egyenes közé eső szakaszának hosszával mérjük. Ha ezt a meghatározást próbálnánk szerkesztéssel követni, kétféle úton is eljuthatunk a megoldáshoz. Egyik eset: a merőlegest a pont és egyenes által meghatározott síkon kell megrajzolni, miután az általános helyzetű sík tartóelemeit vele párhuzamos új képsíkon ábrázoljuk. A másik lehetséges út: a P pontból az egyenesre állított merőleges sík és az **a** egyenes metszéseként megszerkesztjük Q-t és a két pont (P és Q) távolsága a megoldás. Az utóbbi két megoldás több ábrázoló geometriai ismeretet követel, mint az előző szerkesztés. Ebből is látható, hogy egy térbeli feladatot többféle mértani gondolatmenet szerint is helyesen megoldhatunk. A szerkesztés bonyolultsága nagymértékben függ a választott geometriai gondolkodásmódtól (megoldási modelltől).

3. Pont és sík távolsága

Amikor a síkot élben látjuk, a pontból a síkra bocsátott merőleges egyenes pont és sík közé eső szakaszának hossza (a keresett távolság) valódi nagyságában látszik. Olyan új képsíkot kell a K_1K_2 képsíkrendszerhez csatolni, amelyen az adott sík élben látszik (vetítő helyzetű). A vetítősíkokról tudjuk, hogy egyik nyomvonaluk a sík élben látszó képe, a másik nyomvonaluk merőleges a tengelyre. Általános helyzetű síkot ezért úgy transzformálhatunk vetítősíkká, hogy az új tengelyt valamelyik nyomvonalra merőlegesen vesszük fel (24. ábra).

A képsíkok szerepe szimmetrikus, a szerkesztést ugyanígy a második nyomvonalra merőleges transzformációval is elvégezhetnénk.

Nyomvonalaival adott a sík, valamint a P pont. Szerkesszük meg a távolságukat! Vegyük fel az első nyomvonalra merőlegesen $x_{1,4}$-et. (Ha nem nyomvonalakkal adtuk meg a síkot, akkor fővonalat szerkesztünk, majd azonosan folytatjuk.) A nyomvonal képe a rá merőleges síkon egyetlen pont. A síknak elég egyetlen további tetszőleges T pontját transzformálni. A sík élben látszó képe – negyedik nyomvonala: n_4 – az n_1 nyomvonal és a T negyedik képét köti össze. Transzformáljuk a P pontot is. A pont és a sík távolsága negyedik képen valódi nagyságban látszik.



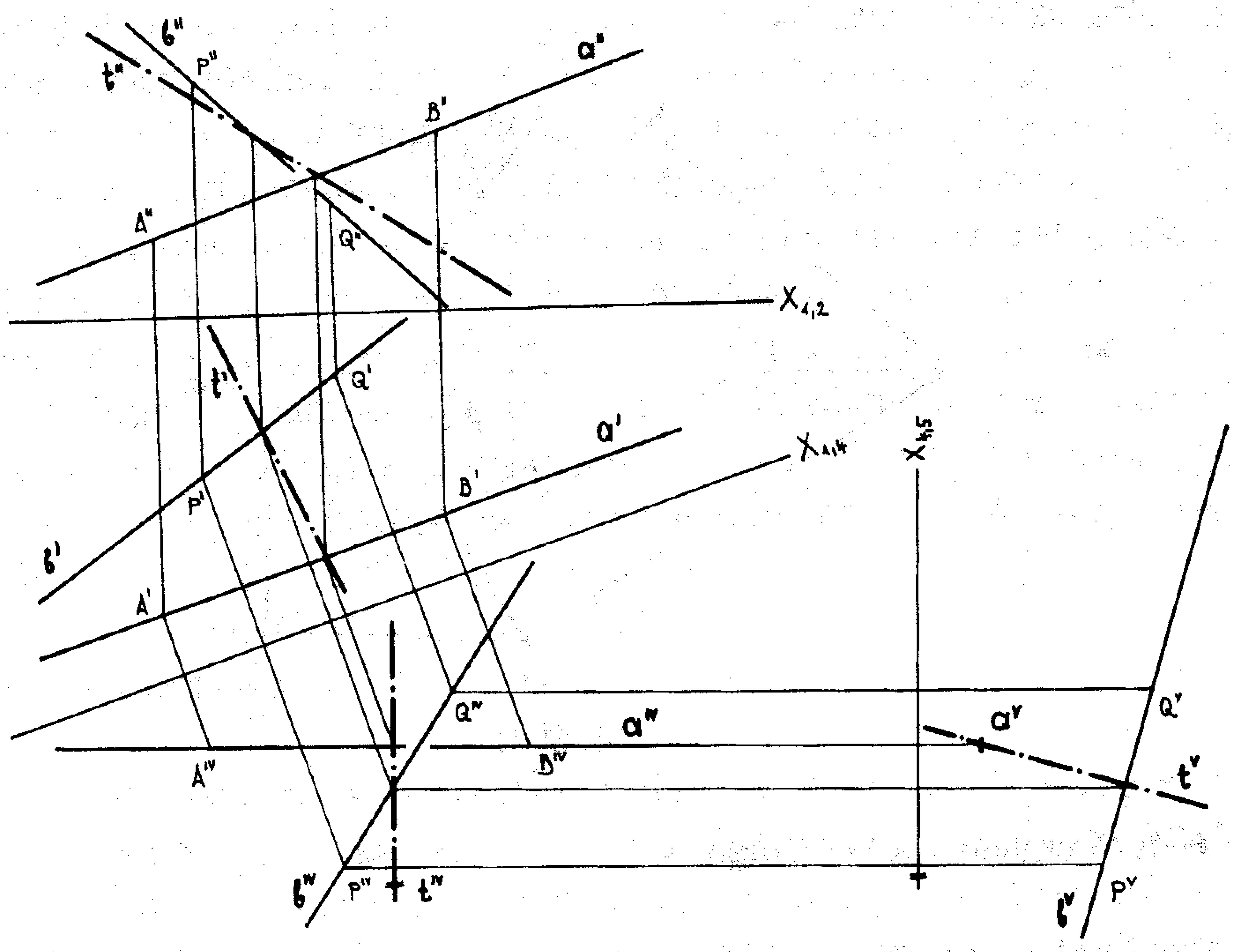
24. ábra

4. Kitérő egyenesek távolsága

Középiskolai tanulmányaikból ismert, hogy a kitérő egyenesek közötti legrövidebb (mindkét egyenesre merőleges) szakasz, a *normáltranszverzális* méri távolságukat. Ennek egyik legegyszerűbb szerkesztési módja, ha olyan új képsíkot választunk, amelyik az egyik egyenesre merőleges. Ezen a képen a keresett távolság leolvasható.

Szerkesszük meg az **a** és **b** kitérő egyenesek normáltranszerverzálisát (25. ábra)!

Először az **a** egyenest transzformáljuk ponttá (a pont és egyenes távolságának szerkesztésénél ismertetett módon), majd szerkesszük meg a **b** egyenes ötödik képét is, tetszőleges P és Q pontja segítségével. Mivel ötödik képen a két egyenes távolsága mérethű, a normáltranszverzális szakasza párhuzamos az ötödik képsíkkal. Negyedik képe $x_{4,5}$-tel párhuzamos és végpontjai illeszkednek az egyenesek képeire. Első és második képe a megfelelő rendezők berajzolásával szerkeszthető meg.



25. ábra

Minden távolságfeladat geometriailag ezekre az alapszerkesztésekre vezethető vissza

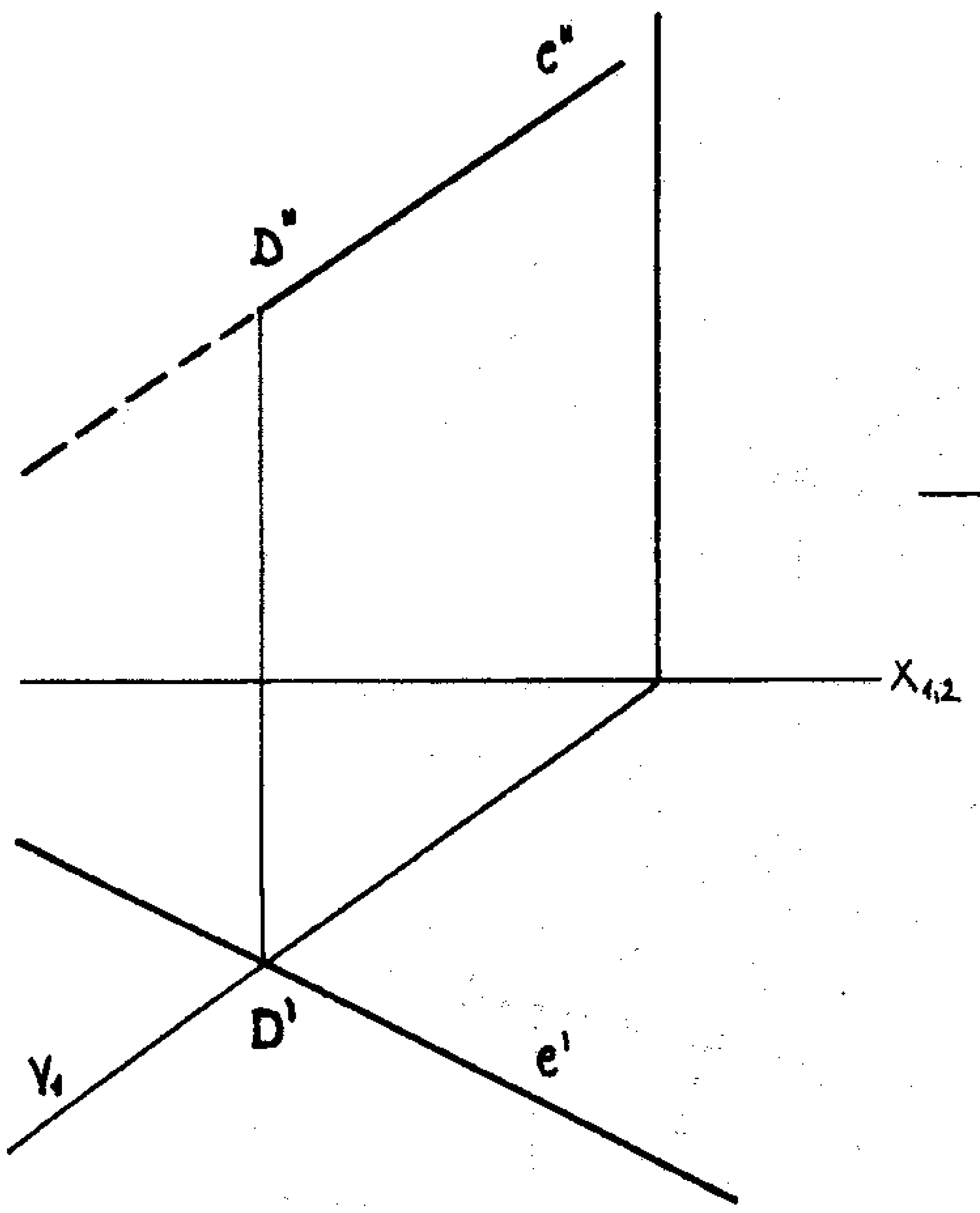
Feladat: Ábrázoljon tetszőleges, legalább ötoldalú, első képsíkon álló gúlát! Szerkessze meg csúcsainak távolságát az egyik oldallapsíkjától, vagy egy alapél és egy oldalél, esetleg a csúcspont és az alapélek távolságát!

METSZÉSI FELADATOK

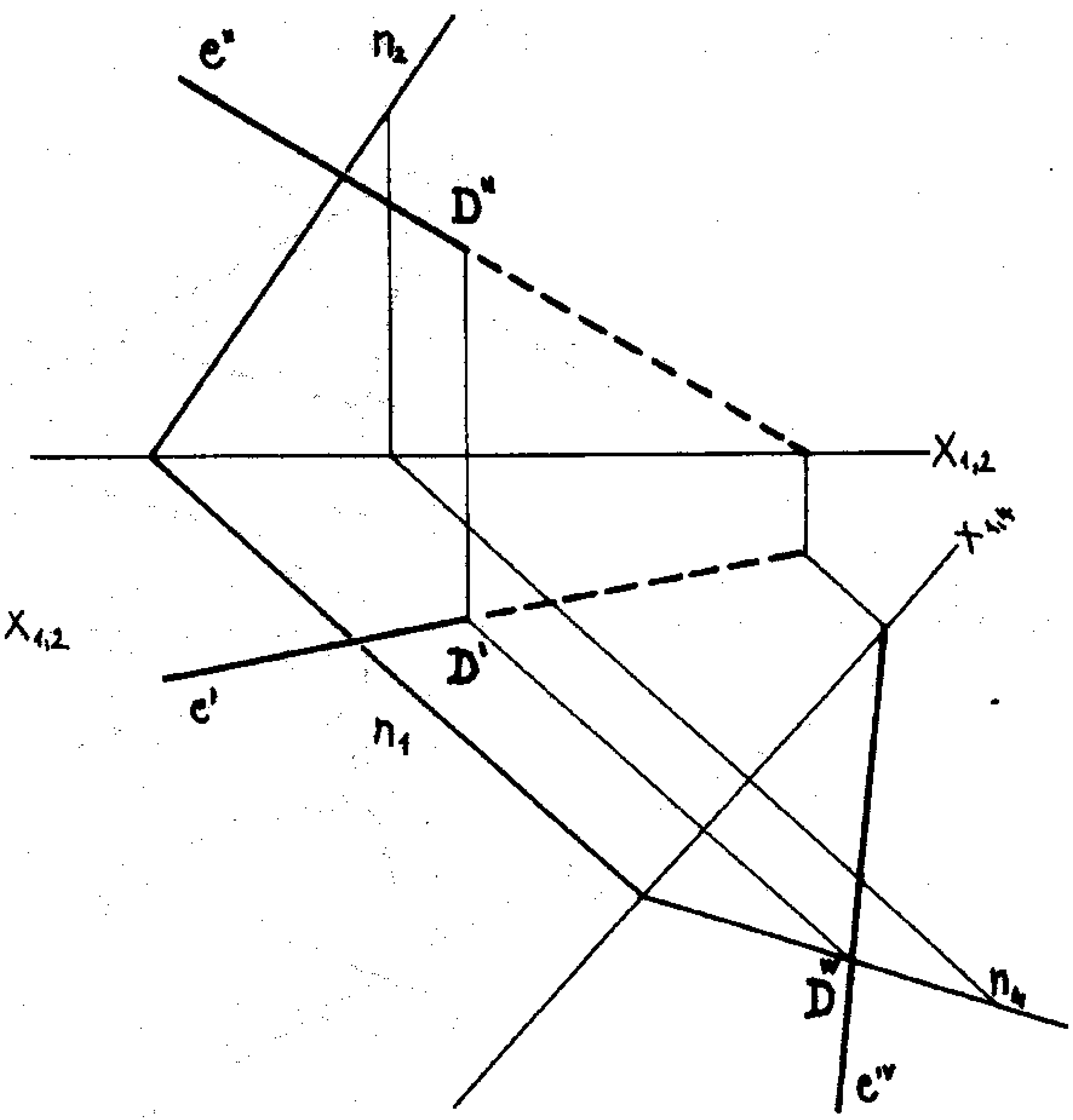
Sík és egyenes döféspontja

A feladat megoldása igen egyszerű, ha a sík vetítő helyzetű (26. ábra). Sík és egyenes döféspontja illeszkedik a síkra is és az egyenesre is. Ha a sík élben látszik, a döféspont egyik képe (D') közvetlenül kijelölhető. Második képe illeszkedik az egyenes második képére.

Általános helyzetű sík esetében a feladatot célszerűen választott új képsík segítségével visszavezetjük az előzőre.



26. ábra



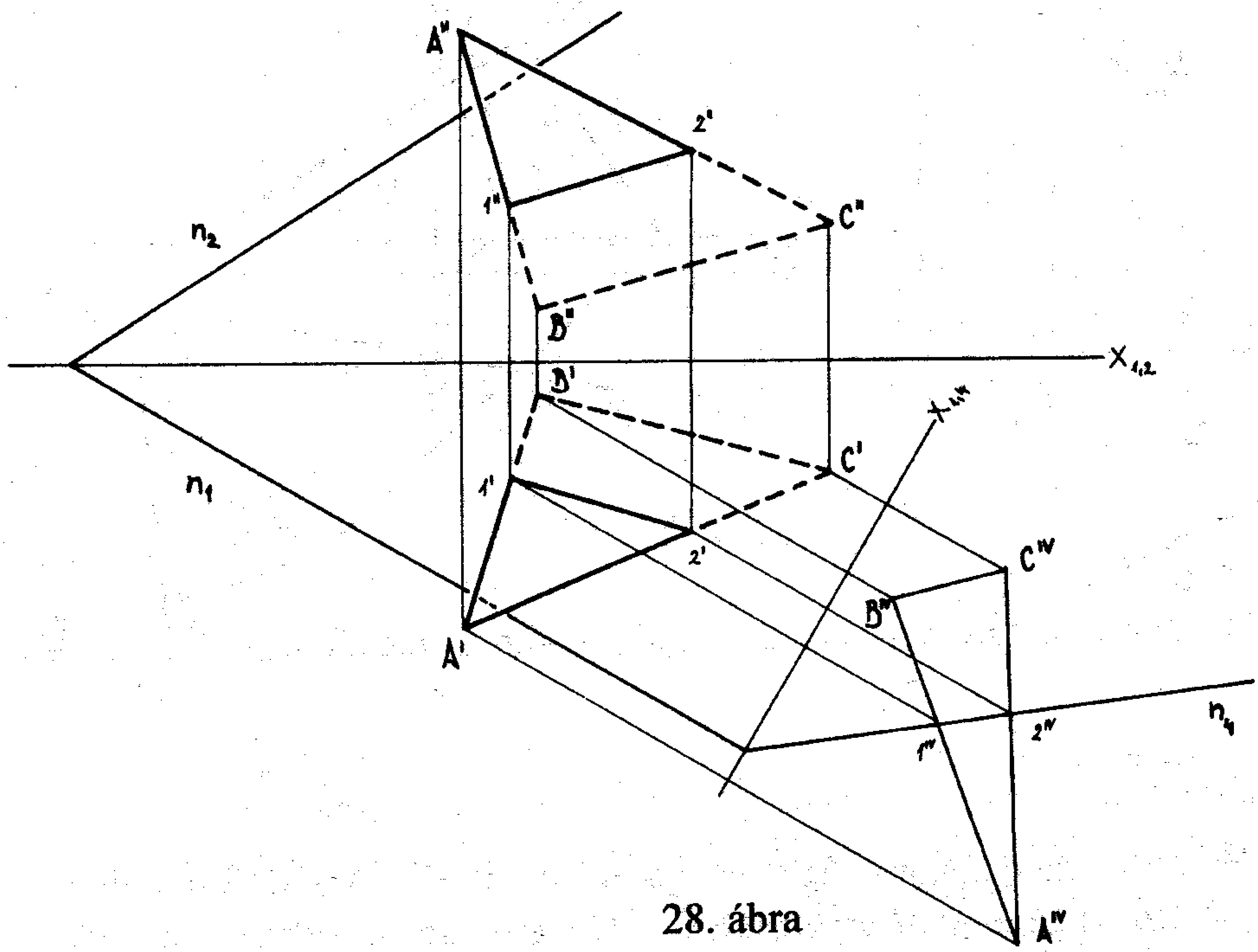
27. ábra

Szerkesszük meg nyomvonalaival adott sík és egyenes döféspontját! Transzformáljuk a síkot vetítősíkká! ($x_{1,4}$ merőleges n_1-re). A negyedik képen látszó döféspontot rendezővel visszük vissza az első és második képre (27. ábra).

Két sík metszésvonalának szerkesztése

A metszésvonal a két sík közös egyenese, amely mindkét síkra illeszkedik. Egyik sík bármely egyenese csak a metszésvonalon metszheti a másik síkot. Ezért elegendő a síkon kiválasztani egy egyenest és megszerkeszteni a másik síkkal való döféspontját. Bármelyik két döféspont már egyértelműen meghatározza a metszésvonal egyenesét. Ellenőrzésül szerkeszthetünk három döféspontot, amelyeknek egy egyenesre kell esniük. Másik ellenőrzési mód: a síkbeli egyenesek metszik a metszésvonalat, ezért a megfelelő képeik metszéspontjai egy rendezőre esnek.

Adott az egyik sík nyomvonalaival, a másik háromszögével. Szerkesszük meg a metszésvonalukat! (28. ábra)

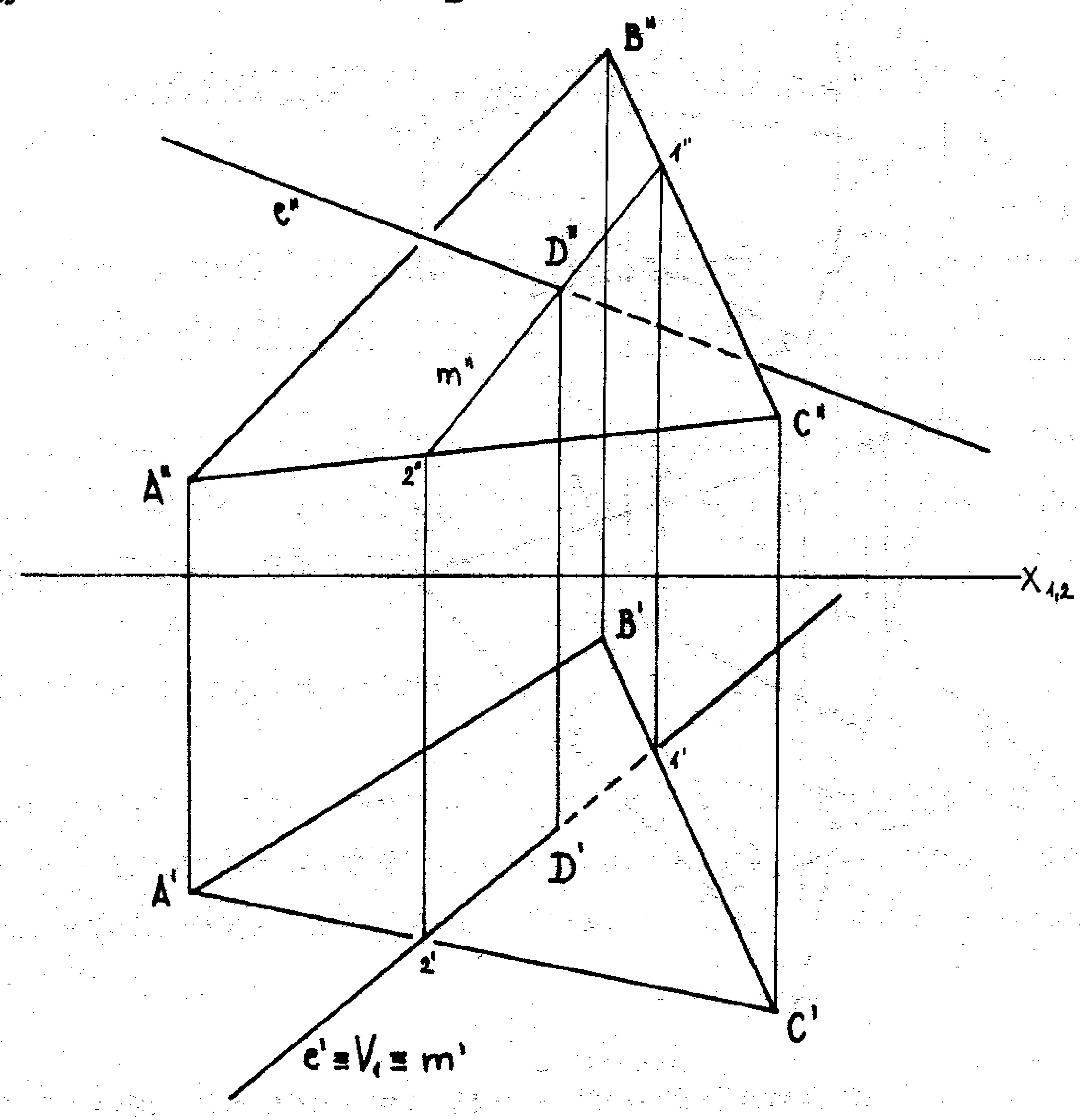


28. ábra

Transzformáljuk a nyomvonalaival adott síkot vetítősíkká. Az AB és AC egyenesek döféspontjára illeszkedik a metszésvonal.

Végezzük el a metszési alapszerkesztéseket *képsíktranszformáció nélkül*!

Adjuk meg a síkot három pontjával és az egyenest! Tekintsük az egyenes első vetítősíkját! Ez a vetítősík metszi a háromszög síkját egy **m** egyenesben, amely első képen fedésben van **e**-vel. Az **e** egyenes és a háromszög síkjára illeszkedő **m** fedőegyenese metszik egymást, hiszen közös vetítősíkon vannak. Ez a metszéspont a második képen látszik. Ebben a pontban döfi az egyenes a síkot (29. ábra). Megállapíthatjuk az egyenes és a sík láthatóságát is.

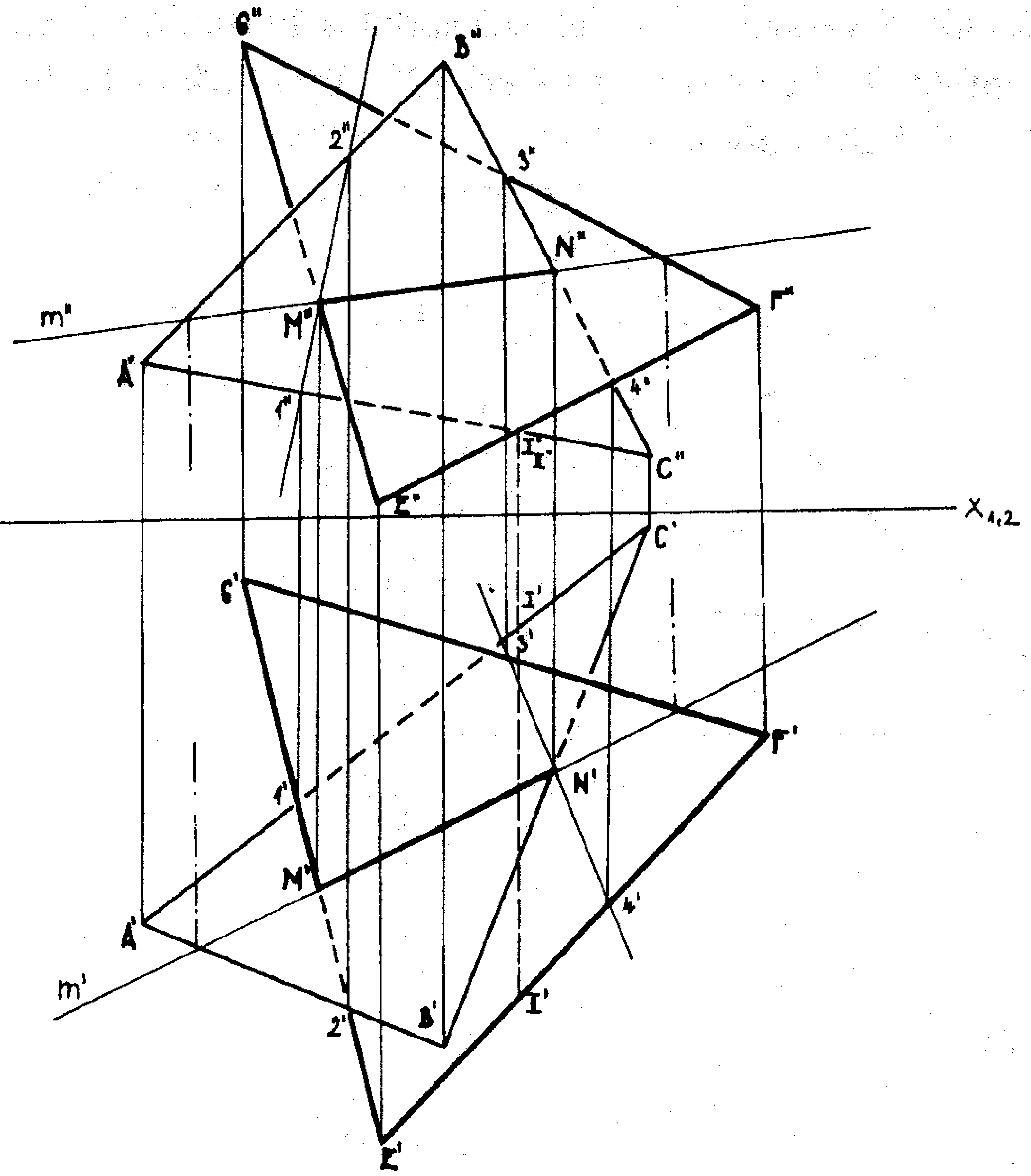


29. ábra

Két sík metszésvonalának szerkesztését az előbbi döféspontszerkesztés ismételt alkalmazásával oldhatjuk meg.

Adott három-három pontjával az ABC feszített és a EFG dőlt állású sík. Szerkesszük meg a metszésüket (30. ábra)!

Illesszünk az EG oldalra első vetítősíkot és szerkesszük meg döféspontját az ABC síkkal! (M) A másik segédsíknak a BC egyenes második vetítősíkját választottuk. A BC egyenes N pontban metszi az EFG síkot. A két sík metszésvonala illeszkedik az M és N pontokra.



30. ábra

Síkidomok összemetsződésénél külön figyelmet érdemel a láthatóság megállapítása. A képeket határoló sokszögvonal (a kép széle) mindig látszódik. A metszésvonal is mindig látható, de a véges síkidomok miatt csak azt a szakaszát jelöljük, amely mindkét síkidom belsejében van. A metszésvonal mentén változnak meg a síkidomok láthatósági viszonyai.

A második kép láthatóságát az első kép segítségével állapíthatjuk meg. Nézzük az EF és AC egyenesek látszólagos metszését a második képen (I és II). Az egyenesek második vetítősíkjainak metszésvonala rendező irányú és kijelöli az I és II pontok első képét. Mivel a II pont van távolabb a második képsíktól, így második képen az EF egyenesre illeszkedő II pont látszik. Ezzel a második kép láthatósága egyértelműen meghatározott. Az első kép láthatóságát az EG és AB egyenesek fedőpontjából határozhatjuk meg.

METSZÉSI FELADATOK ALKALMAZÁSAI

Az ábrázoló geometriai feladatok megoldásánál leggyakrabban az illeszkedési és metszési feladatokat vagy ezek kombinációit alkalmazzuk.

Kitérő egyenesek előírt feltételek szerinti összekötései, a transzverzálisok, vagy az árnyék szerkesztése sem kíván több geometriai és szerkesztéstechnikai előismeretet.

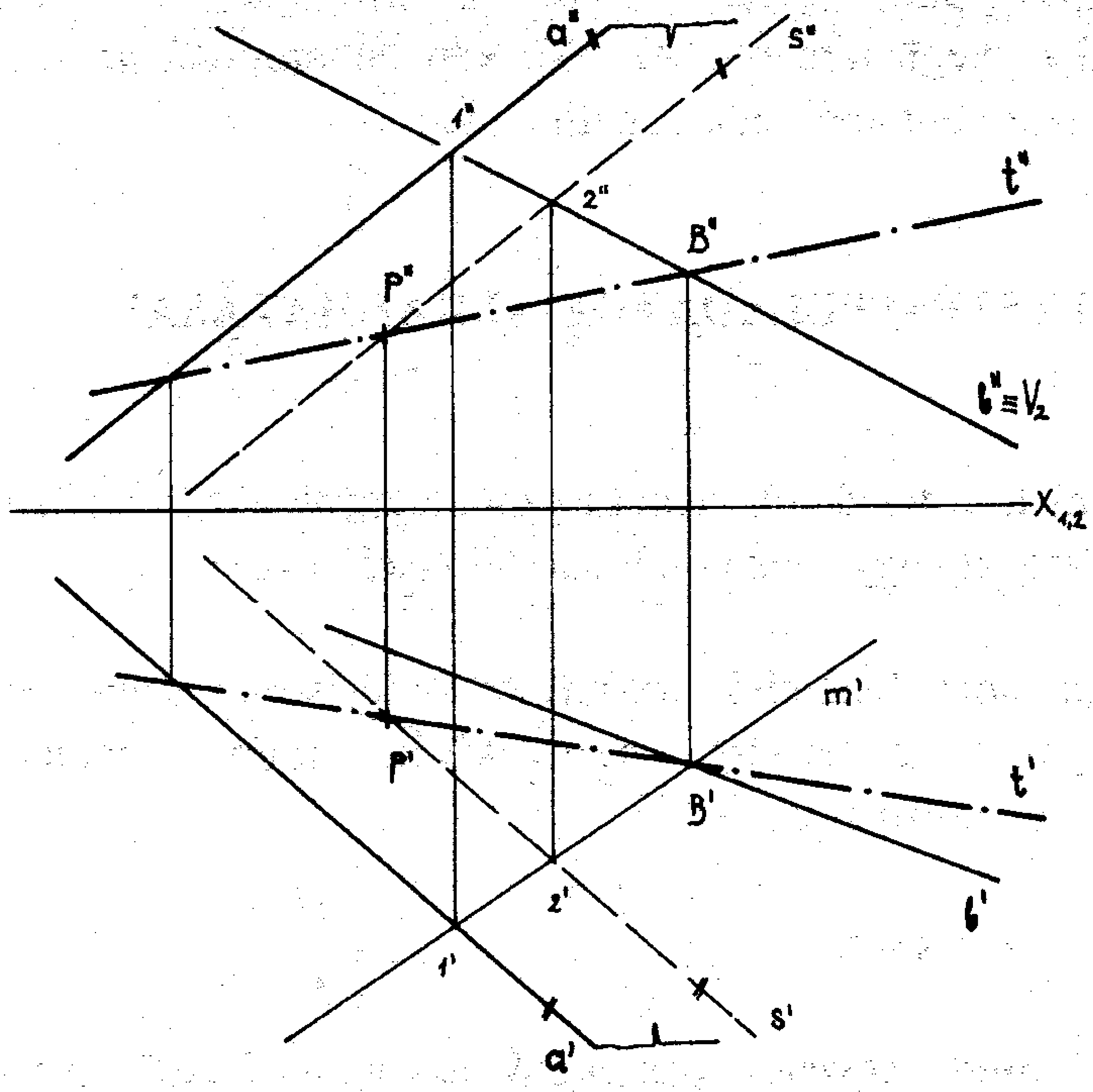
Transzverzálisok szerkesztése

Két vagy több kitérő egyenes összekötő egyenesére (transzverzálisára) különböző geometriai feltételeket szabhatunk. A gyakorlati életben előforduló és a geometriailag lehetséges esetek közül csak néhány alaptípust szerkesztünk meg.

1. Adott ponton átmenő transzverzális szerkesztése.

Szerkesszük meg az **a** és **b** kitérő egyenesek P ponton átmenő transzverzálisát!
A keresett transzverzális illeszkedik P-re, és metszi az **a** illetve **b** egyenest. Ezért benne van a [P, **a**] és [P, **b**] síkokban. A síkok metszésvonala a keresett transzverzális.

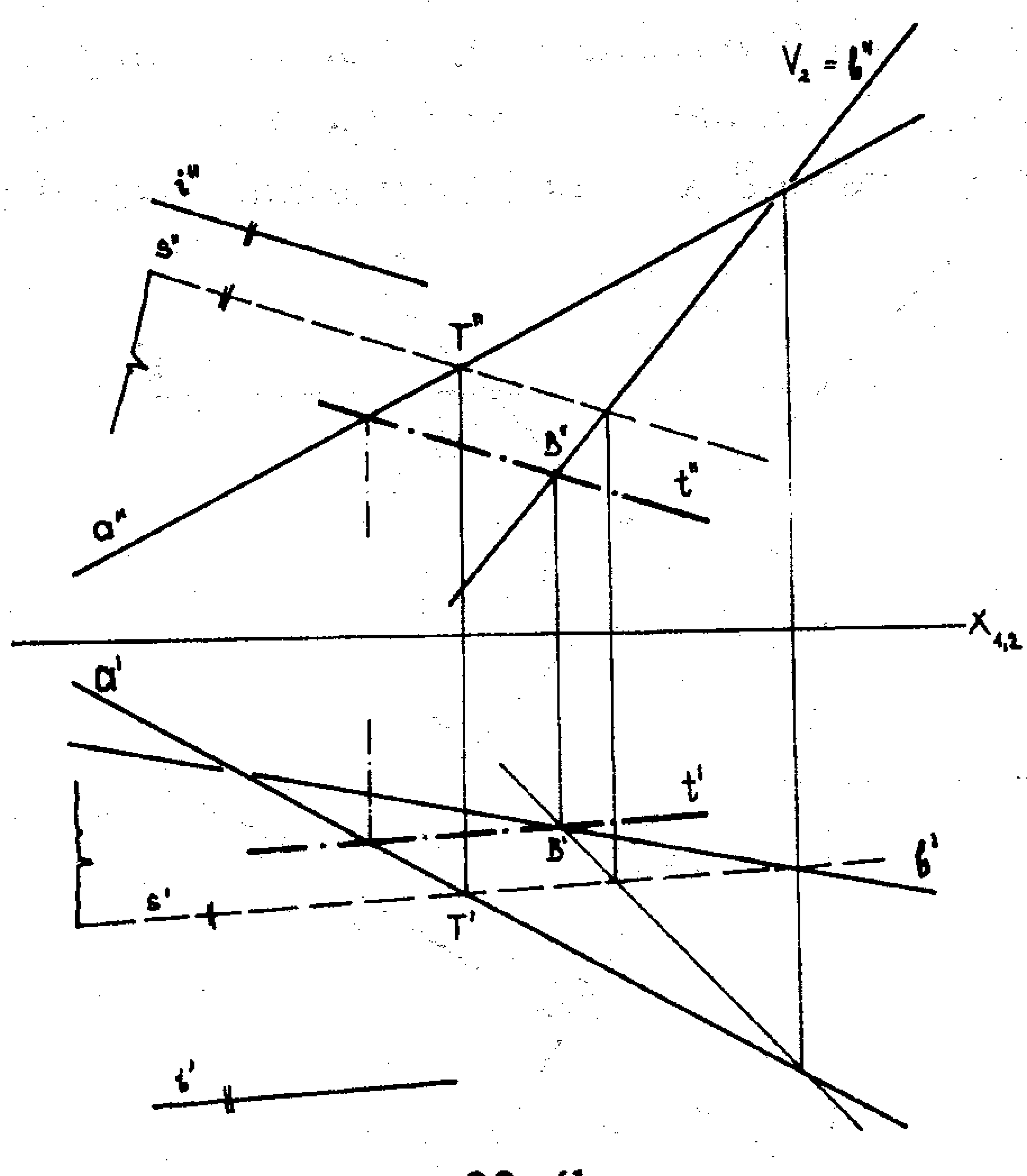
A metszésvonal illeszkedik P-re, így elegendő egyetlen további pontját megszerkeszteni. A **b** egyenes metszi a P pont és az **a** egyenes síkját a B pontban. A BP egyenes a transzverzális. (Ezért a [P, **b**] síkot nem is ábrázoltuk.)



31. ábra

2. Adott irányú transzverzális szerkesztése

Szerkesszük meg az **a** és **b** egyenesek adott **i** iránnyal párhuzamos transzverzálisát! A feladat azonos az előzővel, csak itt az adott pont az **i** egyenes végtelen távoli pontja. Az egyenesekre az iránnyal párhuzamos síkokat illesztünk. (Az egyenes tetszőleges pontján át húzunk az iránnyal párhuzamos egyenest). A két sík metszésvonala az adott iránnyal párhuzamos transzverzális (32. ábra).Itt is elegendő a keresett transzverzális egyetlen B pontját szerkeszteni, majd erre az iránnyal párhuzamos egyenest illeszteni.



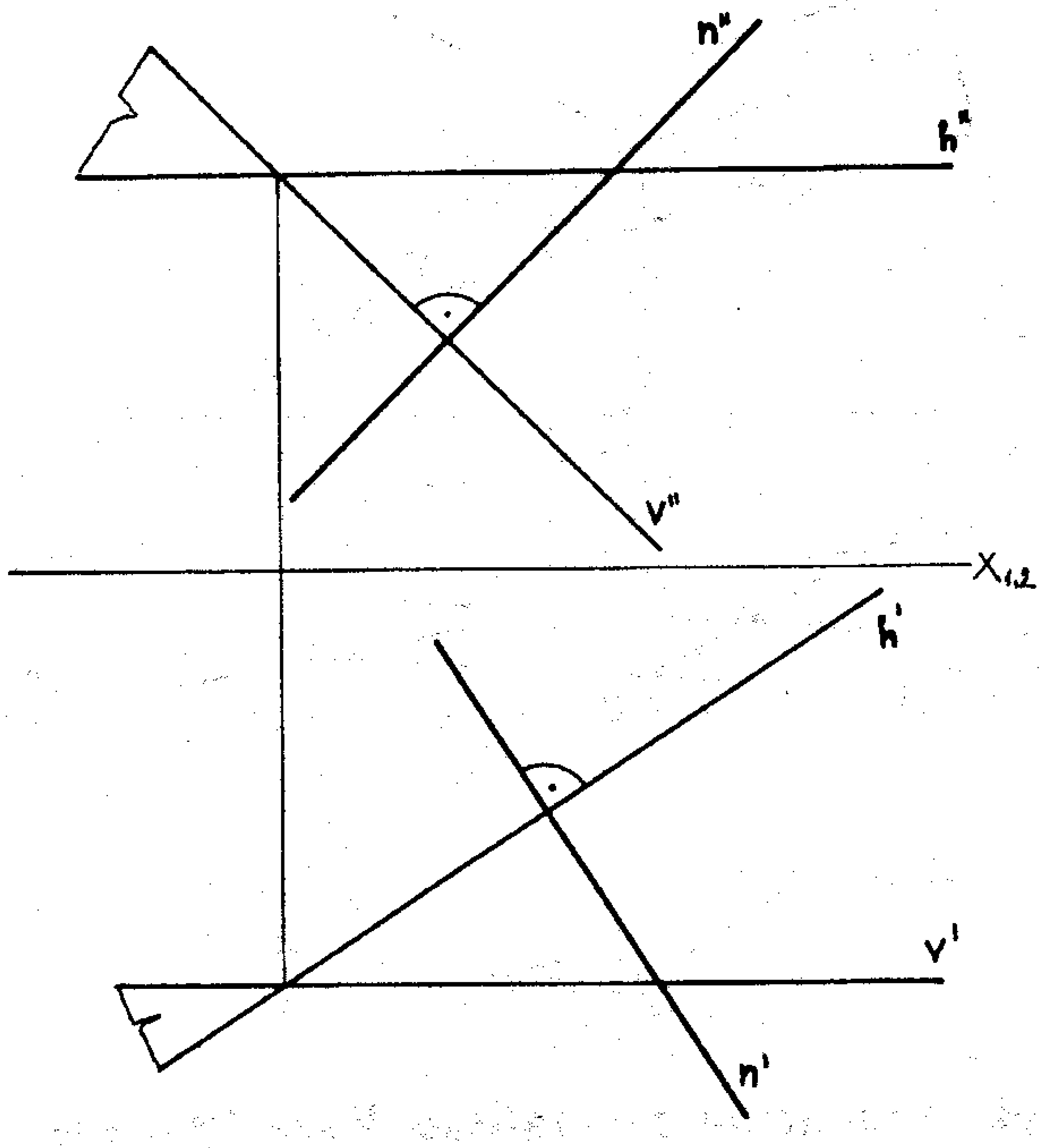
32. ábra

3. Kitérő egyenesek normáltranszverzálisának szerkesztése

A feladatnak egy lehetséges szerkesztési módját már ismertettük.

Ha a normáltranszverzális irányát megszerkesztjük, a feladat további része az előző, adott irányú transzverzális szerkesztése szerint megoldható.

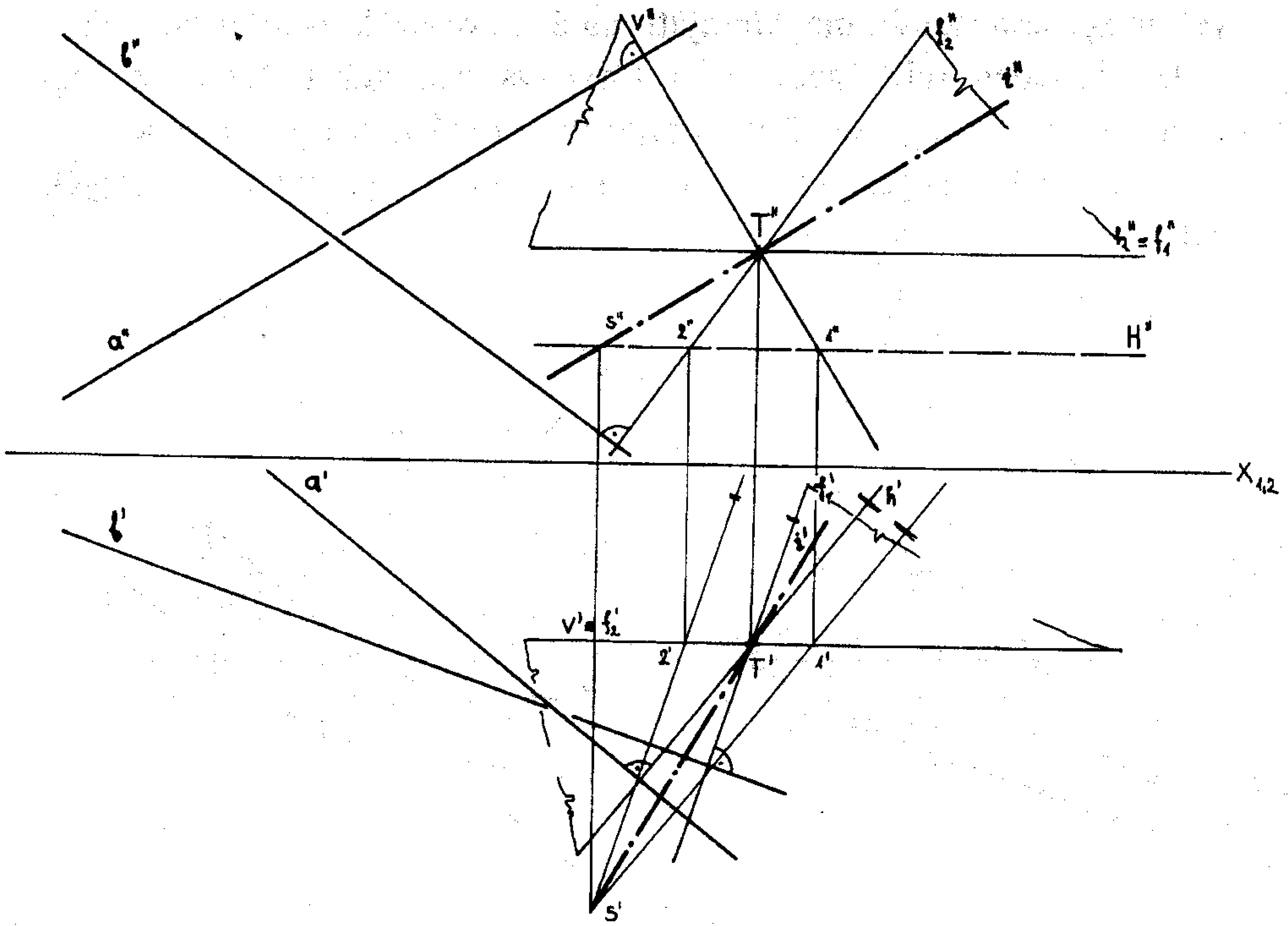
Tetszőleges egyenesre adott ponton át végtelen sok merőleges egyenes állítható – ezek a merőlegesek a pontra illeszkedő és az egyenesre merőleges síkon helyezkednek el. Az egyenes a sík egyik normálisának tekinthető. Speciális helyzetben már ábrázoltunk egyenesre (fővonalra) merőleges síkot. Vizsgáljuk meg általános esetben is az egymásra merőleges sík és egyenes vetületeiben felismerhető törvényszerűségeket. Tudjuk, hogy a derékszög képe is derékszög, ha az egyik szögszár valamelyik képsíkkal párhuzamos helyzetű (fővonal). Sík és egyenes akkor merőleges egymásra, ha az egyenes a síknak két, egymással nem párhuzamos egyenesére merőleges. Válasszuk a sík két nyomvonalát vagy fővonalát, mert ekkor a merőlegesség a képeken is megjelenik (33. ábra). A normális első képe merőleges a sík első fővonalára (ennek első képére), a második képe pedig a második fővonalára.



33. ábra

Ezek ismeretében szerkesszük meg az **a** és **b** kitérő egyenesek normáltranszverzálisának irányát!

Ábrázoljuk fővonalaival azt a két síkot, melynek az adott egyenesek a normálisai! [**h**, **v**] legyen merőleges **a**-ra, [$\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$] pedig **b**-re (34. ábra). A két sík **m** metszésvonala a keresett irány (**m**$\perp$**a** és **m**$\perp$**b**). A szerkesztést egyszerűsíti, ha a síkokat a tér tetszőleges T pontjára illesztjük. A metszésvonal további (S) pontját a **H** fősík segítségével szerkesztjük. A normáltranszverzális további szerkesztését az Olvasóra bízzuk.



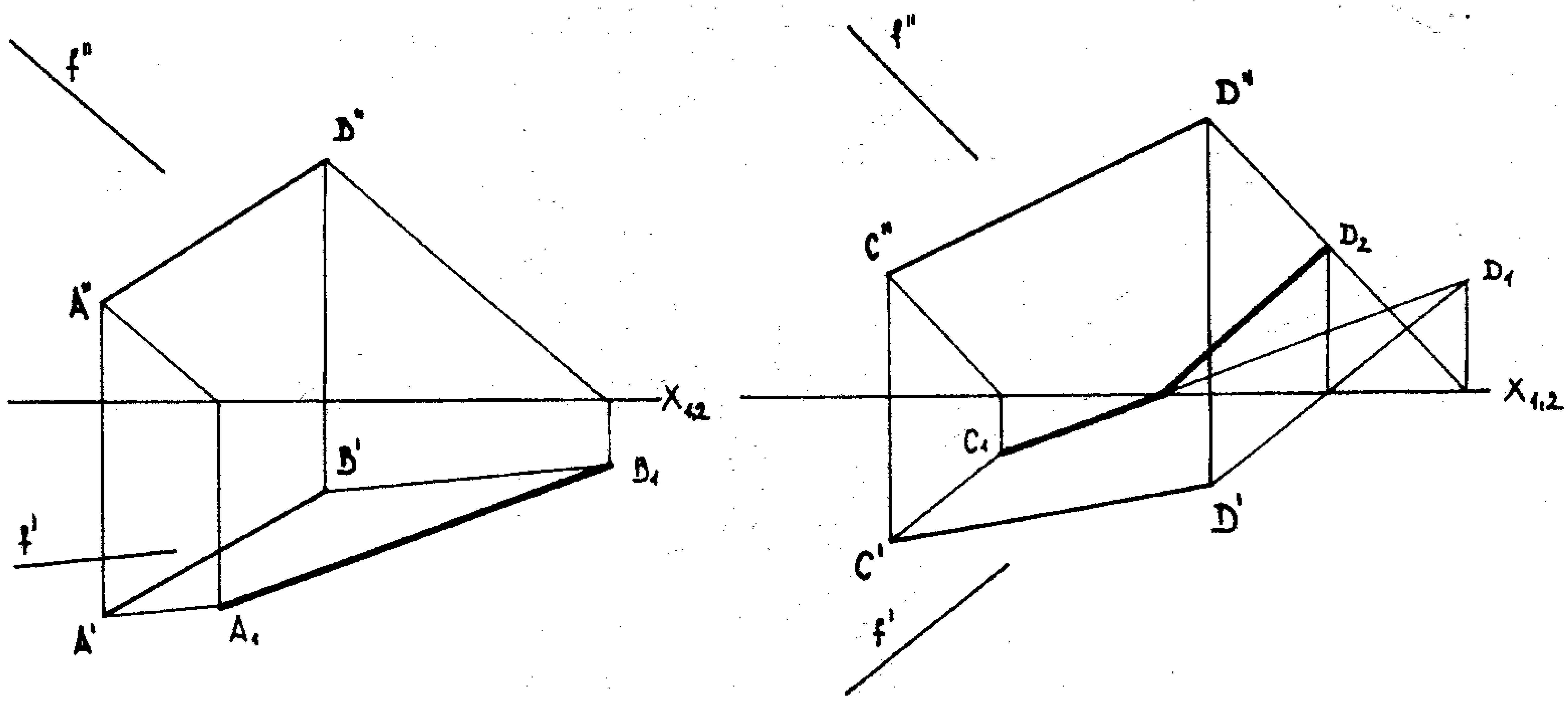
34. ábra

Árnyékszerkesztés

Az építészeti ábrázolásban különleges szerepet játszik az árnyék. Akár pontszerű fényforrást (egy lámpa) tételezünk fel, akár párhuzamos megvilágítást (napsugár), az árnyék kihangsúlyozza a térbeli részleteket, plasztikussá teszi a homlokzati képet. A tervezés során például szem előtt kell tartani a szomszéd épületek beárnyékolhatóságára vonatkozó előírásokat is. A kerttervezőnek is figyelembe kell vennie a növények telepítésénél az árnyékviszonyokat.

Geometriai szempontból *az árnyék fénysugár irányú vetülete* a tárgynak. Az árnyékfelfogó sík gyakran megegyezik a képsíkokkal vagy velük párhuzamos. (Épület esetében földre illetve homlokzatokra vetett árnyék.)

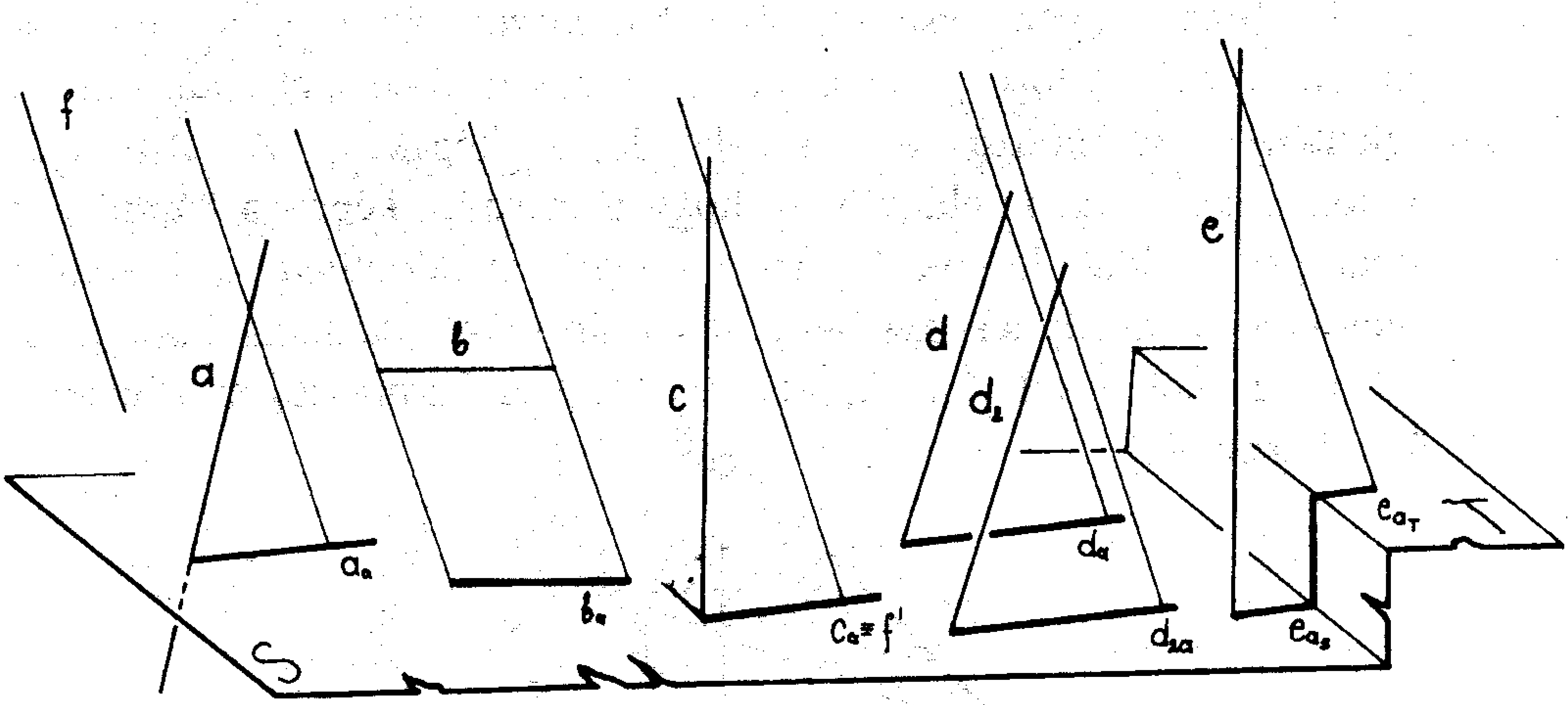
Az árnyék megszerkesztését megkönnyíti, ha észrevesszük és kihasználjuk az árnyék létrejöttében rejlő geometriai törvényszerűségeket. Szakasz vagy egyenes árnyékához elegendő két pontjának árnyékát megszerkeszteni. A pontokra illesztett fénysugár első nyompontja az első képsíkra vetett árnyék. (35. ábra)



35. ábra

Az AB szakasz első képsíkra vetett árnyéka teljes egészében a második képsík előtt jön létre, míg a CD szakasz D pontja a második képsík mögé vetné első árnyékát. A D pontra illesztett fénysugár előbb döfi a második képsíkot, mint az elsőt, vagyis a szakasz D végpontjának árnyéka a második képsíkra esik (D_2). Az árnyék első képsíkra eső darabja az $x_{1,2}$ tengely előtt látszik, majd a tengelyen levő pontban (a két árnyékfelfogó sík metszésvonalán) megtörve a második képsíkon folytatódik.

Egyenes szakaszokkal határolt alakzatok árnyékát elég a szakaszok végpontjainak árnyékából szerkeszteni. További egyszerűsítést jelent, ha figyelembe vesszük az egyenes és az árnyékfelfogó sík egymáshoz viszonyított helyzetét (36. ábra).

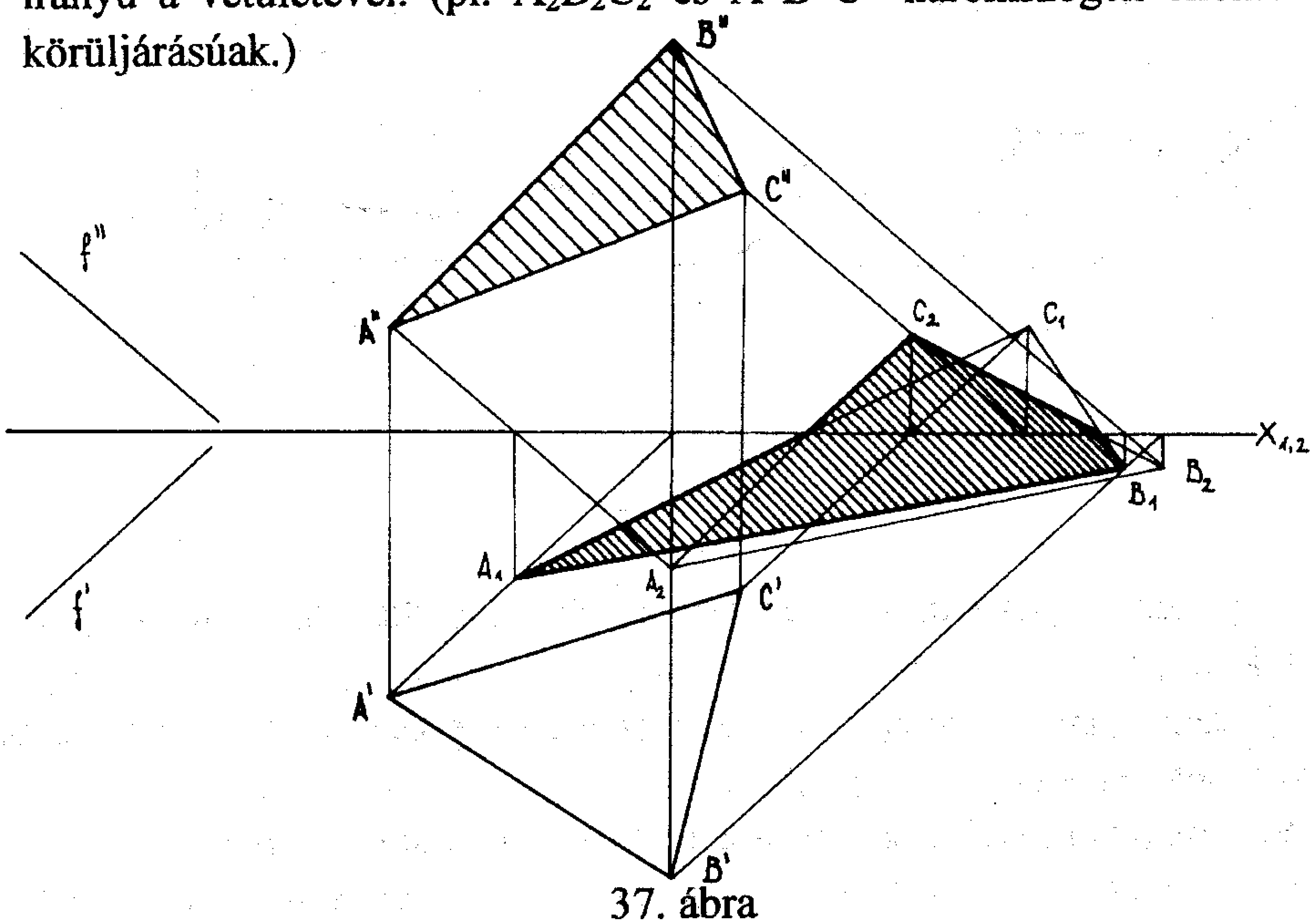


36. ábra

1. Egyenes árnyéka mindig az árnyékfelfogó síkkal való metszéspontjából indul.
2. Ha az egyenes párhuzamos az árnyékfelfogó síkkal, az árnyék párhuzamos magával az egyenessel.
3. Vetítősugár árnyéka egybeesik a fénysugár megfelelő képével.
4. Párhuzamos egyenesek ugyanarra a síkra párhuzamos árnyékot vetnek.
5. Egy egyenes párhuzamos síkokra vetett árnyékai egymással párhuzamosak.

Síkidomok és testek esetében nemcsak a földre, hanem az önmagára vetett árnyékot is vizsgálni kell. Síkidomnak a fényforrás felé eső oldala világos, a másik önárnyékos. A vetületeken is megkülönböztetjük a két árnyékot: az önárnyékot világosabbra festjük vagy ritkábban sraffozzuk, mint a vetett árnyékot.

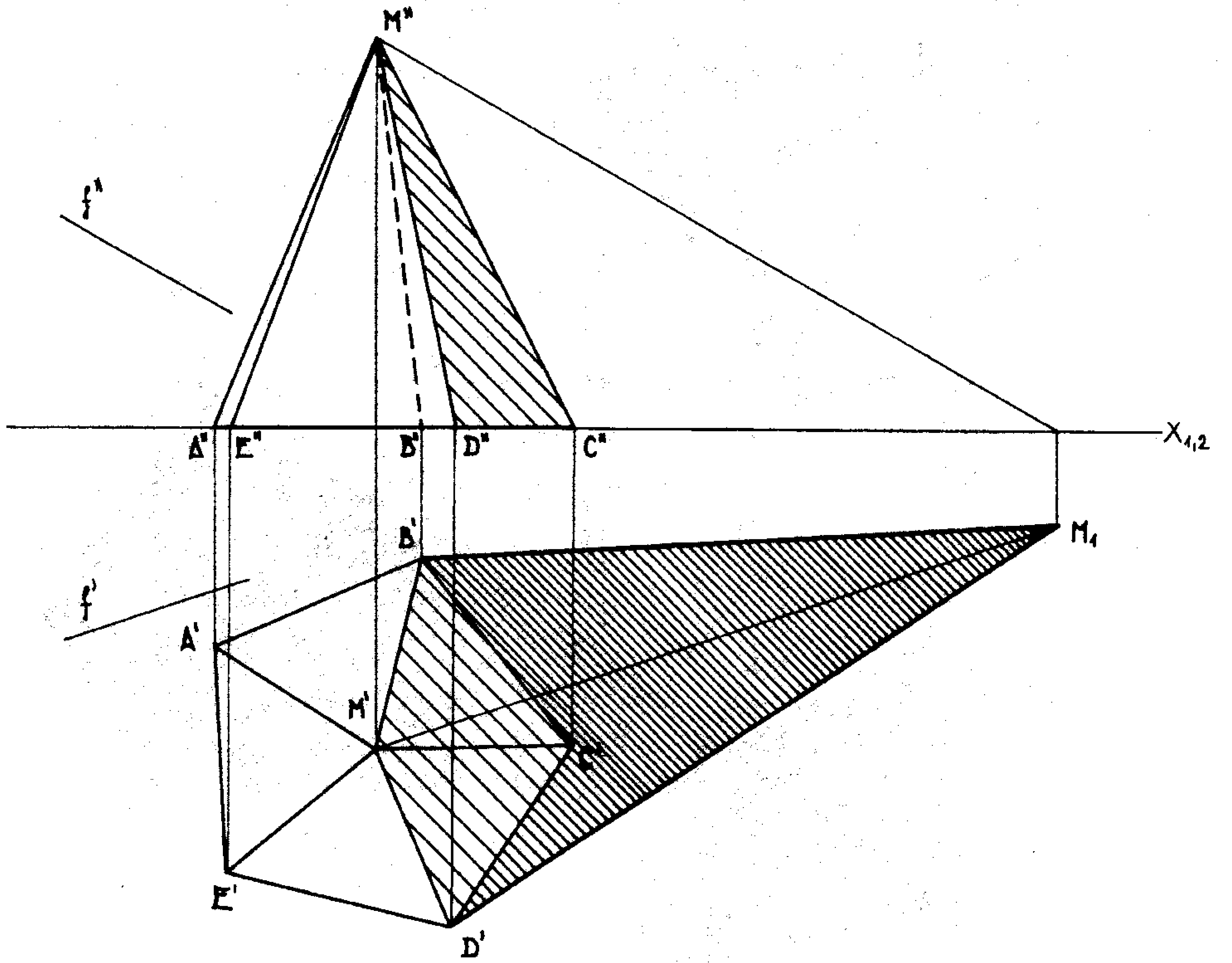
A 37.ábrán látható feszített síkú háromszög árnyéka a képsíkok metszésvonalán törik. Mivel a háromszög képeinek körüljárása ellentétes, különböző oldalait látjuk a képeken. A fénysugár rekonstrukciójával is eldönthető, hogy a második képen a háromszög önárnyékos oldala látszik. Ugyanez a képről is eldönthető: az a vetület önárnyékos, amelynek képsíkra vetett árnyéka ellentétes körüljárási irányú a vetületével. (pl. $A_2B_2C_2$ és A"B"C" háromszögek ellentétes körüljárásúak.)



37. ábra

Síklapú testeknek vannak megvilágított és önárnyékos lapjai. (A fénysugárral párhuzamos lapokról azt mondjuk, hogy *súrolt fényben* vannak és *önárnyékos*nak jelöljük.) Az önárnyékos és világos lapokat elválasztó éleket *önárnyékhatár*nak nevezzük. Ez a felületen elhelyezkedő zárt törött vonal, melynek vetett árnyéka a test vetett árnyékának határa (széle). Az önárnyékhatár és a vetett árnyék határa között a fénysugár kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít, ezért egyik meghatározásából következtethetünk a másikra. (Szögletes testeknél egyszerűbb a vetett árnyékból visszafelé következtetni, míg például gömb esetében az önárnyékhatár megállapítása a kézenfekvő.)

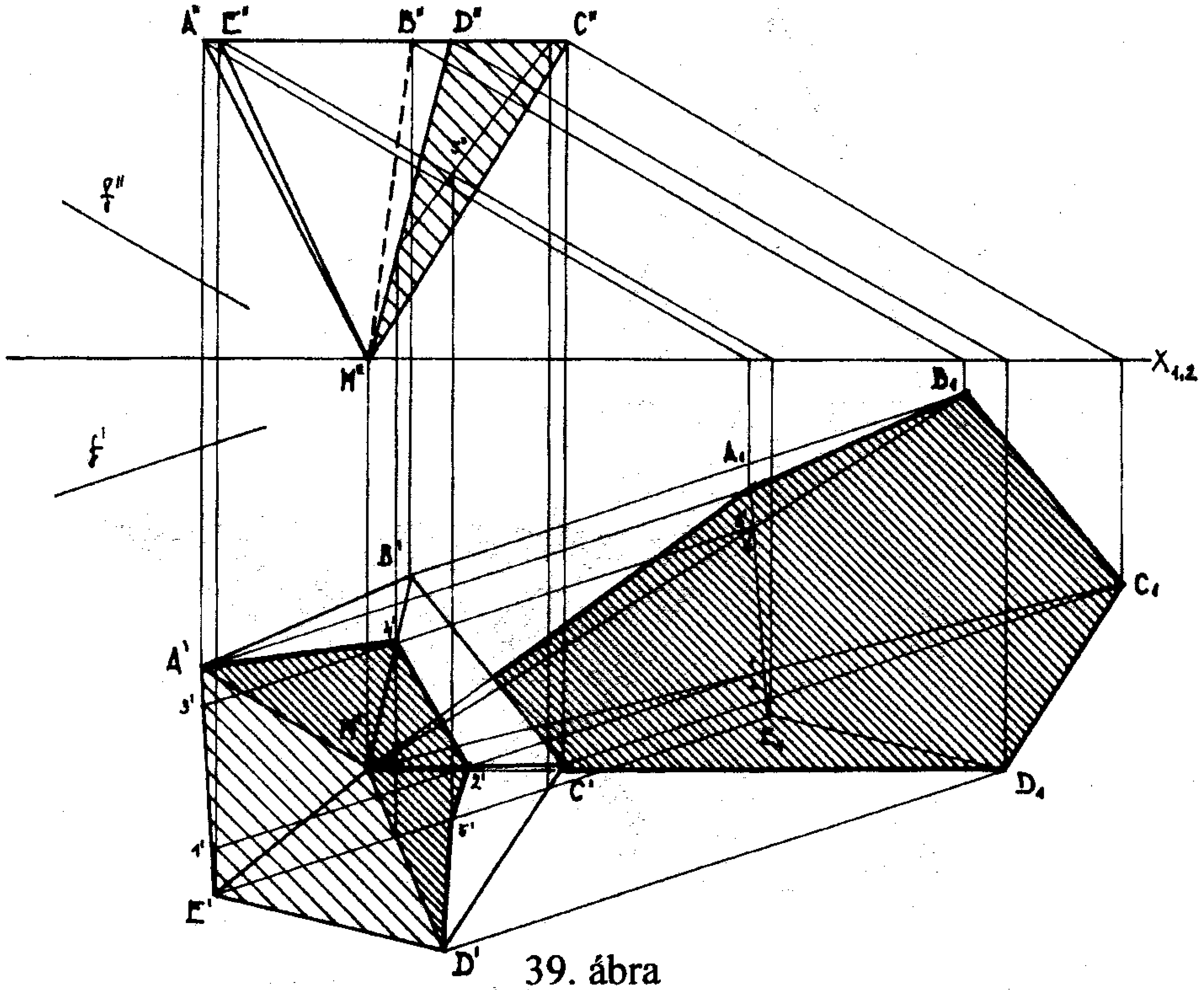
Első képsíkon álló gúla árnyékához elég csak a csúcspont árnyékát megszerkeszteni (38. ábra). Az alkotók árnyékának másik pontja az alapsokszög csúcsa. Az árnyék szerkesztéséhez elég a "szélső" alkotók árnyékát megrajzolni. BM és DM *árnyékválasztó* élek, a BCM és CDM lapok önárnyékosak.



38. ábra

Szerkesszük meg most a csúcsán álló gúlapalást összes árnyékát! A fedőlap párhuzamos helyzetű az első képsíkkal, így árnyéka az első képsíkon vele egybevágó sokszög. A gúla csúcsának árnyéka önmaga. Az árnyékválasztó élek itt is a vetett árnyékból közvetlenül adódnak.

A bevetett árnyék szerkesztéséhez célszerű az összes él képsíkra vetett árnyékát megrajzolni (39. ábra). Az AM és DM árnyékválasztó élek, ezért a gúla belsejében a ABM, BCM és CDM lapokon keresünk vetett árnyékot. Az árnyékot az A, E, D pontokat összekötő árnyékválasztó élek vetik. Az E pont árnyékát a rá illesztett fénysugár metszi ki a CDM síkból. Így megszerkesztettük az ED él árnyékát. Ezután még meg kell keresni az AE szakasz árnyékának töréspontjait a BM és CM élen, például az AE egyenes további pontjainak árnyékaként.



39. ábra

Ennél gazdaságosabb szerkesztést is választhatunk. Vegyük észre, hogy pl. az AE és MC szakaszok árnyéka metszi egymást, vagyis az AE szakasz 1-es és a CM szakasz 2-es pontja közös fénysugárra esik.

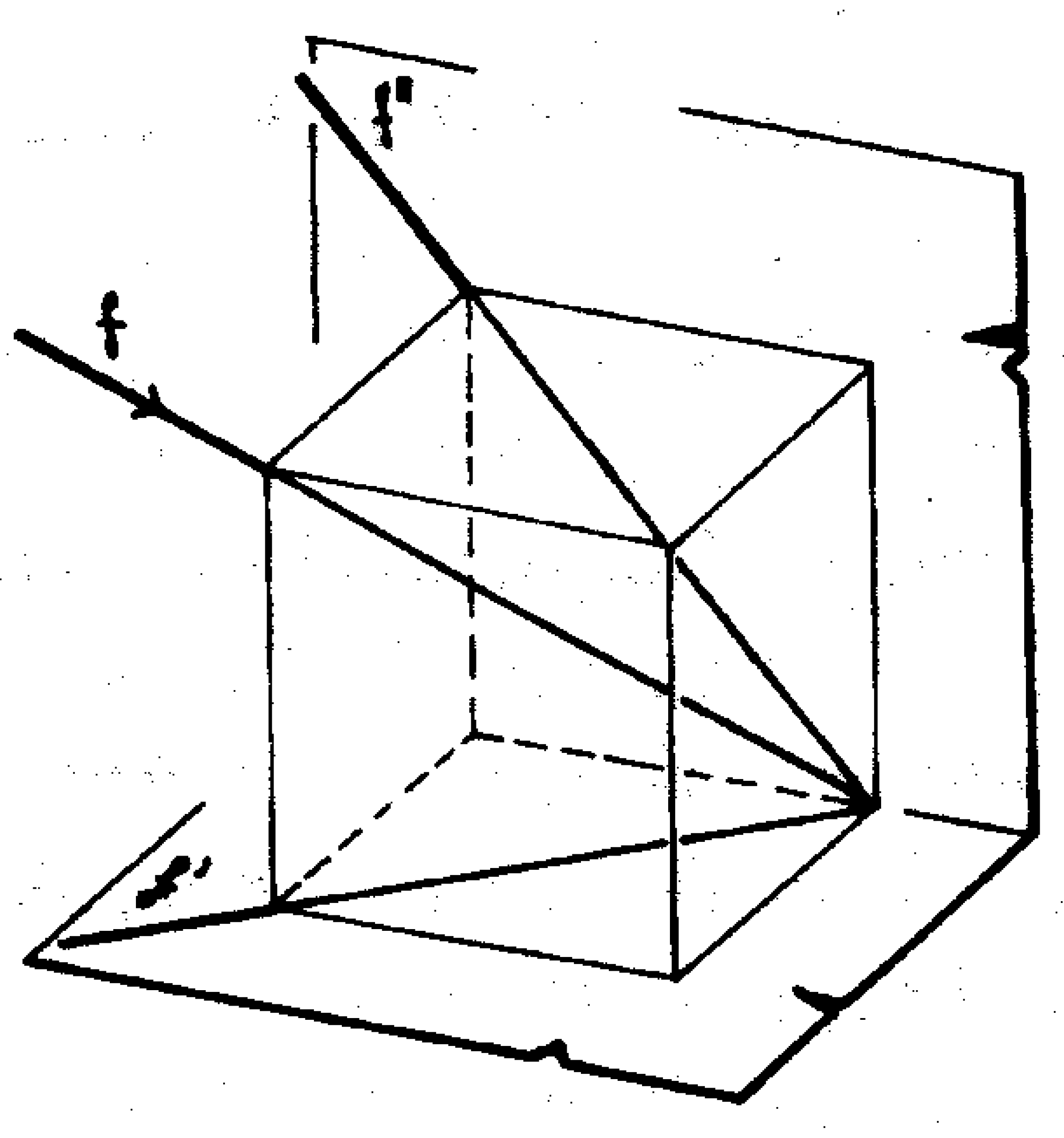
Közös fénysugárra eső pontok árnyéka egybeesik, ezeket *árnyékfedőpontok*nak nevezzük. Másképp fogalmazva: a szakaszok közös árnyékpontjára illesztett fénysugár (fény)transzverzálisa a két térbeli szakasznak.

Így például az AE szakasz 1-es pontja veti árnyékát a CM egyenesre.Ezen a ponton áthalad az AE egyenes árnyéka a CDM síkon. Az AE egyenes árnyékának BM élre eső töréspontja szintén árnyékfedőpontként szerkeszthető.

Testek egymásra vetett árnyékának szerkesztését is az árnyékfedőpontok használatával egyszerűsíhetjük. Célszerű a különböző árnyékszerkesztési módszerek kombinációja.

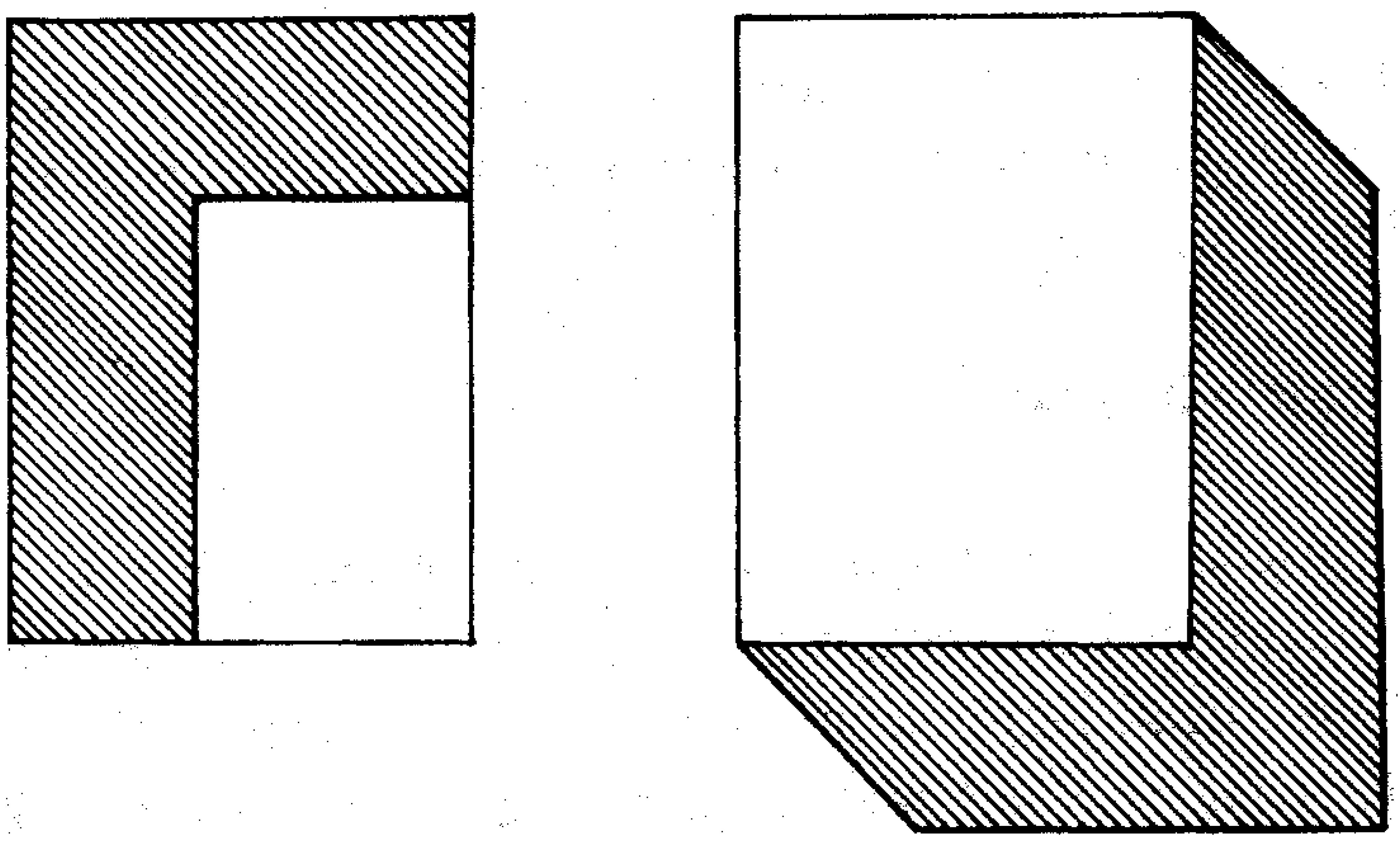
A 45 °-os paralel világítás

Árnyékszerkesztésnél a fénysugár iránya ugyan tetszőlegesen választható, de például épületek árnyékánál célszerű úgy felvenni, hogy az árnyék kiemelje a homlokzat tagoltságát. Homlokzati árnyékok szerkesztésénél célszerű az ún. 45°-os paralel világítás alkalmazása. Ez a speciálisan választott fénysugár az első és második képsíkkal párhuzamos oldallapú kocka testátlójának irányával egyezik meg (40. ábra). A felvételből következik, hogy a fénysugár első, második és harmadik képe egy-egy lapátló képével van fedésben, a képeken az $x_{1,2}$, $x_{1,3}$, illetve $x_{2,3}$ tengellyel is 45°-os szöget zár be.



40. ábra

Ebből az értelmezésből következik, hogy segítségével gyorsan elvégezhető a szerkesztés. Például a balról érkező 45°-os megvilágításnál minden pontnak a függőleges képsíkkal párhuzamos falra vetett árnyéka annyival kerül jobbra és egyidejűleg ugyanennyivel lefelé is, amennyivel előbbre van a pont, mint a fal síkja. Az így szerkesztett homlokzati árnyék helyettesítheti az első képet (41. ábra).



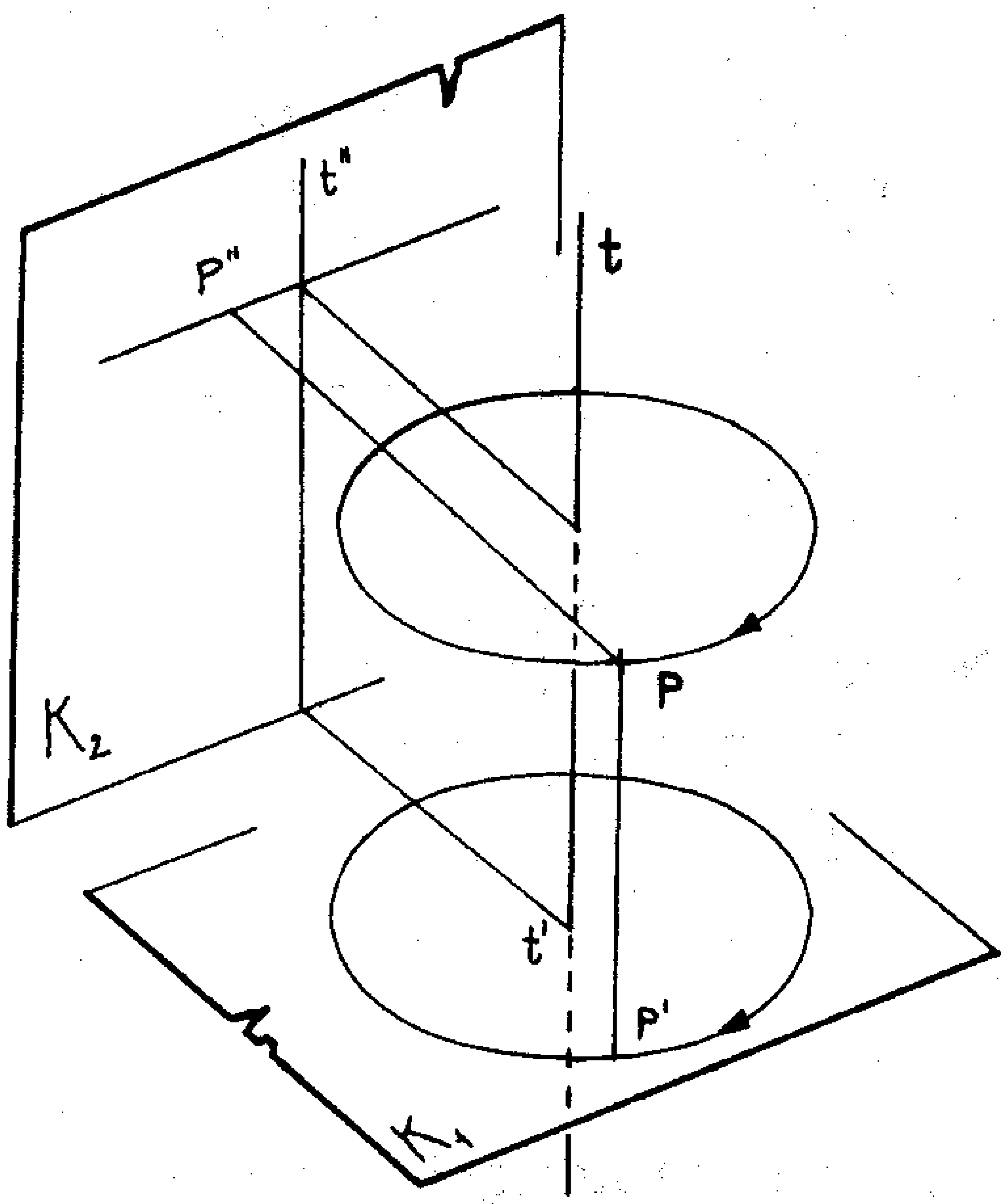
41. ábra

SÍK FORGATÁSA KÉPSÍKKAL PÁRHUZAMOS HELYZETBE

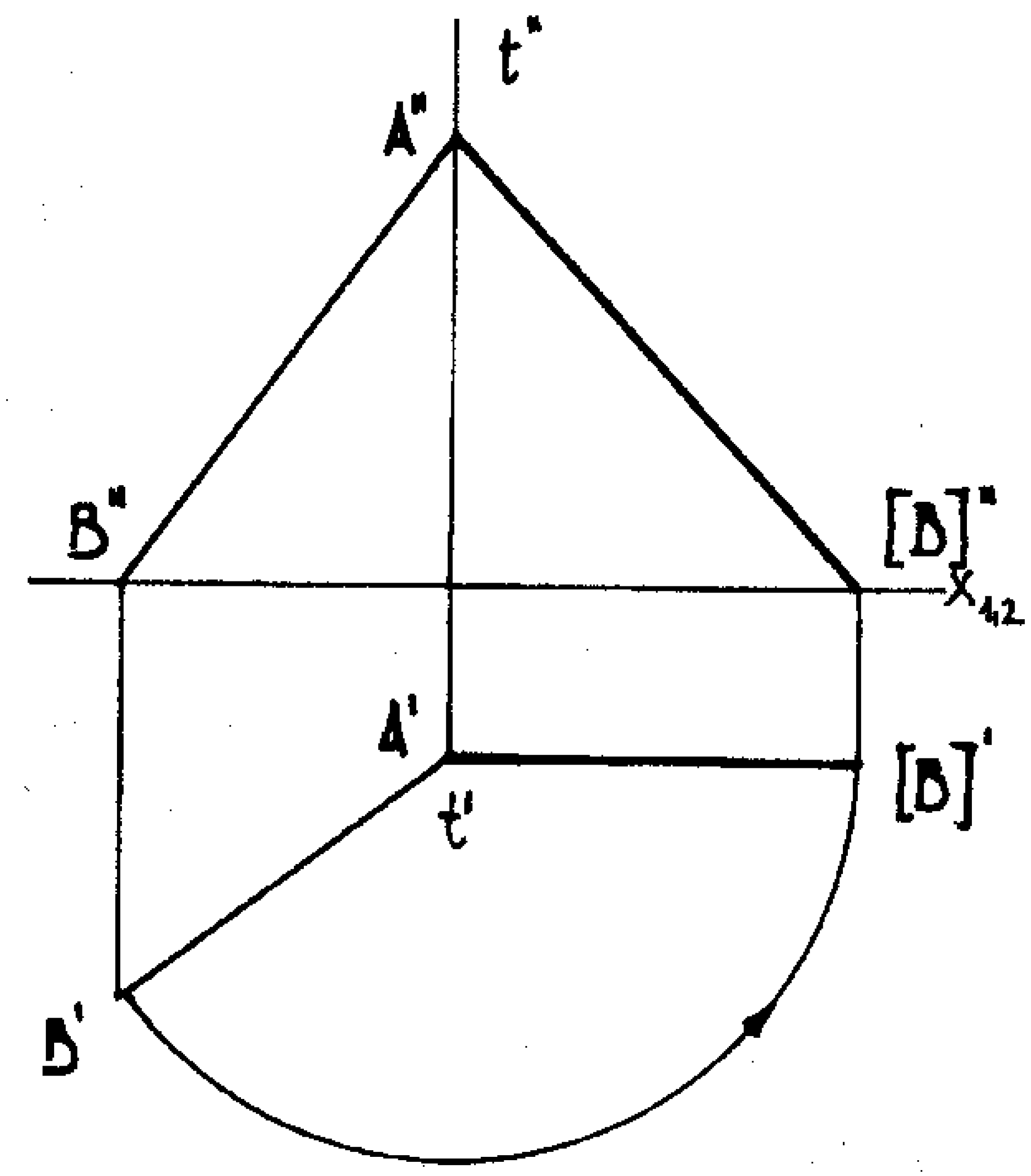
Az előnyös képsíktranszformáció lehetővé teszi, hogy az új képsíkon az alakzat egyes méretei a képekről leolvashatóak legyenek.
A kívánt helyzetet más módon is elérhetjük. Rögzített képsíkrendszerben az alakzatot mozgatjuk. Ezt kétféleképpen is megtehetjük. Ha az alakzatot az egyik képsíkra merőleges tengely körül forgatjuk, akkor *elforgatás*ról vagy *rotáció*ról beszélünk. Ha egy síkot fővonala körül forgatunk képsíkkal párhuzamos helyzetbe, akkor a műveletet *leforgatás*nak nevezzük. Ezek a szerkesztési eljárások *helyettesíthetik a transzformációt, vele egyenértékűek*, és a feladat jellege alapján mérlegelhetjük, hogy melyiket válasszuk.

Elforgatás vagy rotáció

Amikor egy pontot képsíkra merőleges tengely körül forgatunk, a pont körpályán mozog. A kör a vele párhuzamos képsíkon valódi méretben látszik. Másik képe a kör átmérőjével egyenlő hosszúságú szakasz (42. ábra).



42. ábra

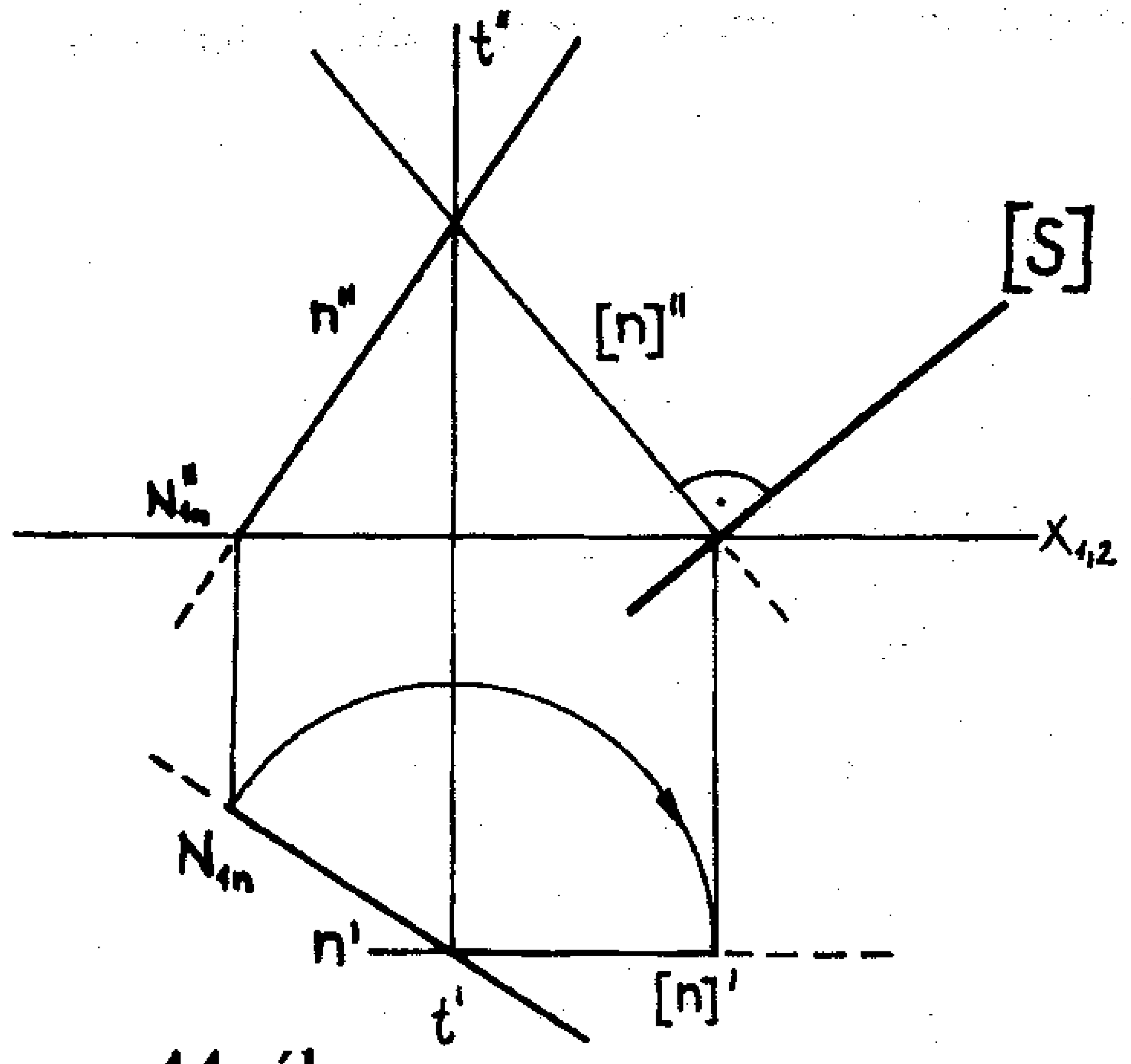


43. ábra

Forgassuk az AB szakaszt függőleges tengely körül második képsíkkal párhuzamos helyzetbe (43. ábra). Az első képsíkra merőleges forgástengely A pontja helyben marad. A szakasz B végpontja egy körön fordul addig, míg [B] az $x_{1,2}$ tengelytől A-val azonos távolságra kerül. Ekkor második képen a szakasz valódi nagyságú, hiszen első képe párhuzamos a képtengellyel.

Síkot vetítősíkká tudunk forgatni az egyik képsíkra merőleges tengely körül. A képsíkkal párhuzamos helyzethez a másik képsíkra merőleges tengely körül egy újabb rotáció szükséges. Vagyis rotációval is két lépésben érhető el a képsíkkal párhuzamos speciális helyzet, ugyanúgy, mint képsíktranszformációval.

Ábránkon csak a függőleges tengely körüli forgatást végeztük el. A síkot normálisával helyettesítettük. Ekkor a forgatás azonos az előző ábrán bemutatottal. Végül az elforgatott normálisra merőlegesen berajzoljuk az S sík második nyomvonalát (44. ábra).

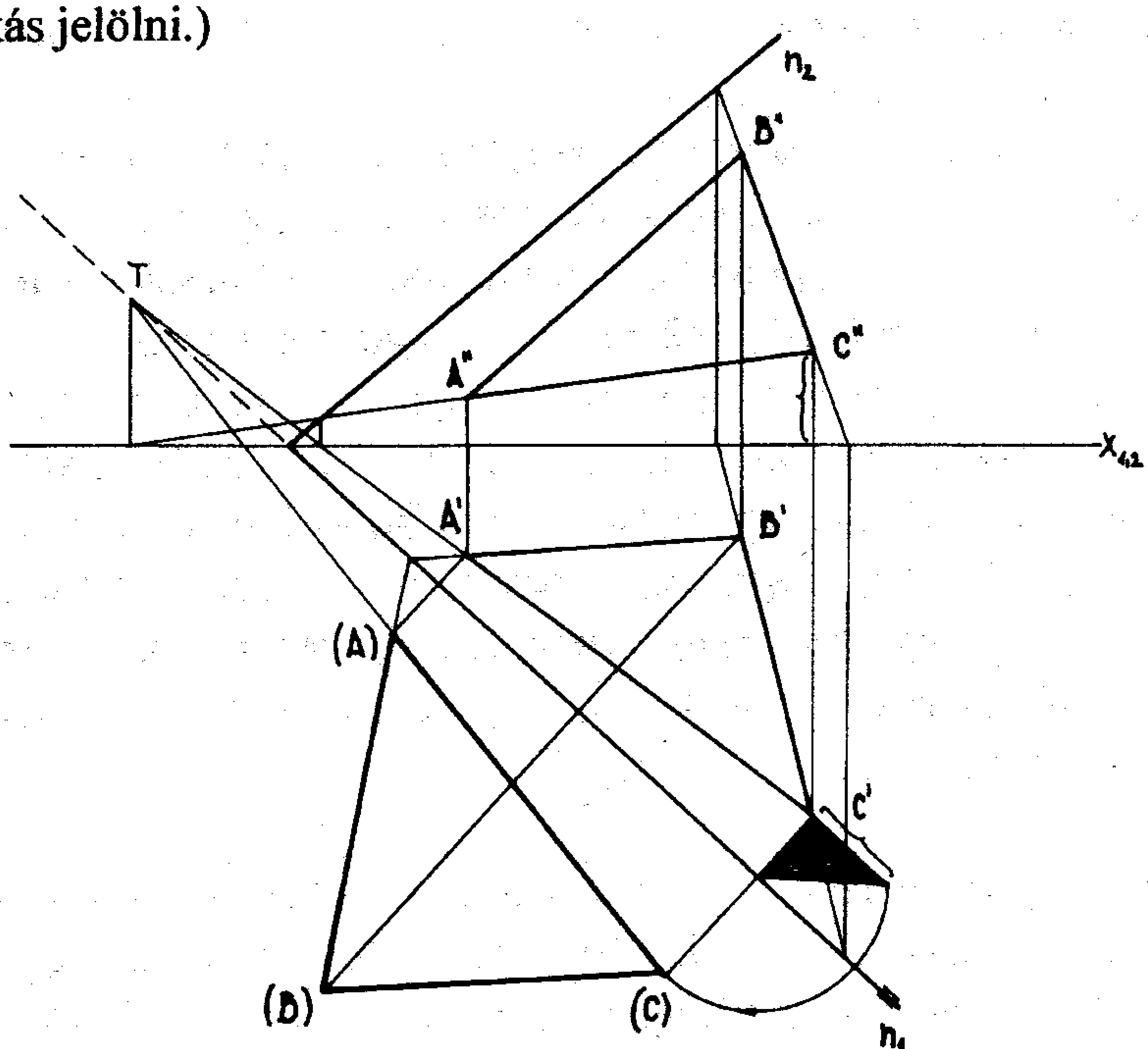


44. ábra

Leforgatás

Síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe tudunk hozni egy lépésben nyomvonal vagy fővonal körüli leforgatással. Ha a síkot egy egyenese körül forgatjuk, a forgástengely minden pontja helyben marad. Ezért ha a képsíkkal párhuzamos helyzetet síkbeli egyenes körüli forgatással akarjuk elérni, a *forgástengelyt* valamelyik *képsíkkal párhuzamosan* kell megválasztanunk. A sík minden pontja olyan körpályán mozog, melynek sugara a pont forgástengelytől mért távolságával egyezik meg. Ha a sík képsíkkal párhuzamos helyzetű, ez a távolság valódi nagyságban látszik.

Szerkesszük meg egy nyomvonalaival adott síkon levő háromszög valódi nagyságát! A síkot nyomvonala körül az első képsíkba forgathatjuk (45. ábra). A C pont a nyomvonalra merőleges körön fordul. A kör síkja első vetítősík, melyet ha K_1-hez csatolt negyedik képsíknak tekintünk, benne a C pont és a körív megrajzolható. Az A és B pontokat hasonló módon forgathatjuk le. A leforgatott síkot a forgatás tengelye és egyetlen leforgatott pontja egyértelműen meghatározza. Ezért A és B leforgatottját másképpen is szerkeszthetjük. A háromszög AC oldala metszi a forgatás tengelyét a T pontban – ezen a ponton átmegy az egyenes leforgatottja is. A T és (C) pontok összekötő egyenesén az (A) pontot a forgatás tengelyére merőleges egyenes metszi ki. A (B) hasonlóan szerkeszthető. (A pont leforgatottját kerek zárójellel szokás jelölni.)



45. ábra

A háromszög síkja és az alapsík között a merőleges vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít. Ez illeszkedés- és párhuzamosságtartó leképezés. A síkbeli egyenesek alaprajzukat (a háromszög első képén az oldalak meghosszabbítását) az első nyomvonalon metszik. A sík képsíkba forgatásával ez két sík közötti megfeleltetés továbbra is megmarad és a két sík közötti kapcsolat a képsíkon megjeleníthető. (A képsíkrendszerek ábrázolásához hasonlóan itt is két síkot ábrázolunk egyetlen vetületen: a vetületi képet és a leforgatottat.) A háromszög első vetülete és leforgatottja közötti síkmértani kapcsolatot affinitásnak, mégpedig merőleges affinitásnak nevezzük.

Egy síkidom képe és képsíkba forgatottja közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést affinitásnak nevezzük (bár az affinitás, mint általános geometriai transzformáció ennél tágabb értelemben is használatos, mi csak ezzel a speciális esetével foglalkozunk).

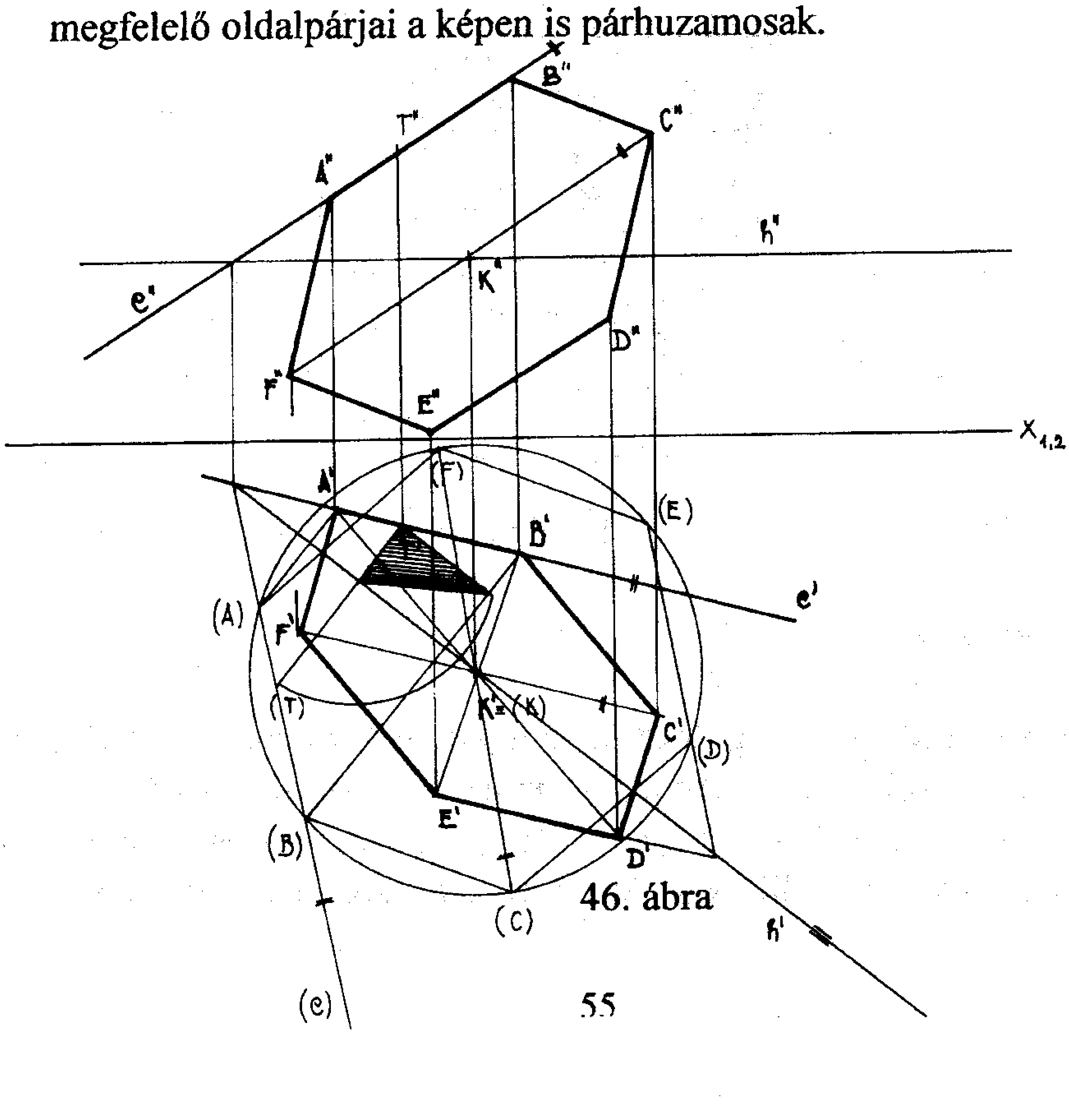
Az *affinitás* olyan *geometriai transzformáció*, melyben pontnak pont, egyenesnek egyenes felel meg. Illeszkedés- és párhuzamosságtartó. Az egymásnak megfelelő pontokat összekötő egyenesek párhuzamosak egymással – ez *az affinitás iránya* –, a megfelelő egyenesek *az affinitás tengelyén*, a sík nyomvonalán metszik egymást. Ha a megfelelő pontok összekötő egyenesei merőlegesek a tengelyre (nyomvonalra), *merőleges affinitás*nak nevezzük a leképezést. Ha az affinitás iránya nem merőleges az affinitás tengelyére, *ferde affinitás*ról beszélünk. Az affinitást egyértelműen meghatározza a tengelye és egy megfelelő pontpár. Ennek segítségével további pontok és egyenesek szerkesztése az előbb felsorolt tulajdonságok felhasználásával történik.

A képsíkba forgatás helyett képsíkkal párhuzamos helyzetbe is forgathatjuk a síkot, bármelyik fővonala körül. Ebben az esetben is affin megfelelés van például a síkban lévő síkidom forgatottja és vetülete között. Ekkor az affinitás tengelye a fővonal. (Ez a forgatás tengelye.)

Sík leforgatásának segítségével bármilyen síkbeli alakzat valódi mérete meghatározható. De elvégezhető a fordított feladat is: adott feltételeknek megfelelő (pl. szabályos) síkidomok vetületének ábrázolása.

> Szerkesszünk szabályos hatszöget, ha adott a K középpontja és egyik oldala az **e** egyenesre esik!(46.ábra) Vegyük fel K-n keresztül a sík első fővonalát, **h**-t! Forgassuk képsíkkal párhuzamos helyzetbe (röviden: forgassuk le!) a síkot (az **e** egyenest) a fővonal körül! Az egyenesnek a forgatás tengelyén levő pontja helyben marad, ezért elég egy tetszőleges

további T pontját leforgatni, és a helyben maradó ponttal összekötni. A hatszög K középpontja a forgatás tengelyére illeszkedik, ezért első képe és forgatottja azonos. A leforgatásban megrajzolt szabályos hatszöget affinitás segítségével visszaforgatjuk. Az A és B csúcsokat az affinitás irányával párhuzamosan az **e'**-re vetítjük. A szabályos hatszög középpontos szimmetriáját fölhasználva D'-t és E'-t tükrözéssel kaphatjuk. A C'F' egyenes illeszkedik K-ra és párhuzamos **e'**-vel. A párhuzamos szakaszok vetületének hossza és iránya is megegyezik egymással, ezért C' és F' fölmérhető. (C'F' = A'B') Ellenőrzés: az egyes oldalak forgatottja és megfelelő vetülete a fővonalon metszi egymást. A második kép többféleképpen is szerkeszthető. Ha a hatszög szimmetriáját használjuk ki az A" és B" illeszkedik **e"**-re, a továbbiak az első kép szerkesztésével azonosak. Ellenőrzés: az első és második képeket rendezők kötik össze ($x_{1,2}$-re merőlegesen!). A másik szerkesztési mód: a hatszög csúcspontjaira segédegyeneseket illesztünk, és a síkbeli pontok második képét szerkesztjük. Ellenőrzés: a hatszög megfelelő oldalpárjai a képen is párhuzamosak.



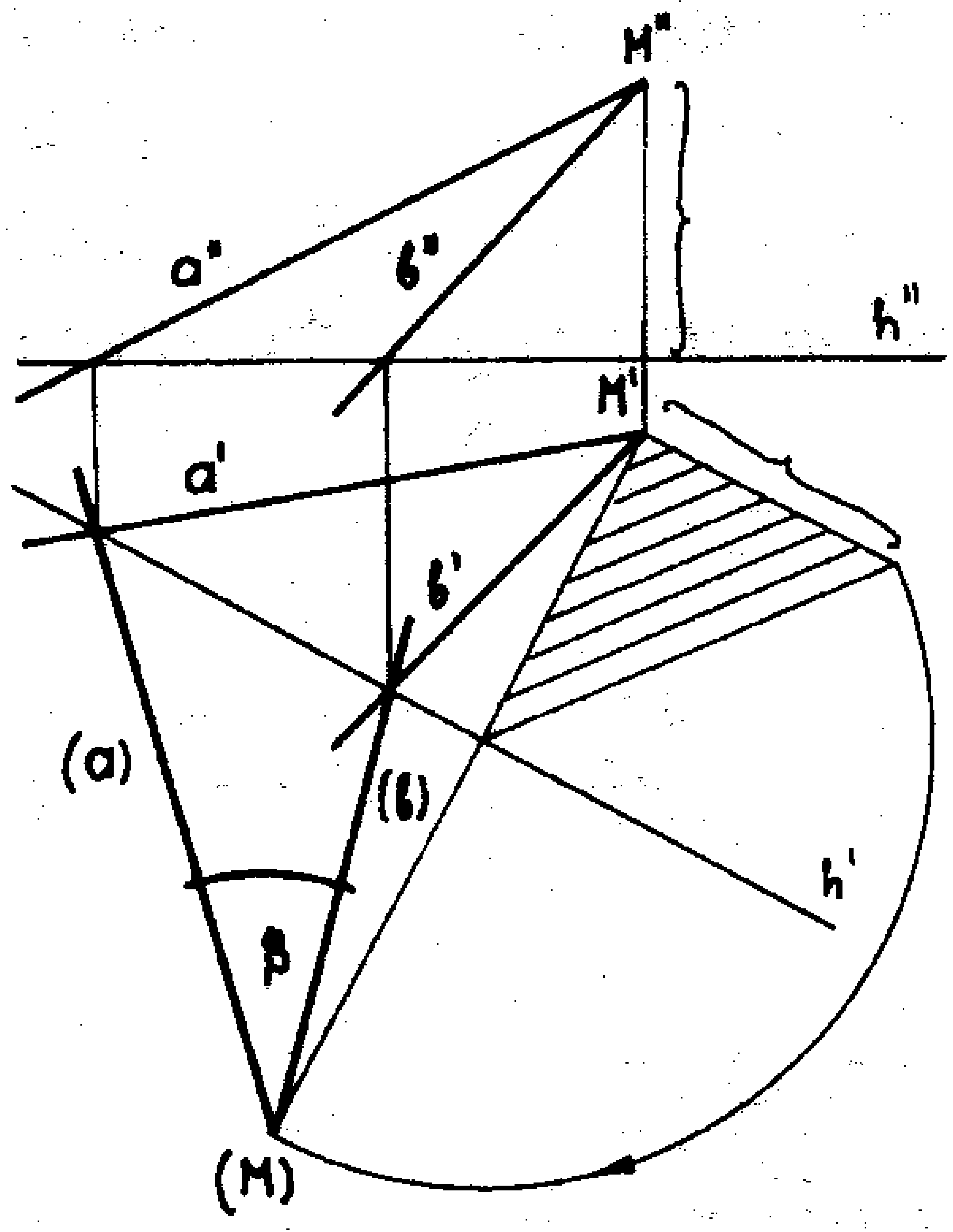
46. ábra

Sík leforgatásával nemcsak a távolságok, hanem a szögek is valódi méretben látszódnak, ezért ez az eljárás lehetővé teszi egyenesek szögének meghatározását egyetlen lépésben.

Két egyenes szöge

Határozzuk meg két egyenes szögét! Ha az adott egyenesek kitérőek, akkor a tér tetszőleges pontján át húzzunk velük párhuzamosokat. A metsző egyenesek síkját képsíkokkal párhuzamos helyzetbe forgatva szögük valódi nagyságban látszik.

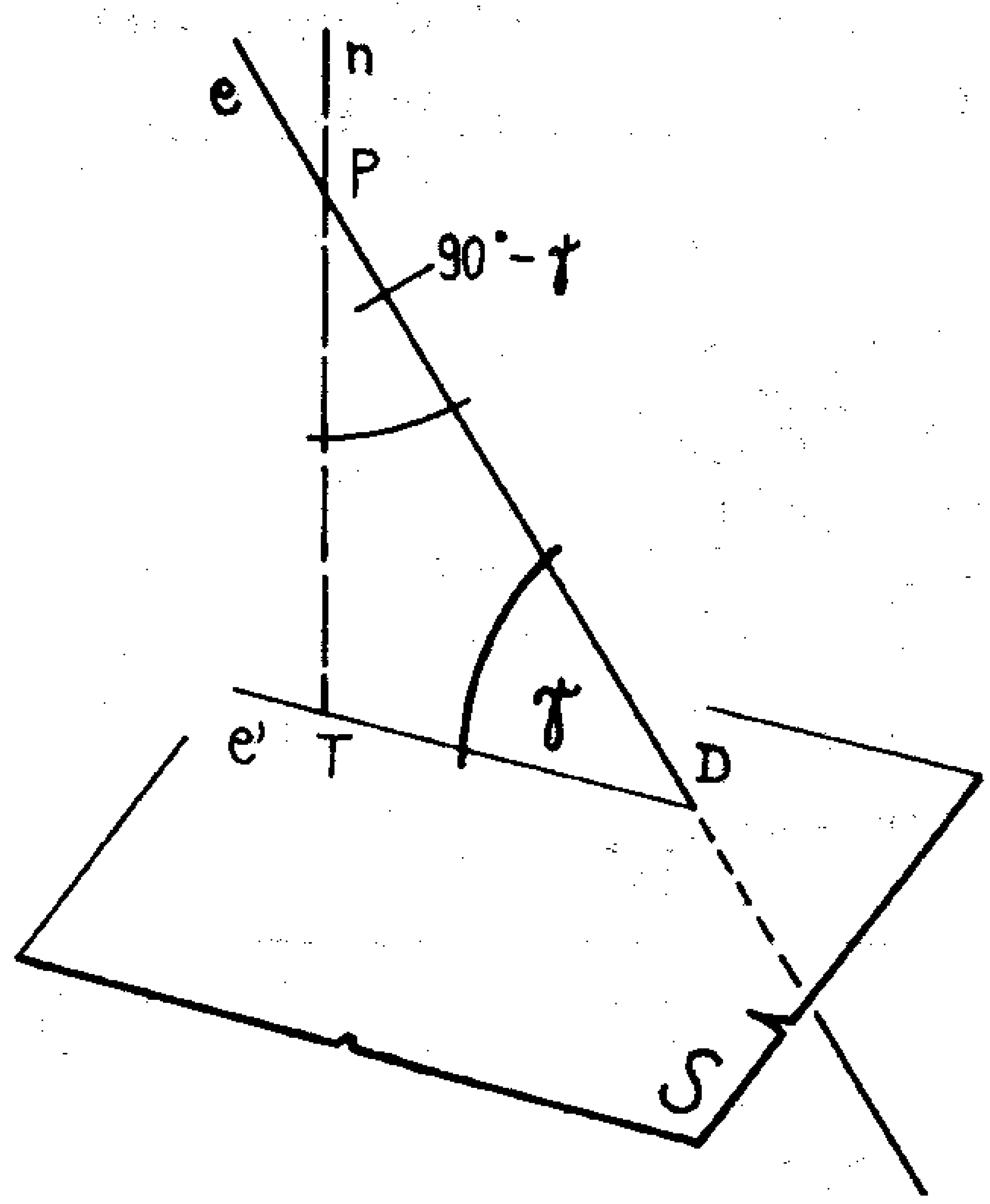
Vegyünk fel a síkon egy első fővonalat (47. ábra). Csak az egyenesek M metszéspontját kell leforgatnunk, mert az egyenesek tengellyel való metszéspontja helyben marad.



47. ábra

Sík és egyenes szöge

Sík és egyenes szögét az egyenes és a síkra eső merőleges vetületének szögével értelmezzük. A merőleges vetület megszerkesztését nem kell elvégezni, ha a sík és egyenes szögének pótszögét szerkesztjük meg, vagyis a síkot helyettesítjük a normálisával. Az egyenes tetszőleges P pontján átmenő normális az egyenessel a keresett szög pótszögét zárja be (48. ábra). Az egyenes és a sík normálisának szöge két egyenes szöge, melyet a 47. ábra szerint megszerkeszthetünk.



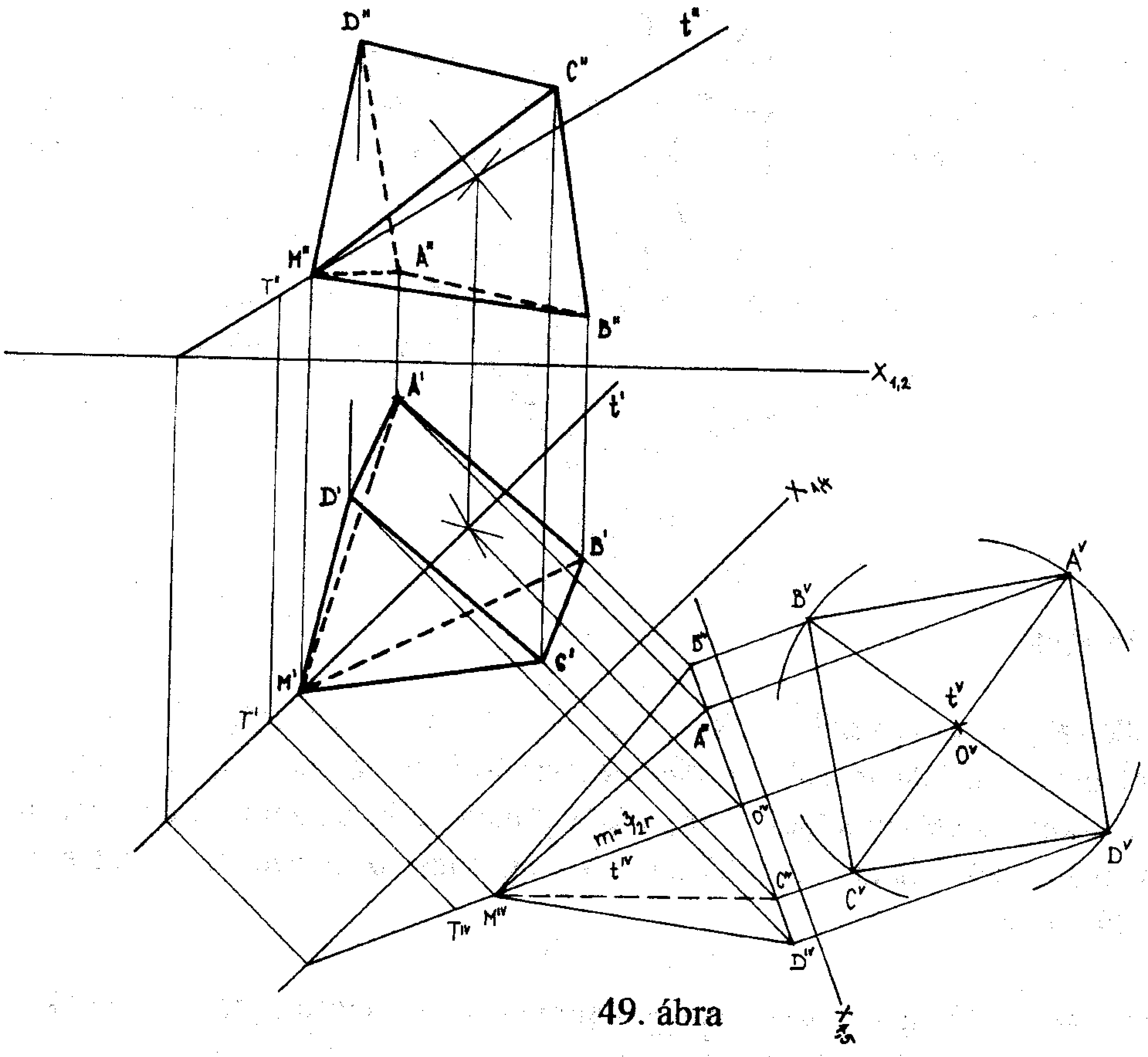
48. ábra

Két sík szöge

Két sík szöge megegyezik a síkok normálisai által bezárt szöggel. Ha a tér tetszőleges pontjától merőleges egyeneseket állítunk a síkokra, ezeknek az egyeneseknek a szögét síkjuk leforgatásával megszerkeszthetjük. Lényegében mindhárom szögfeladat megoldását két egyenes szögének szerkesztésére vezettük vissza.

Eddigi ábrázoló geometriai ismereteinkkel már tetszőleges síklapokkal határolt testet tudunk ábrázolni. Íme egy példa:

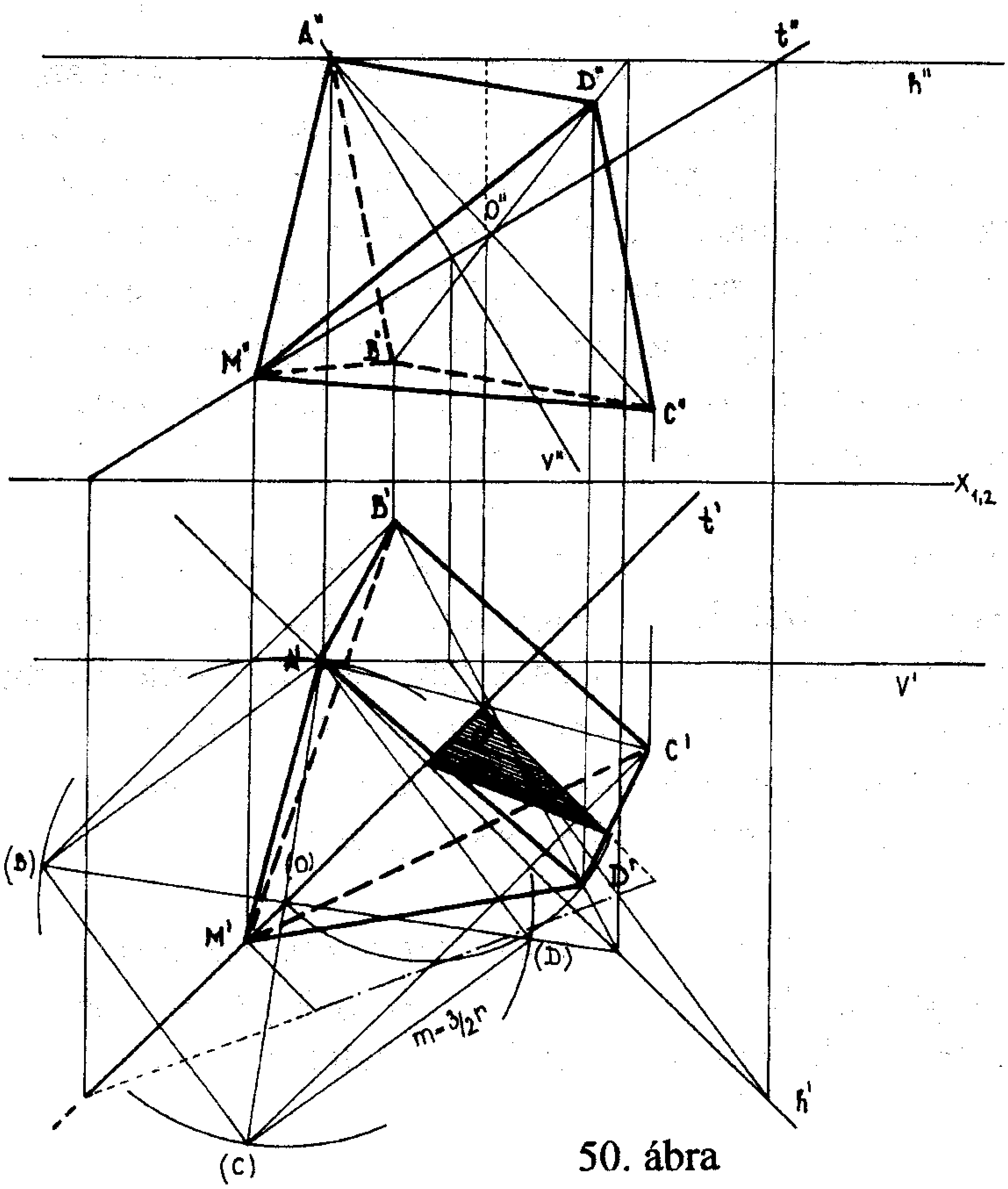
Ábrázoljuk azt a szabályos négyoldalú gúlát, melynek tengelye **t**, egyik csúcspontja A, a magassága pedig megegyezik az alapnégyzet oldalával! Mielőtt szerkeszteni kezdenénk, képzeletünkben egy vázlat, esetleg modell formájában konstruáljuk meg a testet, és gondoljuk végig a szerkesztés menetét: az alapnégyzet síkja illeszkedik az A csúcsra és merőleges a tengelyre. A tengely az alapsíkot a négyzet O középpontjában metszi. A négyzet fél átlója az O és A pontok távolsága. A gúla csúcspontját megkapjuk, ha O-ból kiindulva bármelyik irányban fölmérjük a magasságot a tengely egyenesére. Az itt vázolt megoldást kell szerkesztéssel követni. A feladat csak transzformációval is megoldható (49. ábra).



49. ábra

Transzformáljuk a tengelyt ponttá! K_5 párhuzamos a négyzet síkjával, így azt ötödik képen azt valódi nagyságban látjuk. Negyedik képe vetítő helyzetű és illeszkedik A-ra. (A ^{IV}-n át párhuzamos $x_{4,5}$-tel) Ezen a képen a gúla magassága fölmérhető. Két egymáshoz rendezett képből már az elmaradó rendezőkkel meghatározhatjuk a hiányzó képeket.
Ugyanez a feladat másképp is megszerkeszthető.

Vegyük föl az A-ra illeszkedő és a **t** tengelyre merőleges síkot a **h** és **v** fővonalaival (50. ábra)! A tengely és sík döféspontját második fedőegyenes segítségével szerkesztettük. A négyzet síkjának leforgatásához elég az O pontot leforgatni, mert a **h** fővonal és a rá illeszkedő A pont helyben marad. Az alapnégyzet a leforgatásban megrajzolható. A C pont mindkét képe tükrözéssel is megkapható, a BD átló első képét pedig a leforgatásból szerkesztjük, affinitás segítségével. A második kép pl. a B'D' egyenes és a sík fővonalainak metszéspontjaiból szerkeszthető. A magasság fölmérése a tengelyen egy tetszőleges szakasz valódi hosszának megszerkesztésével és megfelelő méretűre nagyításával történik. A **t** tengely első vetítősíkjában, az első képhez csatolt negyedik képen szerkesztettük meg a magasságot. A két lehetséges megoldás közül csak azt a csúcspontot rajzoltuk meg, amelynél a gúla két képe nem lóg egymásba.



50. ábra

Az előbbi feladathoz hasonlóan szerkeszthető tetszőleges oldalú hasáb és kocka is. *Feladat:* Szerkesszen kockát, ha adott egy csúcsa és egyik laptengelye!

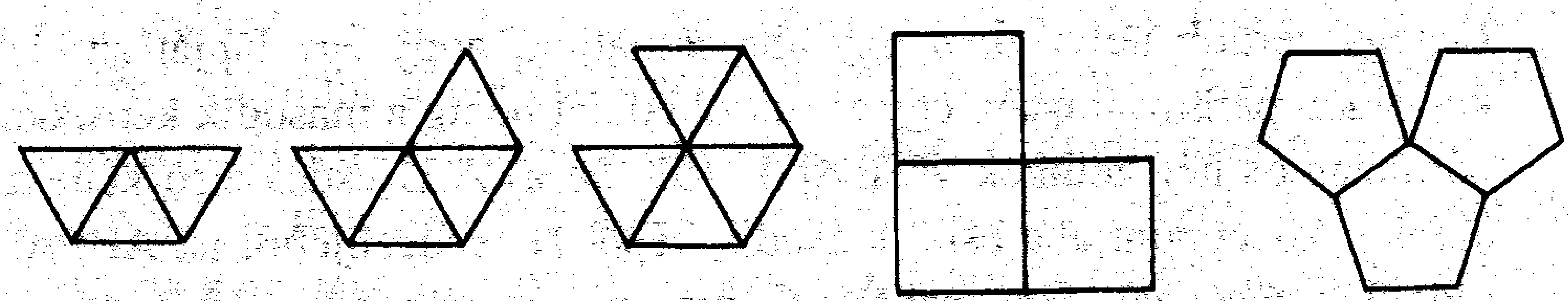
SZABÁLYOS TESTEK

Azokat a konvex síklapú testeket (poliédereket) nevezzük szabályos testeknek, amelyeknek *minden éle egyenlő hosszú, minden lapja egybevágó sokszög,* valamint *élszögei és lapszögei is egybevágóak.* Ebből következik, hogy lapjai szabályos sokszögek, és minden csúcspontjában ugyanannyi él találkozik.

A szabályos testeken a szimmetriaviszonyok miatt háromféle tengelyt szokás megkülönböztetni. A *csúcstengelyek* szemközti csúcsokat, a *laptengelyek* a szemben fekvő, párhuzamos oldallapok középpontjait, az *éltengelyek* pedig a szemben fekvő élek felezési pontjait kötik össze. Mindhárom fajta tengely illeszkedik a szabályos test középpontjára. A test összes csúcsa egyenlő távol van a test középpontjától, vagyis egy gömbfelületen helyezkednek el. A középpont egyenlő távol van a szabályos poliéder minden oldallapjától is, ezért a körülírt és beírt gömb középpontja azonos.

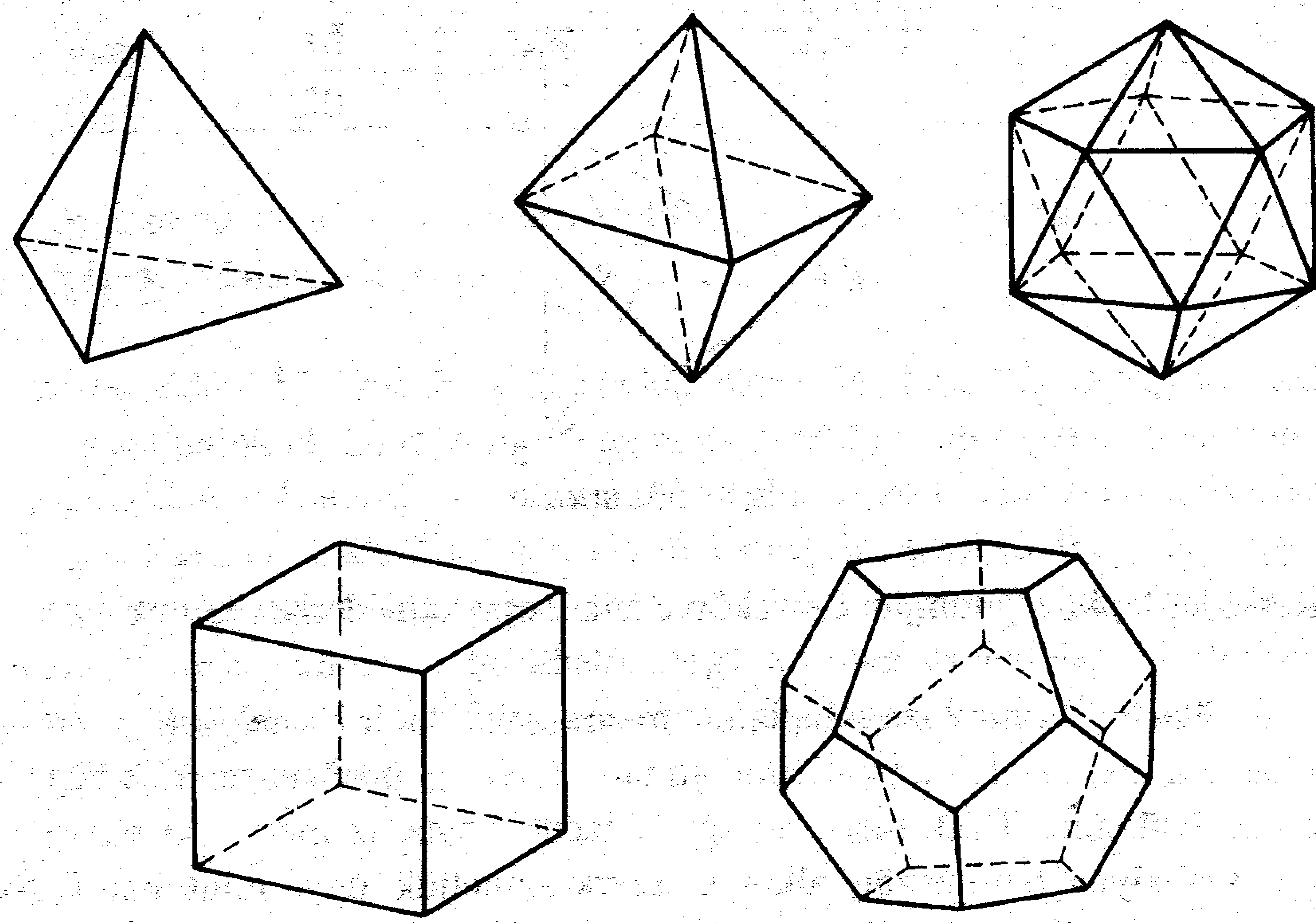
Az öt szabályos testet már az ókorban ismerték, szokás őket platóni szabályos testeknek is nevezni. A szabályos testek oldallapjai csak szabályos háromszögek, négyzetek és szabályos ötszögek lehetnek. Egy csúcspontban találkozó lapok csúcsszögeinek összege nem érheti el a 360°-ot, ezért három szabályos hatszög már nem alkothat testszögletet. Ugyanezért a három, négy vagy ötszögű lapok által határolt testek száma is korlátozott.

Szabályos háromszögekből 3, 4 illetve 5 db alkothat egy testszögletet – a 6 db már síkbeli, szabályos hatszöget alkot. Négyzetekből és szabályos ötszögekből pedig csak 3–3 darabból képezhető testszöglet (51. ábra).



51. ábra

Bebizonyítható, hogy 5-nél több szabályos test nincs is. A testek görög eredetű elnevezése oldallapjaik számára utal: tetraéder, hexaéder (kocka), oktaéder, dodekaéder és ikozaéder (52. ábra).

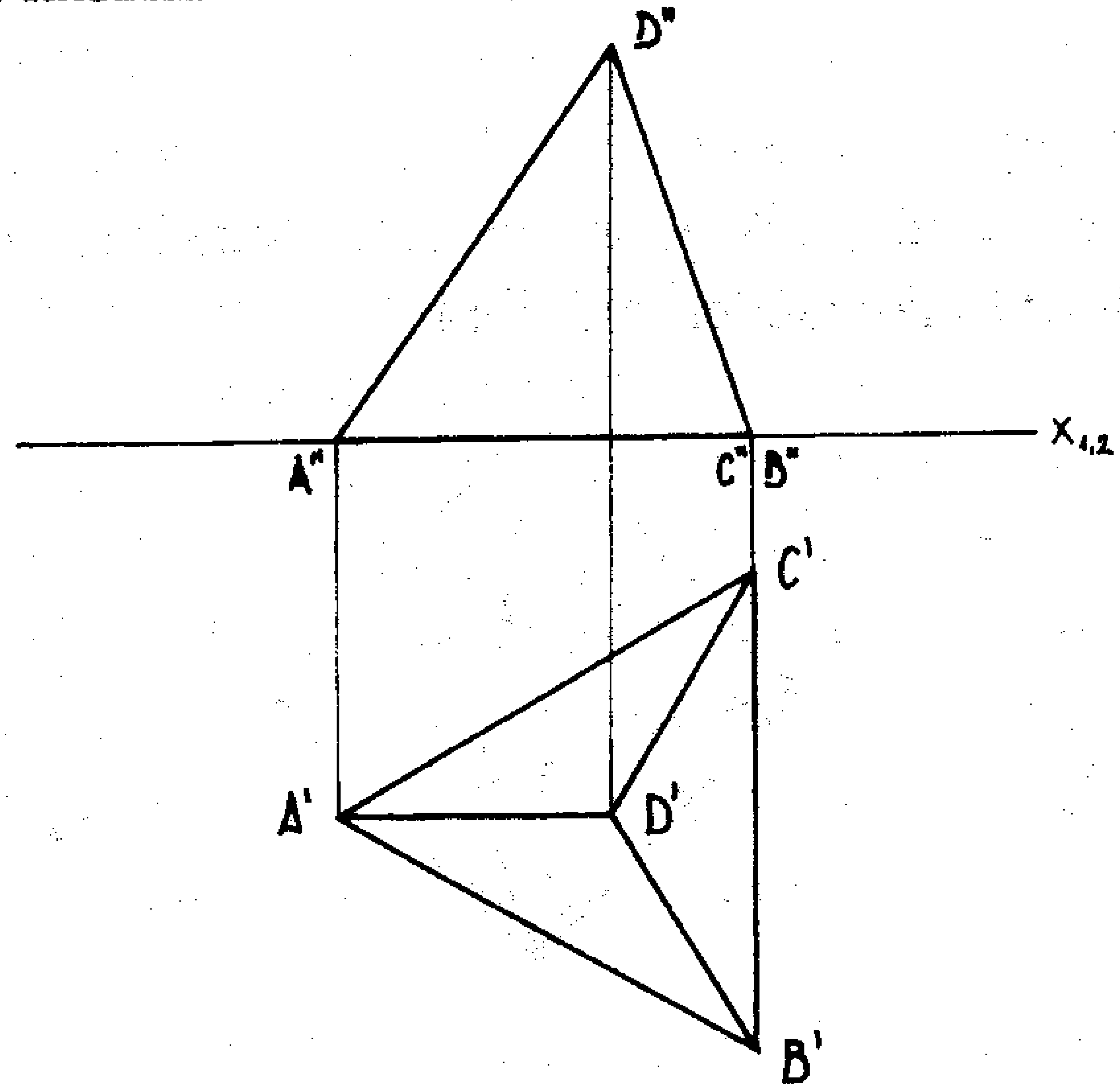


52. ábra

Szabályos testek szerkesztése

A tetraédert négy szabályos háromszög határolja.

Legegyszerűbb helyzetben úgy ábrázolhatjuk, hogy egy lapját az első képsíkkal párhuzamosan, egy másik oldalélét pedig a második képsíkkal párhuzamos helyzetűnek választjuk. (53. ábra) A D csúcs első képe az alaplap középpontjába esik, második képét D rendezőjéből az AB=AD oldalhosszúsággal kimetszhetjük, hiszen ez második képen valódi nagyságban látszik.



53. ábra

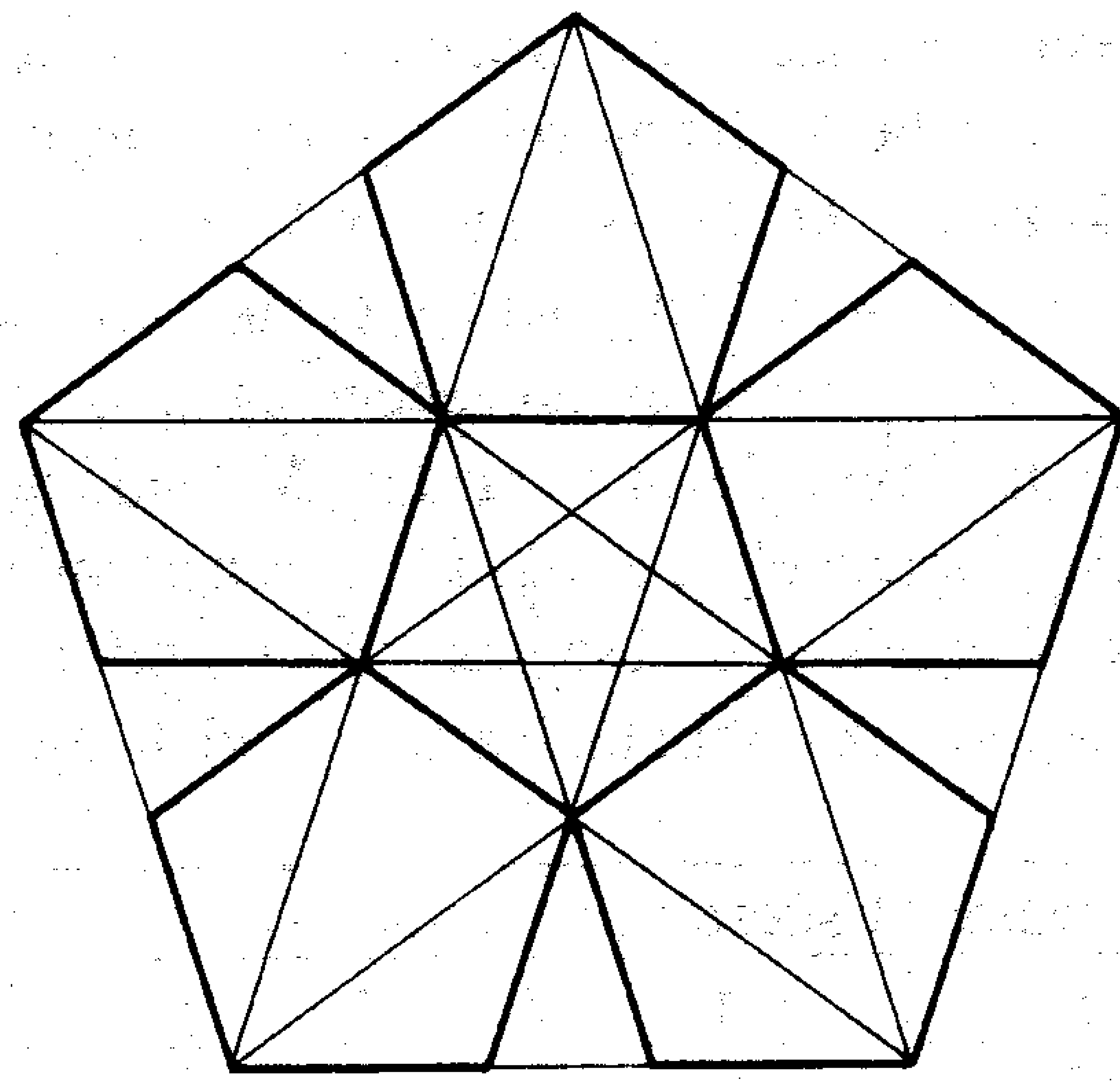
A tetraéder lapközéppontjait összekötve ismét egy tetraéderhez jutunk.

Ha a kocka szemközti lapjain megrajzolt kitérő helyzetű átlókat csatlakoztatjuk, szintén tetraéderhez jutunk. Ilyen módon két tetraéder írható a kocka felületére. Ezek metszete egy oktaédert határoz meg. Az oktaédert nyolc szabályos háromszög alkotja. Szerkeszthetjük úgy, mint két közös alapú, egyenlő élhosszúságú, szabályos négyoldalú gúlát, vagy kockába írjuk. A kocka lapközéppontjait összekötve oktaéderhez jutunk. Ha a beírt oktaéder lapközéppontjait összekötjük ismét kockát kapunk. Az egyik test éltengelyei azonosak a másik test laptengelyeivel. Egyik test csúcsainak száma megegyezik a másik test lapjainak számával. Egyik test körülírt gömbje megegyezik a másik test beírt gömbjével. Ugyanezek az összefüggések igazak a dodekaéder és ikozaéder között is: egyikük lapközéppontjait összekötve a másik testhez jutunk. Ez a térbeli dualitás egyik szép példája. A kocka és oktaéder valamint a dodekaéder és ikozaéder egymás duális megfelelői. A tetraéder duális megfelelője szintén tetraéder. A duális alakzatok éltengelyei azonosak, egyiknek a laptengelyei a másik test csúcstengelyei, valamint éleik száma megegyezik, az egyikük csúcsainak száma a másik lapjainak számával egyezik meg. Mindezeket az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze.

A test	Élek száma	Csúcsok sz.	Lapok sz.	n	m
Tetraéder	6	4	4	3	3
Kocka	12	8	6	4	3
Oktaéder	12	6	8	3	4
Dodekaéder	30	20	12	5	3
Ikozaéder	30	12	20	3	5

A táblázatban m az egy csúcsba futó élek számát, n a határoló szabályos sokszögek oldalszámát jelöli.

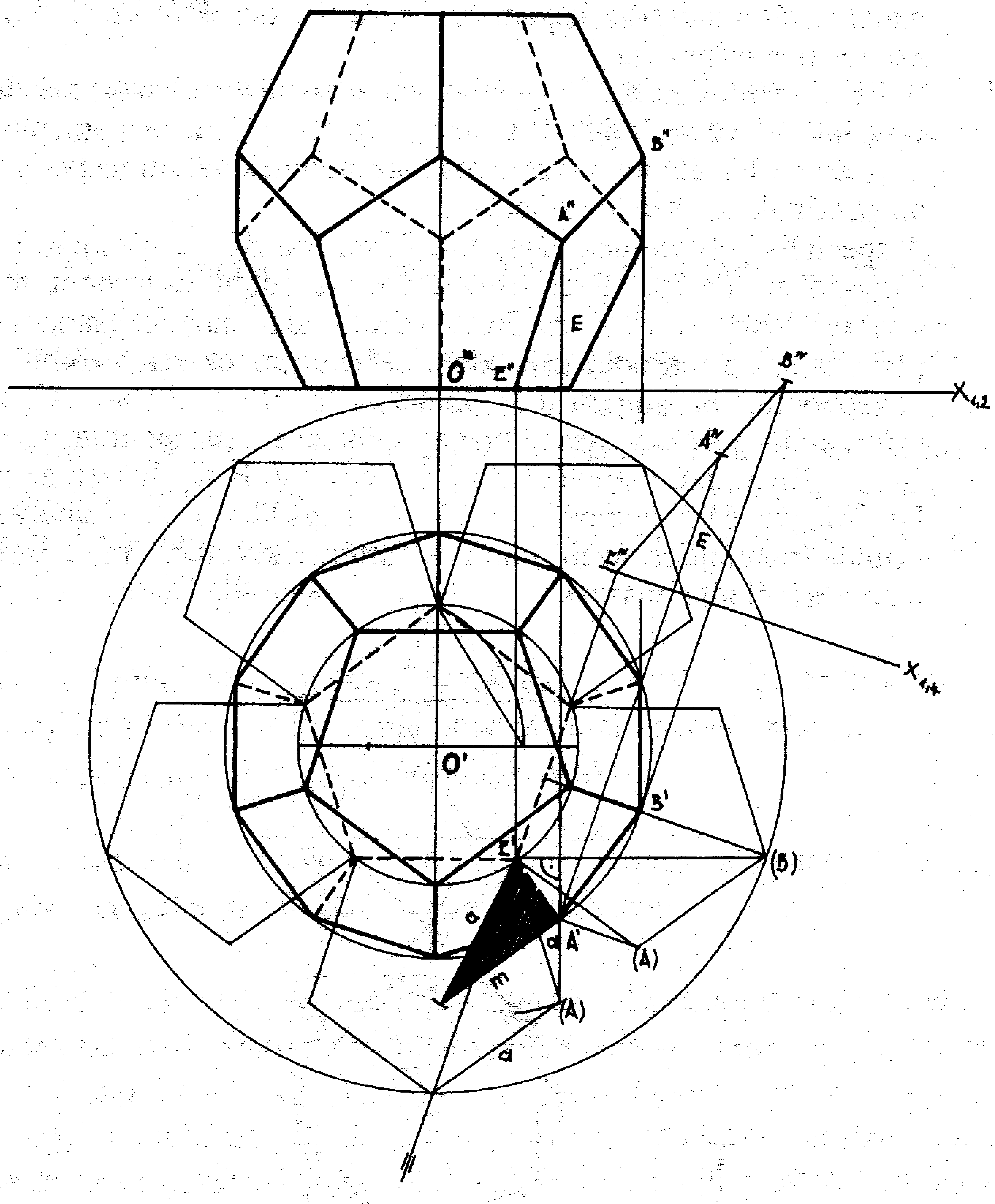
A dodekaédert 12 szabályos ötszöglap határolja. Palástját legegyszerűbben úgy készíthetjük el, ha rajzolunk egy nagy szabályos ötszöget és behúzzuk az összes átlóját (54. ábra). Az átlók által meghatározott belső szabályos ötszög átlóegyeneseinek a kis ötszögön kívüli darabjait rajzoljuk meg. Így egy fél dodekaéder kiterített palástjához jutottunk. Ha a testet két ilyen fél palástból illesztjük össze, könnyen belátható, hogy az alap és fedőlap kivételével a többi csúcspont első vetülete szabályos tízszöget alkot. (Minden él első képsíkkal bezárt szöge egyenlő, a szimmetria miatt.)



54. ábra

A dodekaéder szerkesztése követheti a modellkészítést (55.ábra).

Az oldallapokat az alaplaphoz csatlakozó él mentén fölhajtjuk, amíg találkoznak. Az A és B csúcspont a hajtásvonalra merőleges körön mozog, a két vetítősík metszéspontja A'. Ez a szabályos ötszög szimmetriája miatt szögfelezőre esik. O'A' annak a körnek a sugara, amely az alapsokszöghöz közelebbi csúcspontok első képét tartalmazza. Ugyanez elmondható a fedőlapra is. Az alaplaptól távolabbi csúcsok azonosak a fedőlaphoz közelebbivel és fordítva, ezért a 10 vetületi csúcspont mindegyike az O'A' sugarú körre esik. Ezzel eljutottunk a dodekaéder első képéhez. A 10 kontúrpont mindegyike az alapötszög szimmetriatengelyeire esik. A csúcspontok magassága az első vetületük és valódi méreteik ismeretében egyszerűen szerkeszthető. Az A pont magasságát az AE oldal vetületének A' végpontjában állított merőlegesből az E' középpontú kör metszi ki, melynek sugara az ötszög oldala (vonalkázott háromszög). A B pont magassága szintén így szerkeszthető, de az ötszögoldalra merőleges (a szakasszal párhuzamos) negyedik képen is leolvasható. A dodekaéder második képét legegyszerűbben úgy kaphatjuk, hogy a negyedik képről elmaradó rendezőket fölmérjük a megfelelő pontokban. A fedőlap képe az alaplap középpontra vonatkozó tükörképe.



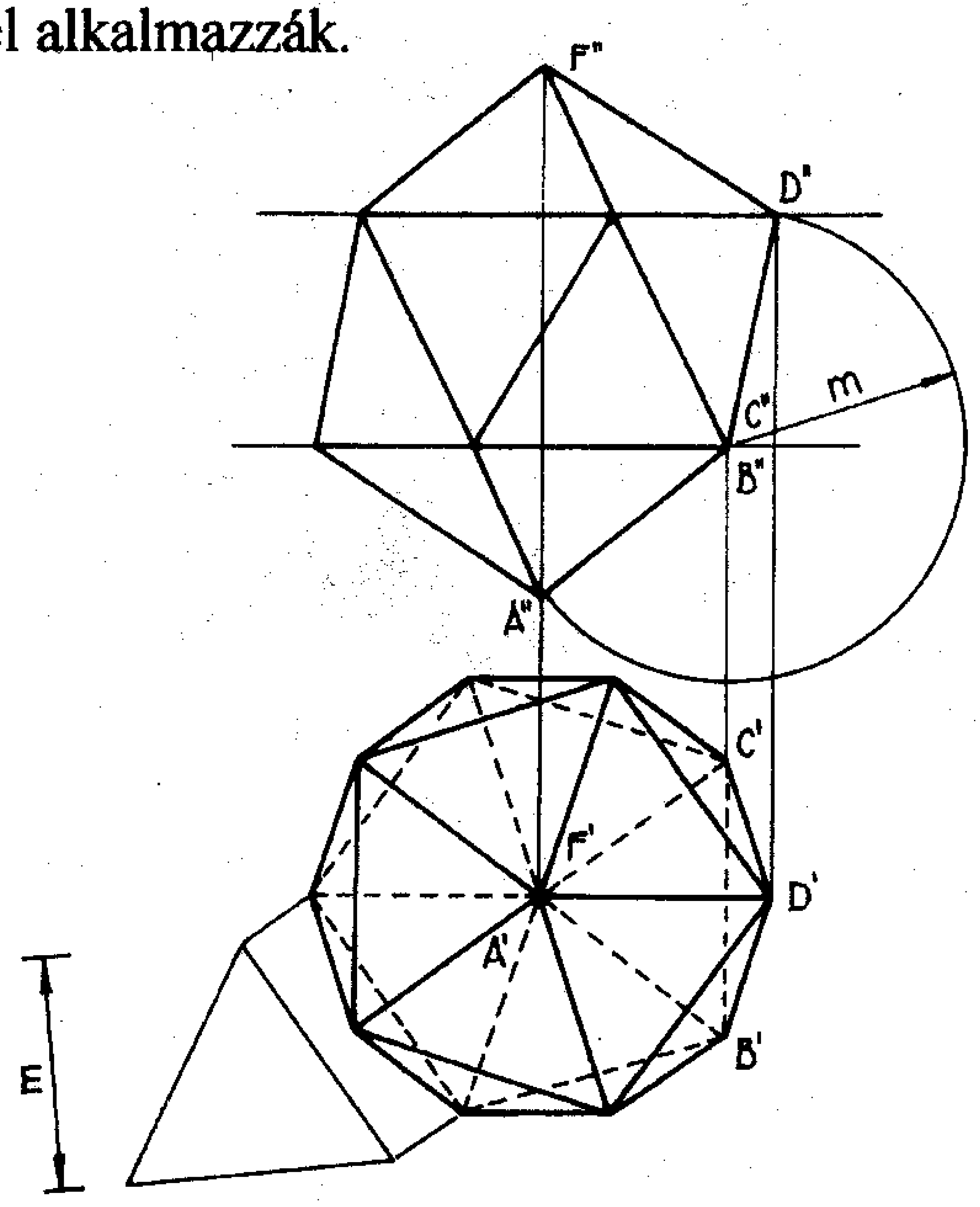
55. ábra

A szabályos ikozaédert olyan helyzetben ábrázoljuk, mintha az előbbi dodekaéder lapközéppontjában lennének a csúcsai.

A ferde lapok középpontjainak első vetülete szabályos tízszög. Az alaplap és fedőlap középpontja természetesen fedésben van a tízszög középpontjával (56. ábra). Meg kellene határoznunk az egyes pontok magasságát a második képen. Az A és F csúcsoktól az 5–5 csúcspont azonos távolságra van.

A BC élre illeszkedő, szaggatott vonallal rajzolt ötszög második képe vízszintes, ezt jelöljük ki tetszőlegesen. (Nincs képtengely!) Az ikozaéder oldaléléből a szabályos háromszögek valódi nagysága – így **m** magasságuk is – szerkeszthető.

A speciális helyzetűnek választott felvételen BC vetítősugár, FD valódi nagyságban látszik. Ezek ismeretében a többi csúcspont magassága szerkeszthető. A BCF és BCA háromszög magasságának első képe párhuzamos a második képsíkkal, ezért a pontok rendezőiből a B''C'' középpontú, **m** sugarú kör kimetszi a D''-t illetve A''-t. Az A csúcspontú gúla magassága megegyezik az F csúcspontúéval, így F'' is ismert (Ellenőrzési lehetőség: D''F'' egyenlő B'C', hiszen az ikozaéder DF oldala párhuzamos a második képsíkkal.) A szabályos testek szimmetriatulajdonságait mind a tartószerkezetek, mind a lefedések tervezésénél alkalmazzák.



56. ábra

SÍKLAPOKKAL HATÁROLT TESTEK

Az egymáshoz csatlakozó síkbeli sokszögek által határolt testet poliédernek nevezzük. A poliéder élei mentén mindig két sokszöglap találkozik, csúcsaiban legalább három él fut össze.

A poliéder *konvex*, ha egyetlen határoló sokszögének síkja sem metsz bele. Ha a határoló síkok valamelyike szétvágja a poliédert, akkor *konkáv* poliéderről beszélünk.

Mi a poliéderek osztályának legegyszerűbb elemeivel, a gúlákkal és hasábokkal foglalkozunk, hiszen a gyakorlatban előforduló legtöbb alakzat gúlák és hasábok metszésével, áthatásával vagy egyesítésével állítható elő.

Ha egy síkidom oldalait összekötjük egy a síkidom síkjára nem illeszkedő ponttal, gúlafelületet kapunk. A végtelen nagy felületnek a csúcspont és egy síkmetszete közé eső részét *gúlá*nak nevezzük. Alaplapja síkbeli sokszög, oldallapjai a palástját alkotják.

Szabályos a gúla, ha alaplapja szabályos sokszög és csúcspontja az alapsokszög köré írható kör középpontjában emelt merőleges egyenesen van. Minden más gúlát szabálytalan gúlának nevezünk.

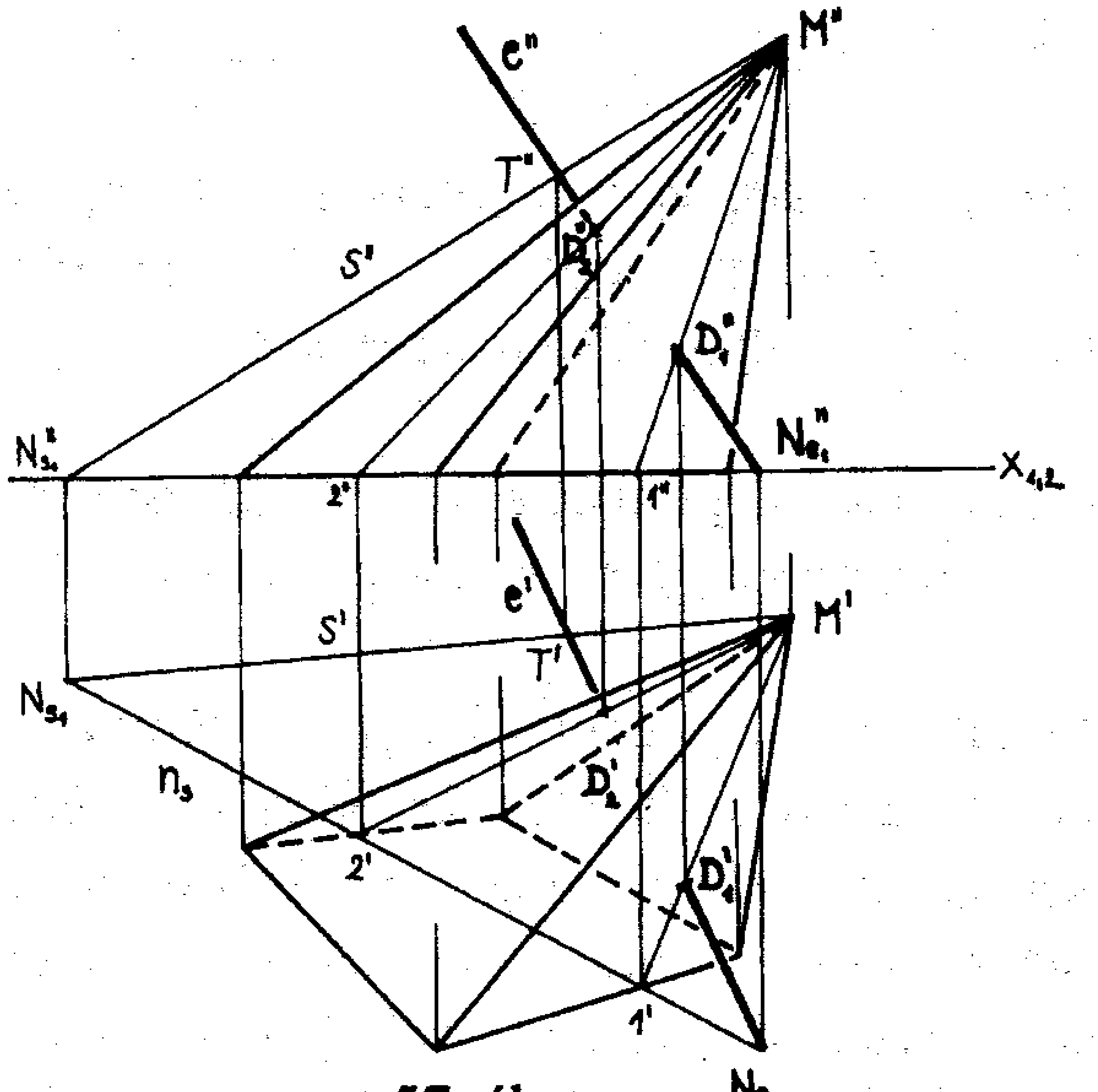
A hasáb származtatása a projektív térben azonos a gúláéval, csak a csúcspontot a végtelen távoli síkon kell megválasztani.

A hasábfelület alkotói egy adott iránnyal párhuzamos egyenesek. A hasábfelület két párhuzamos sík közé eső darabja a *hasáb.* A párhuzamos síkokba eső sokszögek az alaplapok, *az oldallapok együttese a hasáb palástja. Egyenes* a hasáb, ha alkotói merőlegesek az alaplap síkjára, minden más esetben *ferde* hasábnak nevezzük. Az egyenes hasábok között kitüntetett szerepe van a *szabályos* hasáboknak, melyeknek alaplapja szabályos sokszög. A kocka egy különleges szabályos hasáb. Síklapú testek ábrázolásával már az előző fejezetekben foglalkoztunk.

Gúla és hasáb metszése egyenessel

Egy egyenes a konvex gúlát vagy hasábot legfeljebb két pontban metszheti. (Egy hasáb illetve gúla akkor konvex, ha alaplapja konvex.) Ezek a pontok lehetnek a paláston, vagy az alaplapon. Lehetne a feladatot sík és egyenes döféspontjaként szerkeszteni, de sok fölösleges munkát megtakaríthatunk, ha ki tudjuk előre választani éppen azt a két sokszöget, amelyekre a döféspont illeszkedik. Euklideszi szerkesztéssel egyenesen pontot csak egy másik egyenessel (vagy körívvel) metszve jelölhetünk ki. A metsző egyenesre célszerű olyan segédsíkot illeszteni, amelyik a gúlát vagy hasábot alkotókban metszi. A gúlát a csúcsára illesztett sík metszi alkotókban, hasáb esetében ez a sík párhuzamos a hasábalkotókkal. Ezeket szem előtt tartva gúla esetében a metsző egyenes és a gúla csúcspontja által meghatározott segédsíkot célszerű választani, míg hasáb esetén a segédsíkot a metsző egyenes és a hasáb alkotóinak iránya (a végtelenben fekvő csúcspontja) határozza meg.

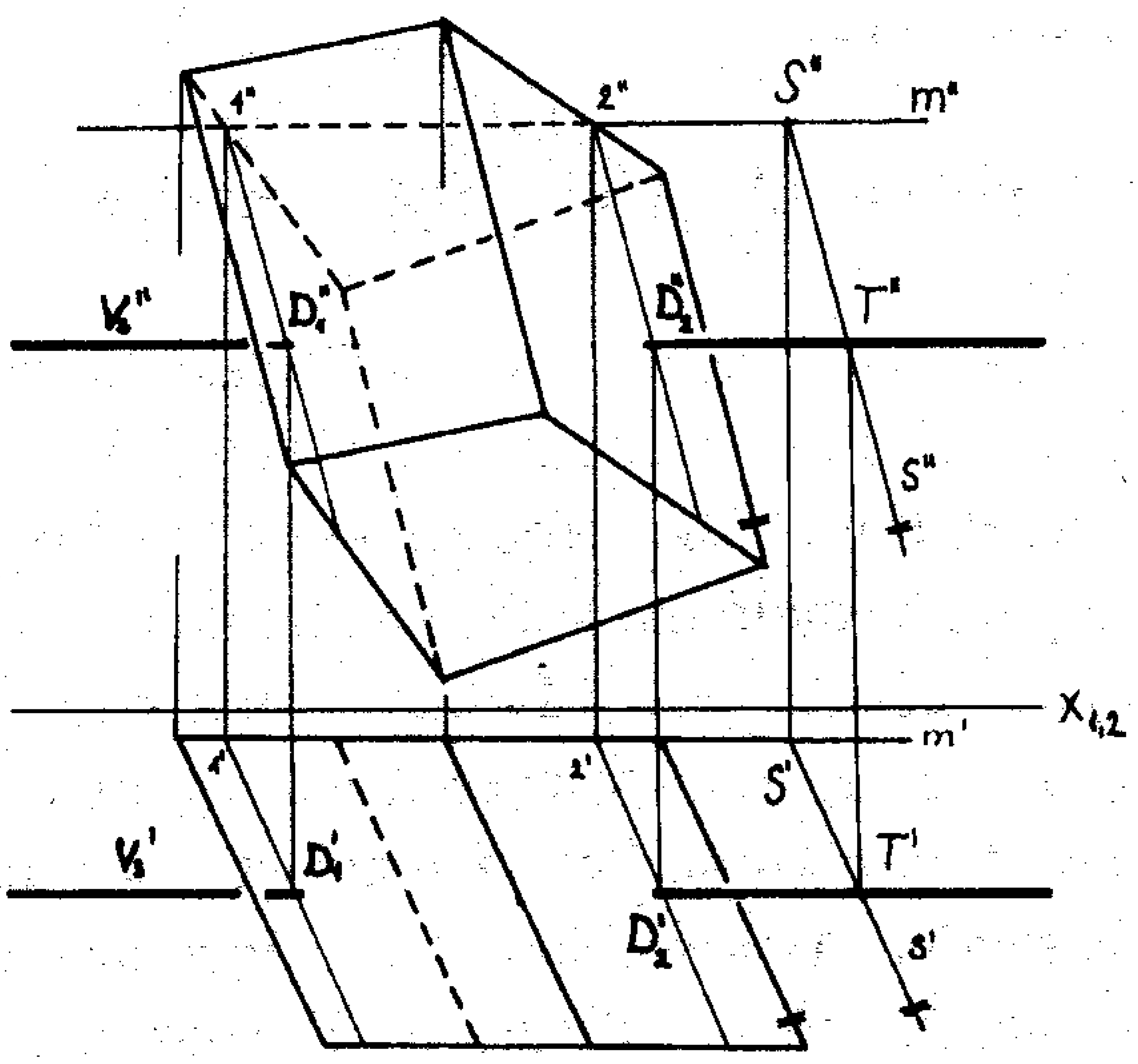
Gúla és egyenes döféspontja



57. ábra

A segédsík meghatározásához az egyenes tetszőleges T pontját kössük össze a gúla csúcspontjával. Ez a segédegyenes az N_{s1} pontban metszi az első képsíkot. Az N_{s1} pontot összekötve az e egyenes N_{e1} nyompontjával megrajzolhatjuk a segédsík első nyomvonalát. Ez a nyomvonal a gúla alapsokszögéből kimetszi azoknak az alkotóknak a talppontjait (1 és 2), amelyek a döféspontokon mennek át. Az alkotók első, majd második képeit megrajzolva az D_1 és D_2 döféspontokhoz jutunk. A metsző egyenes a döféspontok közötti szakaszon a gúla belsejében halad.

Hasáb és egyenes döféspontja



58. ábra

A szerkesztés menete az előbbihez hasonló. (58. ábra).Legyen a hasáb alapsíkja párhuzamos a második képsíkkal, az egyenes pedig harmadik vetítősugár. A vetítősugár tetszőleges pontjára illesztett **s** segédegyenes párhuzamos a hasáb éleivel, és annak alapsíkját az S pontban metszi. A segédsík (amely harmadik vetítősík) az alapsíkot v-vel párhuzamos **m** egyenesben metszi. A döféspontok az **m** által kijelölt alkotók és az **e** egyenes közös pontjai.

Hasáb síkmetszése

A hasáb síkmetszete olyan sokszög, melynek csúcsai a hasábélekre illeszkednek, élei pedig az oldallapok és a metsző sík közös egyenesein levő szakaszok.

Hasáb síkmetszetét eddigi ismereteink fölhasználásával kétféle módon is meg tudjuk szerkeszteni:

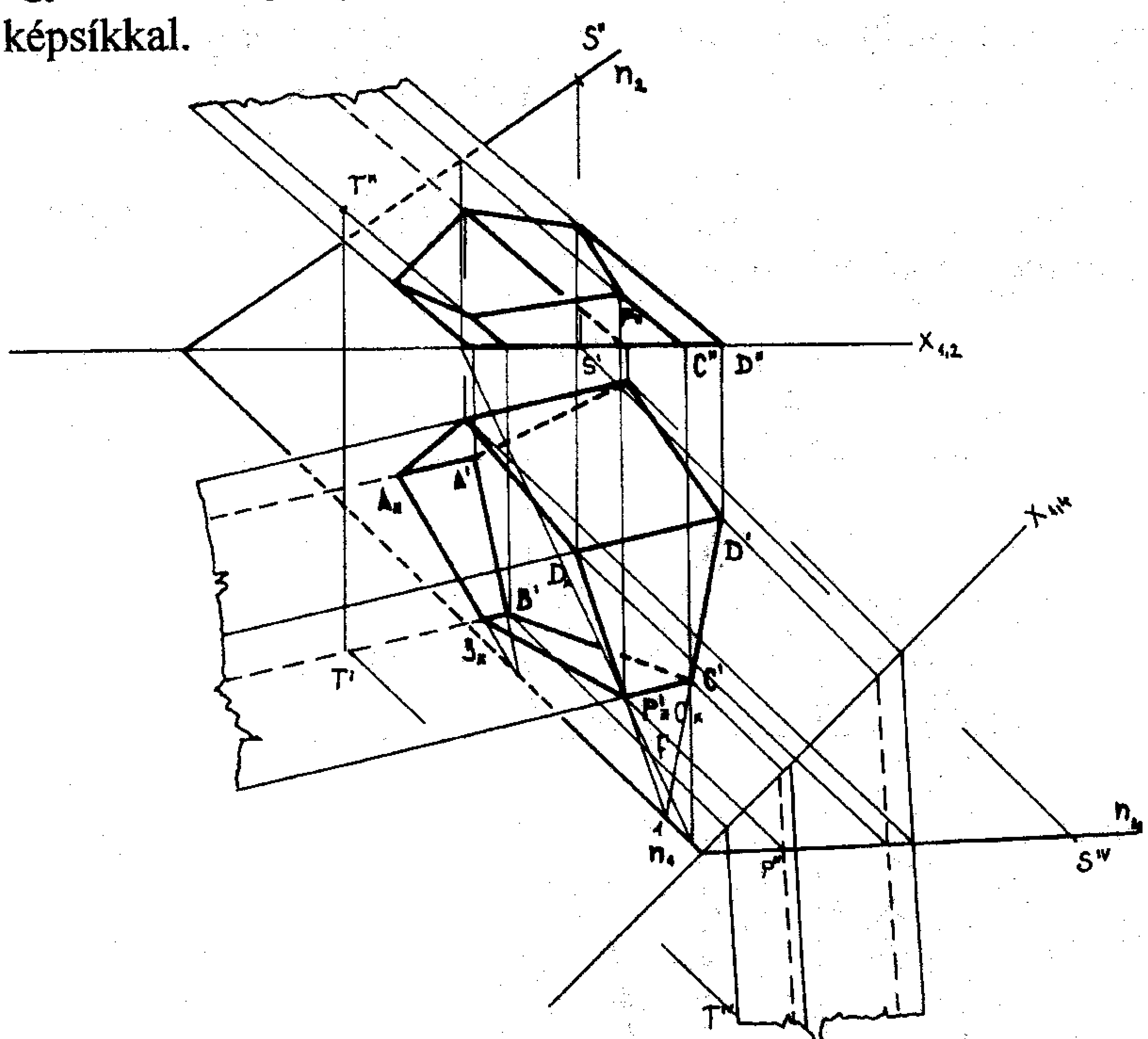
1. a hasábéleket egyeneseknek tekintve sík és egyenes döféspontjainak szerkesztésével egyenként,
2. transzformációval – a metsző síkot vetítősíkká transzformálva a döféspontok az új képen leolvashatók.

Az 59. ábrán egy első képsíkon álló ferde hasáb metszését szerkesztettük nyomvonalaival adott síkkal.

Sík és egyenes döféspontját csak a C pontra illeszkedő hasábél esetén szerkesztettük meg. Az élre illeszkedő második vetítősík tartalmazza az él síkbeli fedőegyenesét. Ennek első képe kijelöli a $P=C^x$ döféspont első képét. A többi döféspont hasonló módon szerkeszthető.

A metszetsokszöget célszerűen választott transzformációval is megkaphatjuk. Az $x_{1,4}$-et n_1-re merőlegesen választottuk. A sík élben látszó negyedik képét a második nyomvonalára illeszkedő S pont segítségével szerkesztettük. A hasáb alapsokszögének negyedik képe az új képtengelyben látszik. Egyik alkotóját T tetszőleges pontjával transzformáltuk, a többi alkotó vele párhuzamos. A döféspontokat a negyedik képről rendezővel vihetjük az első és második képre. A hasábnak csak az alap- és metsző sík közötti részén jelöltük a láthatóságot.

Vegyük észre az alap- és metszetsokszög élei közötti kapcsolatot! Az AB alapél és az A^xB^x metszetél egyenesei a sík első nyomvonalán metszik egymást. Ez természetes, mert közös oldallapon vannak, s a három sík közös pontja csak az alapsík és metszősík metszésvonalán lehet. A többi oldallapon levő egyenespárok is ugyanilyen tulajdonságúak. Az $A'A^x$, $B'B''$, ... pontokat összekötő egyenesek párhuzamosak egymással, hiszen hasábélek. Eszerint a hasáb alkotói a hasáb (bármely) két síkmetszete között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek, amely rendelkezik az affinitás tulajdonságaival: egyenestartó, illeszkedéstartó és párhuzamosságtartó. Egymásnak megfelelő oldalpárok a két sík metszésvonalán találkoznak. A metszésvonal pontonként önmagának felel meg, ez az affinitás tengelye. Az affinitás iránya megegyezik a hasábélek irányával. Ezt az affinitást akkor egyszerű a rajzlapon megjeleníteni, ha az egyik síkmetszet párhuzamos a képsíkkal.



59. ábra

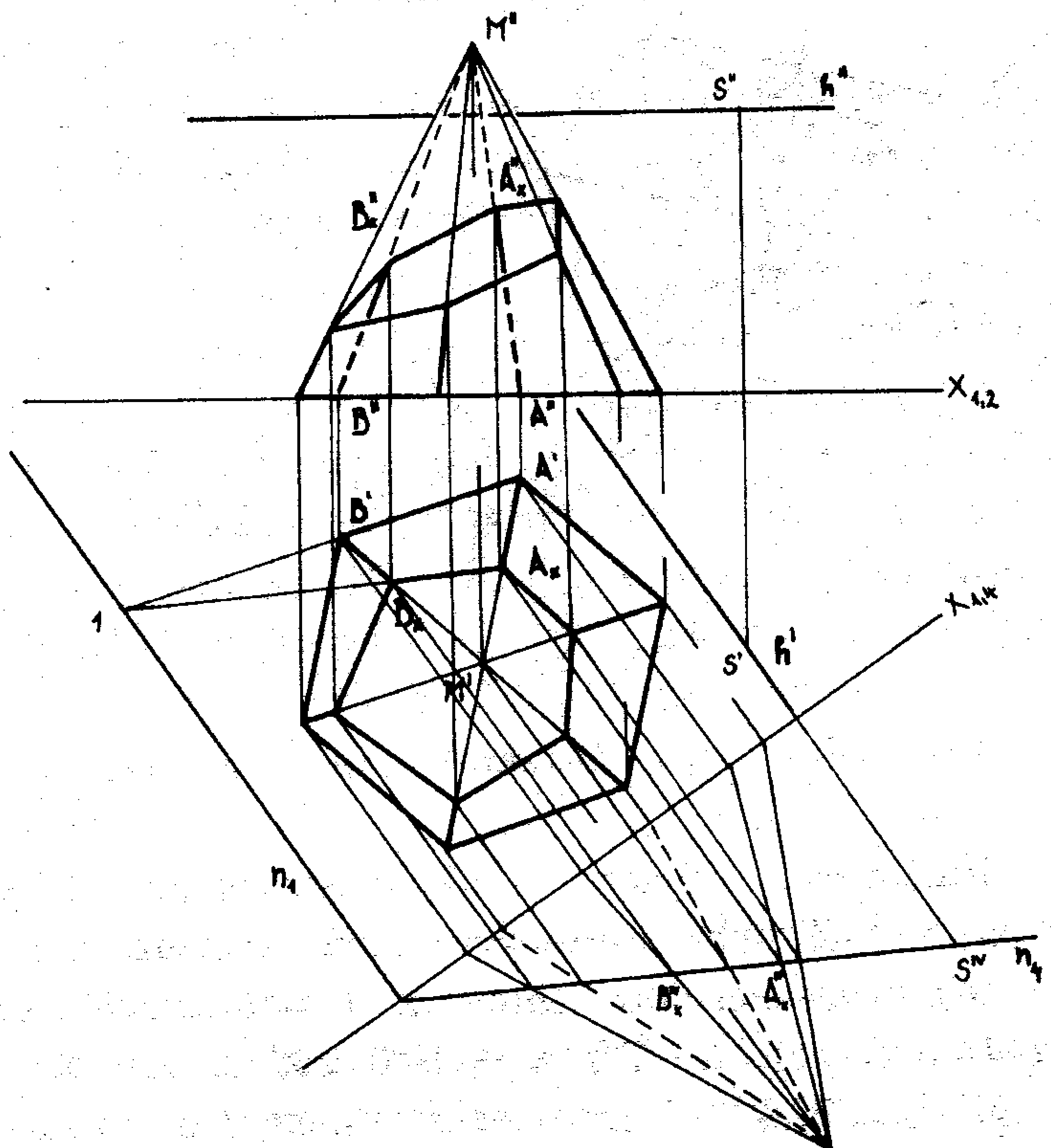
A fentiek ismeretében újabb szerkesztéstechnikai lehetőség áll rendelkezésünkre a hasáb síkmetszetének meghatározásához.

Kiválasztunk egy oldalélet (az ábrán a C-ből induló oldalél), és megszerkesztjük döféspontját (C^x) a metsző síkkal. Az élre illeszkedő oldallapon meghosszabítjuk a C'D' alapélet a metsző sík nyomvonaláig (1) – az alapsík és metsző sík metszésvonaláig –, majd a nyomvonal ezen pontját összekötjük az előbb szerkesztett döféspponttal. (C^x). Az $|1, C^x|$ egyenes az oldallap síkján van, de a metsző síkon is, vagyis illeszkedik rá a metszetsokszög egyik oldala. Ez a metszetsokszög-oldal kijelöli a következő oldalélen a (D^x) döféspontot. Az eljárást ismételve az összes él döféspontjához eljuthatunk.

Gúla síkmetszése

A gúla síkmetszése szerkeszthető az élek egyenkénti döféspontjaiból vagy vetítősíkká transzformálással, ugyanúgy, mint a hasáb esetében.

Metsszük el az első képsíkon álló szabályos hatoldalú gúlát n_1 nyomvonalával és **h** első fővonalával megadott síkkal! (60. ábra)



60. ábra

A szerkesztés leírását mellőzzük. Vizsgáljuk meg, milyen összefüggés van az alapsokszög és a metszetidom között! Az egy gúlalapra illeszkedő alapél és metszetél itt is a két sík metszésvonalán, az első nyomvonalon találkozik (A'B' és A^xB^x). A megfelelő pontokat összekötő egyenesek a gúla csúcspontjára illeszkednek. A gúla alkotói a gúla két tetszőleges síkmetszete között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek, de ez különbözik attól, amellyel a hasáb síkmetszeteinél találkoztunk. A párhuzamos szakaszok megfelelői itt nem párhuzamosak (lásd: szabályos hatszög párhuzamos oldalait). Ez a leképzés nem affinitás, hanem centrális kollineáció. A *centrális kollineáció* két sík közötti kölcsönösen egyértelmű, egyenestartó és illeszkedéstartó leképzés. A megfelelő egyenesek közös pontjai a két sík metszésvonalára, *a kollineáció tengelyé*re illeszkednek, a megfelelő pontokat összekötő egyenesek pedig *a kollineáció centrumá*ban metszik egymást. A centrális kollineációt egyértelműen meghatározza a tengelye, centruma és egy megfelelő pontpárja. Ezek ismeretében tetszőleges pont képe megszerkeszthető.

A fentiek ismeretében gúla síkmetszetét úgy is megszerkeszthetjük, hogy megkeressük egy élének döféspontját, majd lapról-lapra haladva centrális kollineáció segítségével szerkesztjük meg a többi élen a döféspontokat.

A projektív térben az affinitás a centrális kollineáció speciális esete, amikor a kollineáció centruma a végtelenben van. Ha a kollineáció tengelye van a végtelenben (a metsző síkok párhuzamosak) a kollineáció centrális hasonlóság lesz. (Pl. gúla párhuzamos síkmetszetei.) Ha a kollineáció tengelye és centruma is a végtelenben van, a leképzés egybevágóság. Ilyenek a hasáb párhuzamos síkmetszetei.

Ilyen értelemben a geometriai transzformációk legtágabb halmaza a kollineáció, amelynek részhalmazai az affinitások, hasonlóságok és egybevágóságok.

Gúla és hasáb palástjának síkba terítése (hálója)

A gúla és hasáb lapjait alkotó síkbeli sokszögeket egy síkba teríthetjük, ha a testet határoló felületet élei mentén fölvágjuk.

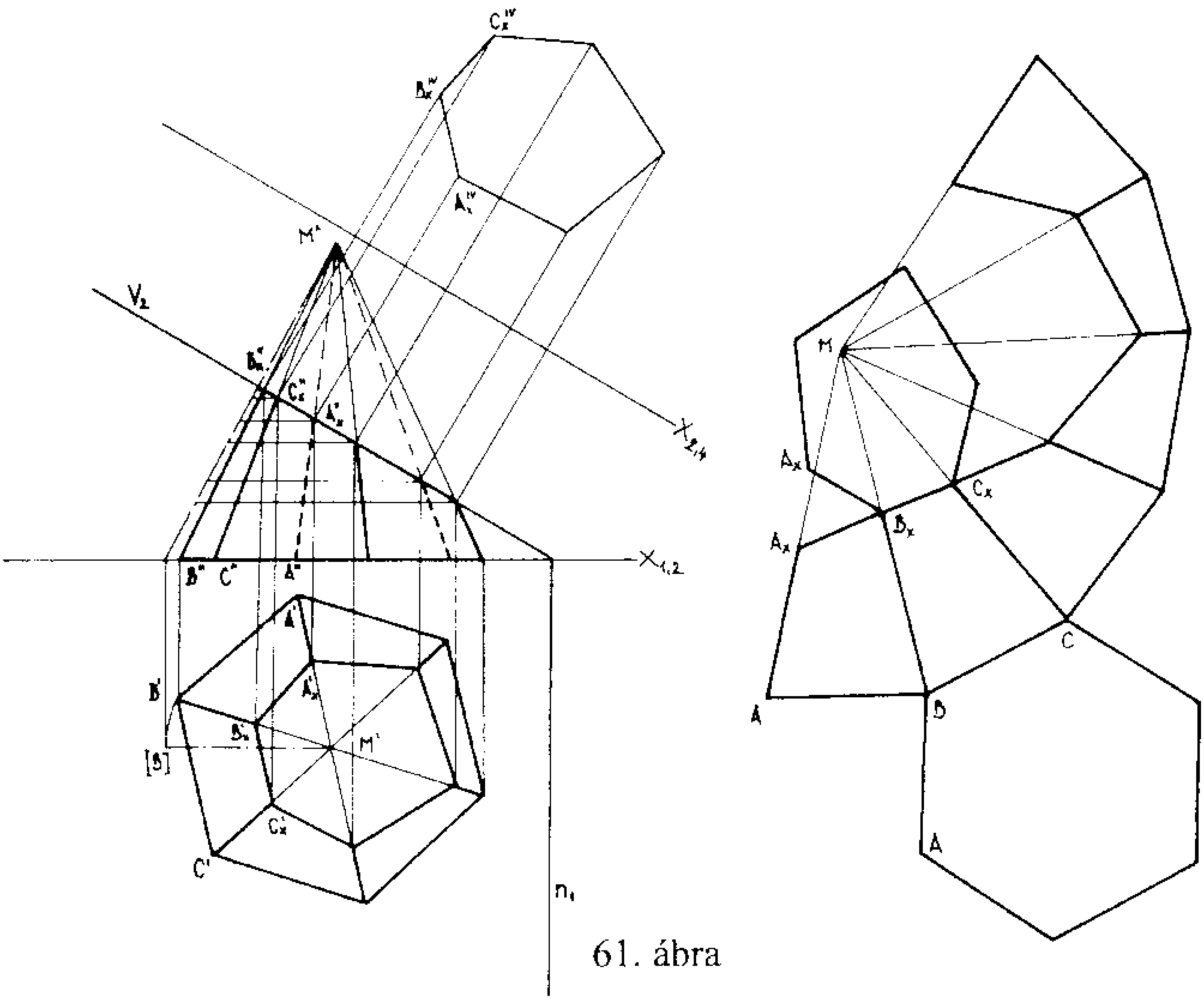
A háló megszerkesztése nemcsak modellkészítéshez szükséges. Két tetszőleges felületi pont (pl. egyenessel való döféspontok) adott feltételek szerinti, pl. legrövidebb összekötése csak a kiterített felületen szerkeszthető meg. A sokszögoldalakat általában háromszögekre bontjuk és ezek valódi méretéből rakjuk össze a sokszögeket. A belső pontok megkeresése alkotókra illesztve, arányos osztás segítségével történhet.

Gúlapalást síkbaterítése

A 61. ábrán egy első képsíkon álló csonkagúlát ábrázoltunk, melynek fedőlapja második vetítősíkban van. A gúla oldaléleinek hosszát legegyszerűbben rotációval szerkeszthetjük meg. Az M csúcspontra illeszkedő első vetítősugár körül forgattuk az éleket a második képsíkkal párhuzamos helyzetbe. A lemetszett darabok arányos osztással (a végpontokat összekötő $x_{1,2}$-vel párhuzamosan vetítve) szerkeszthetők.

Kiterítésnél célszerű a teljes gúlafelszínt ábrázolni, s azon bejelölni a lemetszést. A mérethű alaplap BC oldalára csatlakoztatjuk a BCM háromszöget, ennek oldalaihoz illesztjük a további háromszöglapokat. Bejelöljük rajtuk a csonkolás csúcspontjait és végül elhelyezzük a fedőlapot valódi nagyságban.

A palást síkba terítésénél meg kell állapodnunk abban, hogy a kiterítésben a felület melyik oldalát mutatjuk: a színét vagy a visszáját? Ha ugyanis a síkba terített lapokat visszájára fordítva "ragasztjuk" újra össze, az eredeti test tükörképének felszínét kapjuk.



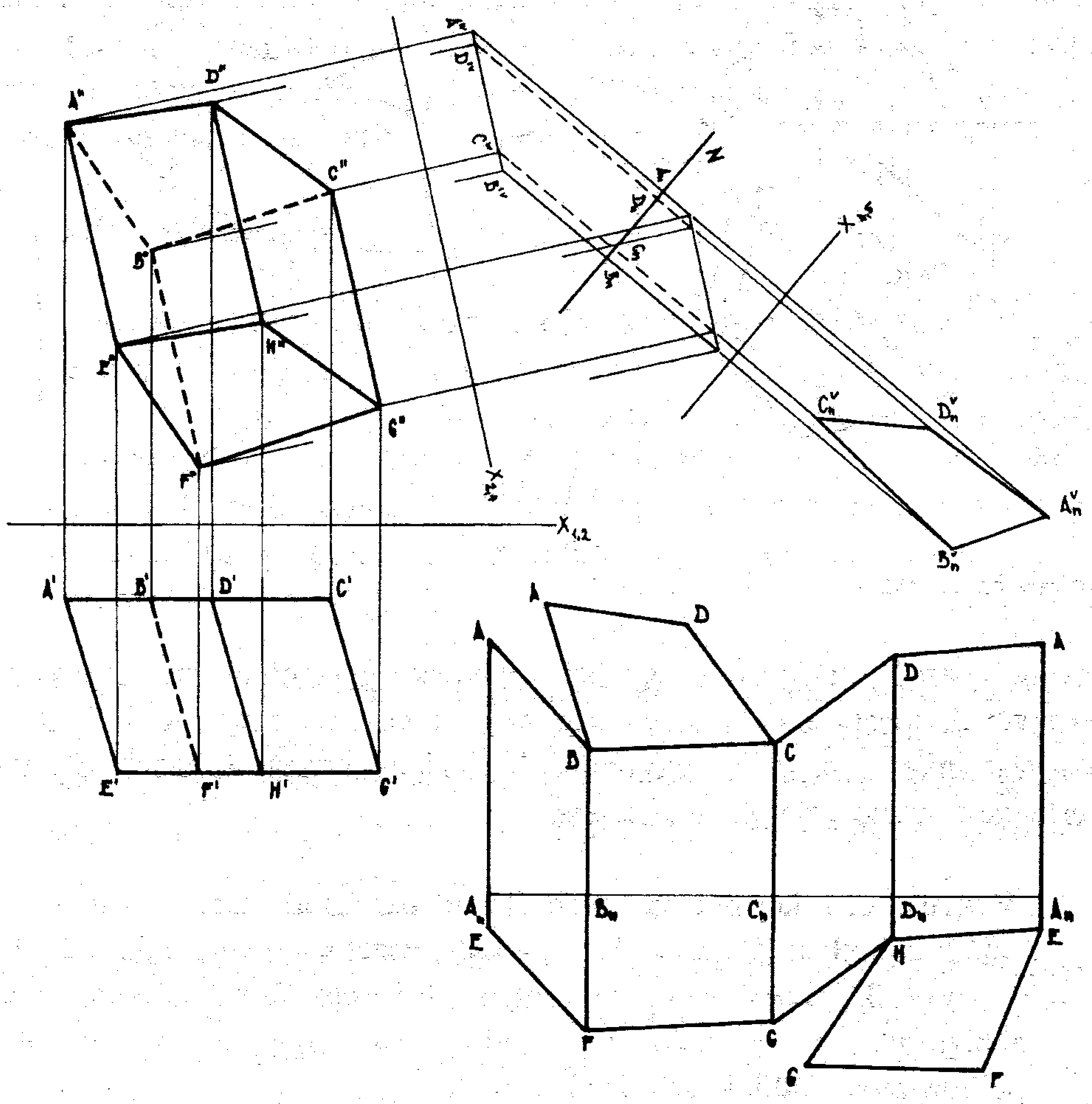
61. ábra

Hasáb kifejtése

Egyenes hasáb palástja egy téglalap, melynek egyik oldala az alapsokszög kerületével, másik oldala a testmagassággal egyezik meg. A ferde hasáb kiterítése már nem ilyen egyszerű. Szükséges hozzá a hasáb alkotóira merőleges, úgynevezett *normálmetszet*.

Vegyük fel a képsíkot a hasáb éleivel párhuzamosan! Akkor az élek valódi méretben látszanak és a normálmetszet síkja vetítősík. (62. ábra) A negyedik vetítősíkban levő normálmetszet első és második képét nem ábrázoltuk. A normálmetszet valódi nagyságát a metsző síkkal párhuzamos ötödik képen kaphatjuk meg.

A palást kiterítéséhez minden adat a rendelkezésünkre áll. Húzzunk egy félegyenest, majd másoljuk rá rendre a normálmetszet oldalait (A_n, B_n, C_n, D_n, A_n). Ezekben a pontokban az alkotók merőlegesek az "alapélekre". A második képről leolvasható előjeles alkotóhosszakat a megfelelő élekre mérjük. Az alsó és felső végpontokat összekötő egyenesek párhuzamosak – az oldallapok paralelogrammák. A palást egyik élére az alap- illetve fedőlapokat is rászerkesztjük. Tetszőleges belső pontot a rá illeszkedő hasábalkotó segítségével szerkeszthetünk.



62. ábra

Gúlák és hasábok áthatása

Az áthatás szerkesztésén annak a zárt törött vonalnak a megszerkesztését értjük, amely a két test felületének közös része. Ezt elméletileg igen egyszerű meghatározni. A testek oldallapjainak metszésvonalait megszerkesztjük, majd azokat a szakaszokat tekintjük, amelyek mindkét test felületére illeszkednek. Másképpen: megszerkesztjük egyik test minden élének döféspontját a másik testtel, majd a másik éleinek metszését az elsővel. A döféspontokat összeköthetjük bármelyik test felületén haladó szakaszokkal. Az áthatási vonal egy vagy két zárt darabból állhat. Ha az áthatás két térsokszögből áll, az egyik test "átfúrja" a másikat, vagyis az egyik test minden alkotója részt vesz az áthatásban. Ekkor a másik testen van legalább két olyan él, amelyiken nincs döféspont. Ezt *teljes áthatás*nak nevezzük.

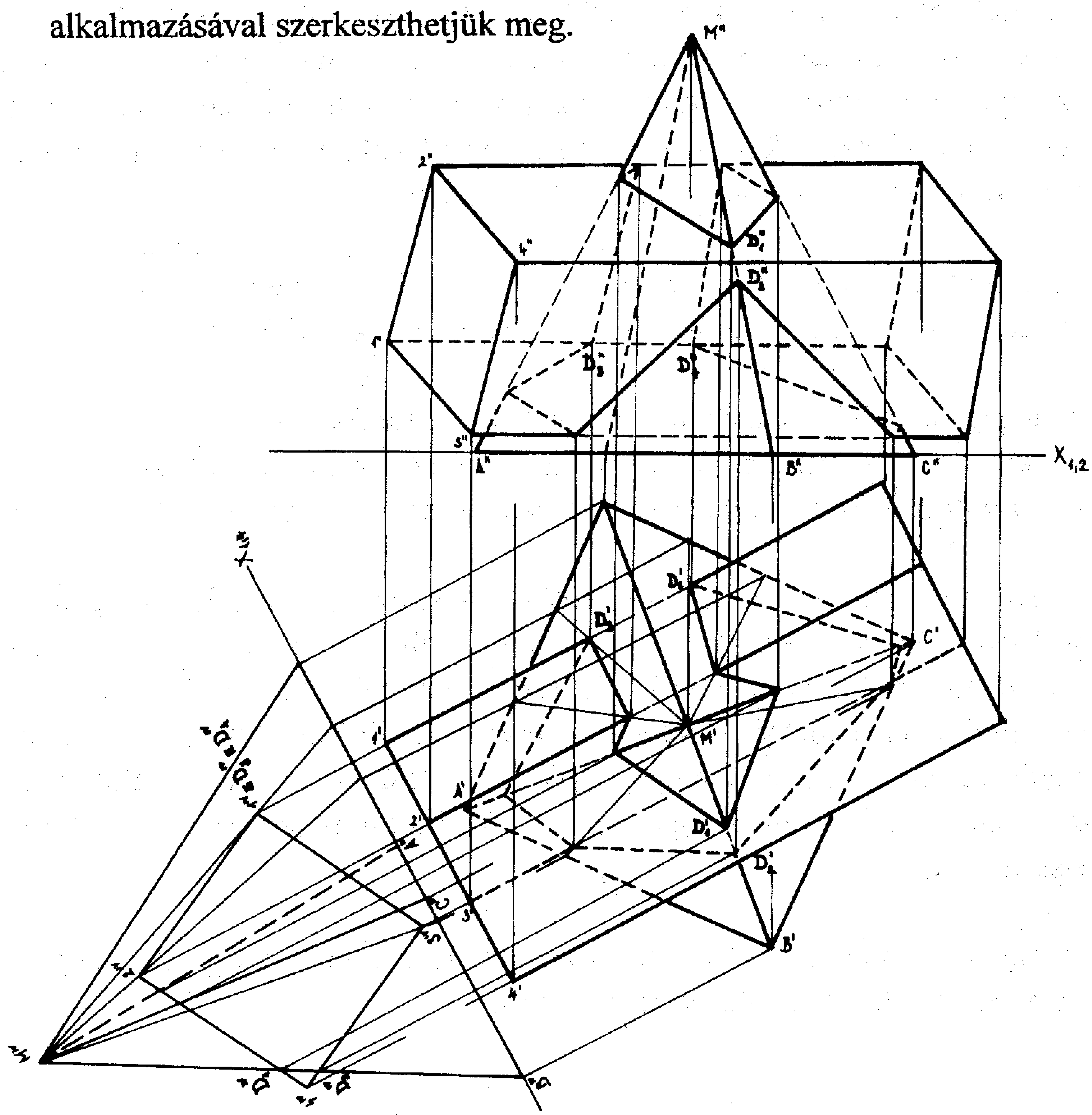
Ha mindkét testen van olyan él, amelyik nem vesz részt az áthatásban, az áthatási sokszög egy darabból áll, ezt *bemetszés*nek hívjuk.

A legegyszerűbb esetekben az áthatások szerkesztésére vannak célszerű szerkesztési módszerek, de ezek néha kiegészítésre szorulnak. Az eddig elmondottak az összes lehetséges áthatási esetre vonatkoznak.

A gyakorlatban előforduló áthatásokban gyakran szerepel hasáb (gerendák, oszlopok, kémények). Ilyenkor legegyszerűbb a hasábot vetítőhasábbá transzformálni (ez legfeljebb két lépésben elérhető). Az áthatási térbeli törött vonal mindkét felületre "rá van írva", ezért a hasáb élben látszó oldallapjainak a gúla belsejébe eső része megegyezik az áthatási sokszögvonal vetületével is, melynek a hasáb illetve gúlaélekre eső csúcspontjait az előző képekre visszavihetjük.

Szerkesszük meg egy első képsíkon álló gúla valamint egy első képsíkkal párhuzamos élű hasáb áthatását (63. ábra) !

Transzformáljuk a hasábot vetítőhasábbá ($x_{1,4}$ merőleges a hasábélekre). A hasáb negyedik képe négyzet. Ennek a gúlába eső része az áthatási sokszög negyedik képe. Itt leolvasható az is, hogy melyik élek nem vesznek részt az áthatásban. Ebből kiderül, hogy az itt fölrajzolt áthatás bemetszés lesz. A gúlaélek hasábbal való döféspontjai negyedik képről rendezővel visszavihetők. A MB él második képén a döféspontok a negyedik képről leolvasható magasság fölmérésével adódnak. Az 1 és 2 és 3 csúcspontokra illeszkedő hasábélek metszését a gúlával segédsíkok alkalmazásával szerkeszthetjük meg.



63. ábra

A gúla csúcsára és az 1-es hasábélre illesztett sík negyedik vetítősík, amelyik a gúlát két alkotóban metszi. Az alkotók képe első és második képen is szerkeszthető és kimetszi az 1 élen a döféspontokat. A 2 élen az eljárás az előbbivel azonos. A negyedik képen az áthatási pontok összekötésének sorrendje követhető, ugyanez a sorrend az első és második képek összekötésénél is. Az ábrán a két test együttesét ábrázoltuk láthatóság szerint.

Áthatások szerkesztésénél a láthatóságot megállapodás szerint többféle módon tüntethetjük fel:

1. mindkét test (vagy palást) megmarad,
2. csak az egyik test (vagy palást) láthatóságát kérjük úgy, hogy a másik testet eltávolítva gondoljuk (ez a leggyakoribb),
3. csak a két test közös részét (a *magidom*ot) ábrázoljuk.

Az előbbi feladatmegoldás csak akkor alkalmazható, ha sikerül a hasábot vetítőhasábbá transzformálni. A Monge-féle kétképsíkos ábrázolásban ez természetes, de axonometriában már csak különleges helyzetű hasáb esetén egyszerű a szerkesztés.

Az illeszkedési és metszési feladatok mindegyik ábrázolási rendszerben hasonló gondolatmenettel is megoldhatók – egyenes illesztése, sík és egyenes döféspontja, árnyékszerkesztés. Gúla és hasáb áthatásának szerkesztésére is létezik olyan megoldási módszer (sorozó módszer), amelyik a többi ábrázolási rendszerben is ugyanolyan elven végezhető. Sőt, az eljárás nem tesz különbséget gúla és hasáb között.

AXONOMETRIA

Az axonometrikus ábrázolás alapjai

A Monge-féle kétképsíkos ábrázolásban, a tárgyak ügyes elhelyezése esetén, méreteik közvetlenül leolvashatók a képekről. Ezek a képek azonban ilyenkor sohasem szemléletesek. Ha egy épület vagy tárgy alakját, jellegét szeretnénk megmutatni, olyan vázlatokat készítünk róla, amelyik kifejezi lapjainak, éleinek párhuzamosságát, a metsződéseket, esetleg az élhosszak egymáshoz viszonyított nagyságát. Ennek az ábrázolási módnak régi hagyományai vannak. Elméleti alapjait és geometriai összefüggéseinek bizonyítását az 1800-as évek második felében (kb. Monge-zsal egyidőben, de tőle teljesen függetlenül) dolgozták ki.

Helyezzünk el tetszőlegesen egy tárgyat az ismert háromtengelyű derékszögű koordinátarendszerben. A koordinátarendszer egymásra merőleges tengelyei három koordinátasíkot határoznak meg. Létrehozhatjuk a tárgy merőleges vetületét ezeken a síkokon. Belőlük a térbeli tárgy helyzete a koordinátarendszerhez viszonyítva mindig egyértelműen meghatározható. Válasszunk a térben tetszőlegesen egy síkot – ezt nevezzük (axonometrikus) képsíknak! Vetítsük a *térbeli koordinátarendszert a tárggyal és vetületeivel együtt* a kiválasztott síkra egy adott iránnyal *párhuzamosan*!

Az így kapott képet nevezzük *axonometrikus kép*nek. Axonometrikus ábrázolás során tehát egy tetszőlegesen választott síkra pl. a rajzlap síkjára vetítjük párhuzamosan a térbeli koordinátarendszerben elhelyezett tárgyat, legalább az egyik koordinátasíkon megadott vetületével együtt.

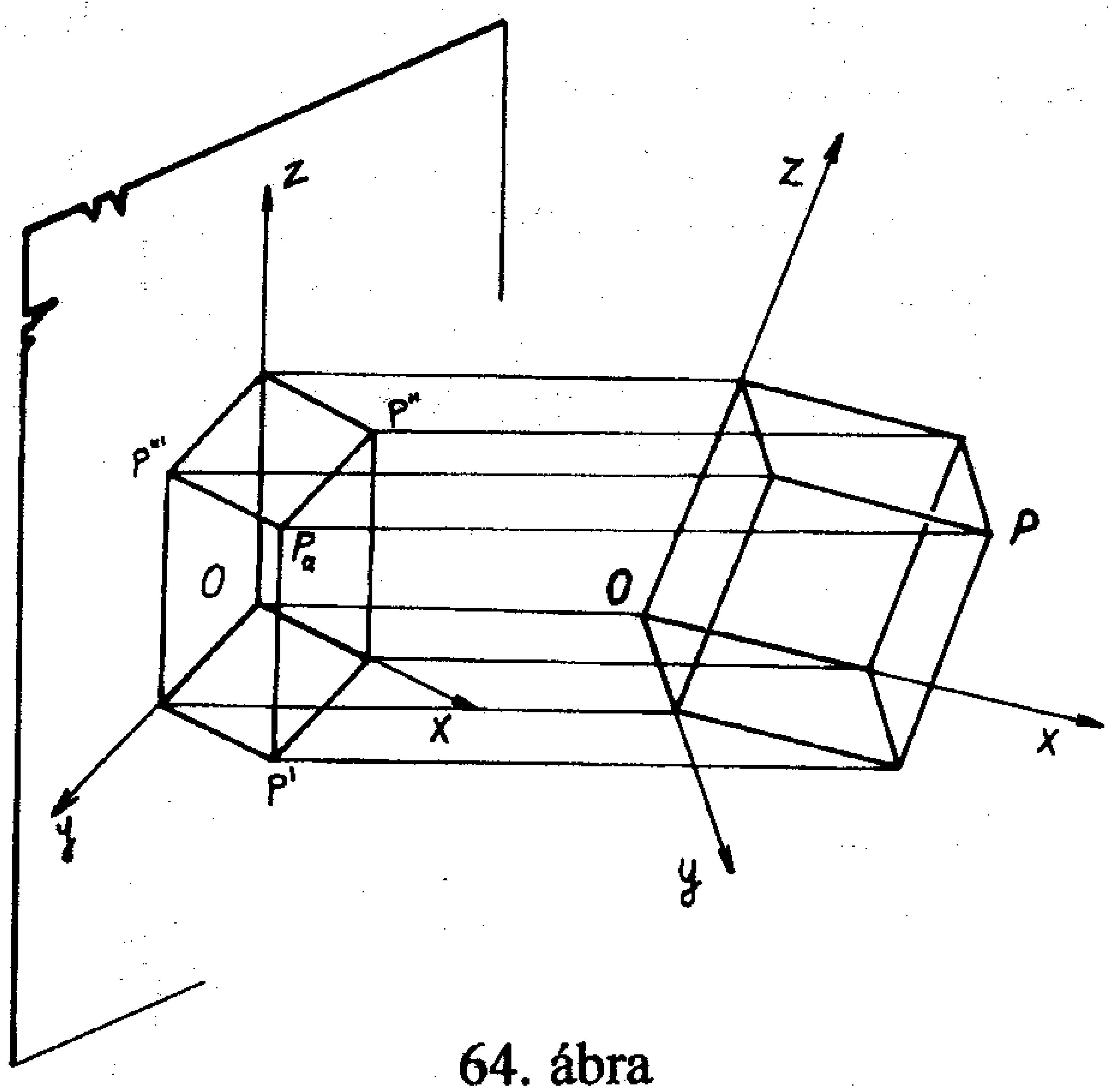
Az ábrázolás (leképezés) síkját *axonometrikus képsík*nak, a párhuzamos vetítőnyalábot *axonometrikus vetítősugarak*nak nevezzük. A koordinátarendszer vetületét *tengelykereszt*nek hívjuk és x, y, z-vel jelöljük.

A rekonstrukció (visszaállítás) a térbeli koordinátarendszer helyének megállapításával kezdődik, majd benne meghatározzuk az alakzat helyét a vetület(ek) segítségével.

Axonometrikus ábrázolásban egy alakzatnak négy vetülete lehet: három a koordinátarendszerben, a negyedik az axonometrikus képsíkon, maga az axonometrikus vetület. A párhuzamos vetítés iránya az axonometrikus képsíkhoz képest lehet merőleges vagy ferde. Eszerint megkülönböztetünk *merőleges* axonometriát és *ferdeszögű* vagy *klinogonális* axonometriát.

Klinogonális axonometria

Ha éleivel a koordinátatengelyekre illeszkedő kocka axonometrikus képét szemléljük, látható, hogy térben egyenlő hosszúságú szakaszok (a kocka élei) képei a tengelyek irányában nem egyenlő hosszúak (64. ábra). (Az egymással párhuzamos élek képe párhuzamos és azonos hosszúságú.)



64. ábra

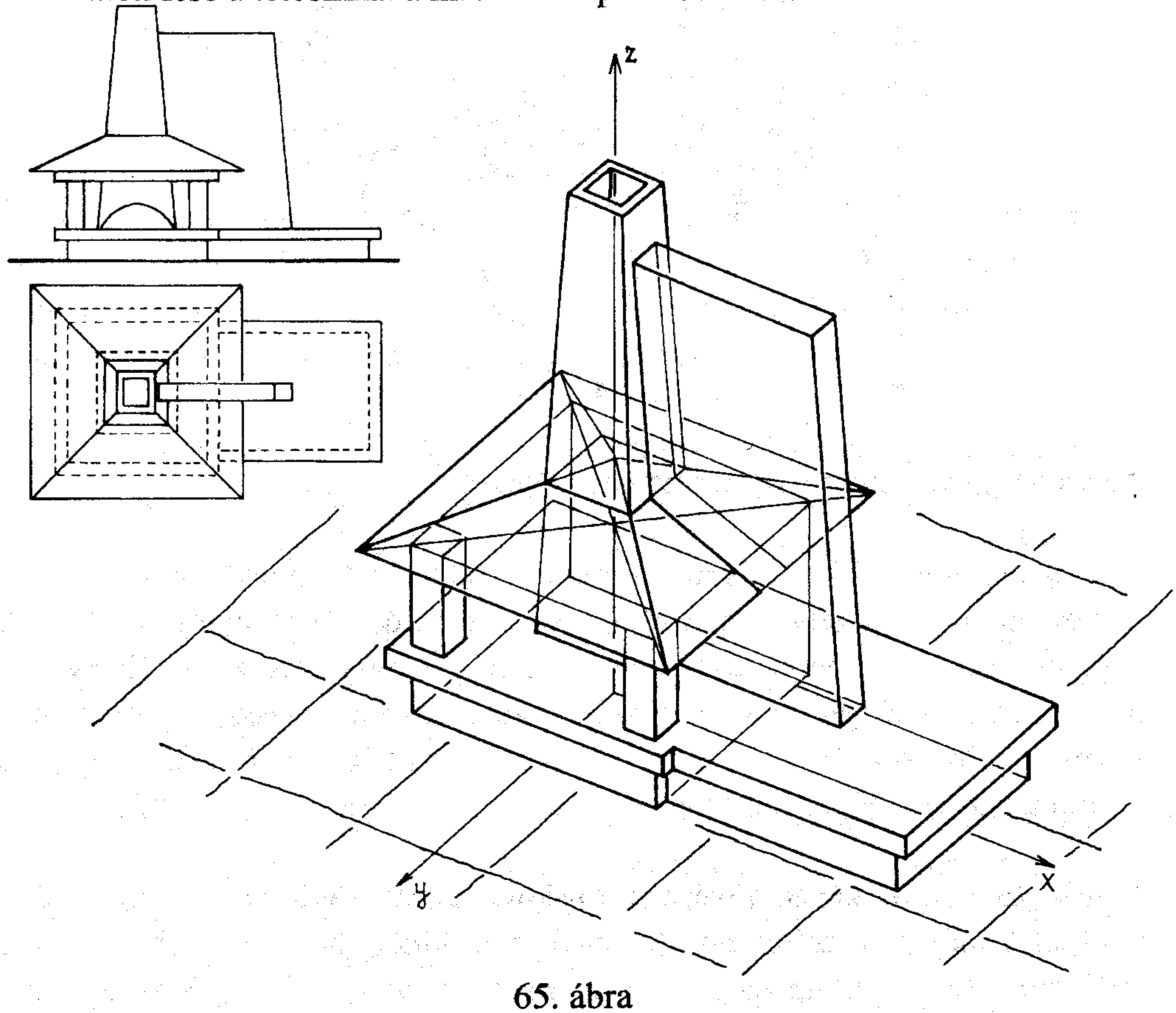
Az árnyék is tekinthető axonometrikus képnek.

A tengelyirányú térbeli szakasznak és vetületének arányát *rövidülés*nek nevezzük. Az x tengely irányú rövidülés jele pl. q_x. Ez az arány lehet 1-nél nagyobb is. Az axonometria jellemezhető a tengelykereszt vetületével, s benne a tengelyirányú rövidülésekkel. Szemléltető ábrázoláskor rajzolunk egy szemre szép kockát, s az egy csúcsból induló éleit tekinthetjük a koordinátatengelyek vetületének, a kocka csúcsai kijelölik a rövidüléseket.

Pohlke (a berlini képzőművészeti főiskola tanára 1860 körül) *tétele*: Egy pontból kiinduló tetszőlegesen felvett három különböző szakaszhoz mindig található olyan párhuzamos vetítési irány, hogy a három szakasz által meghatározott egyenesek egy térbeli derékszögű koordinátarendszer síkbeli vetületének tekinthetőek.

E tétel alapján az axonometria tengelykeresztjét tetszőlegesen megválaszthatjuk (a rövidüléseket nem). Megállapodás, hogy a z tengelyt mindig "függőleges helyzetűnek " ábrázoljuk. Ebben a rendszerben ábrázolhatunk testeket (épületeket), és megoldhatjuk a Monge-féle ábrázolás minden ábrázolási, illeszkedési és metszési feladatát.

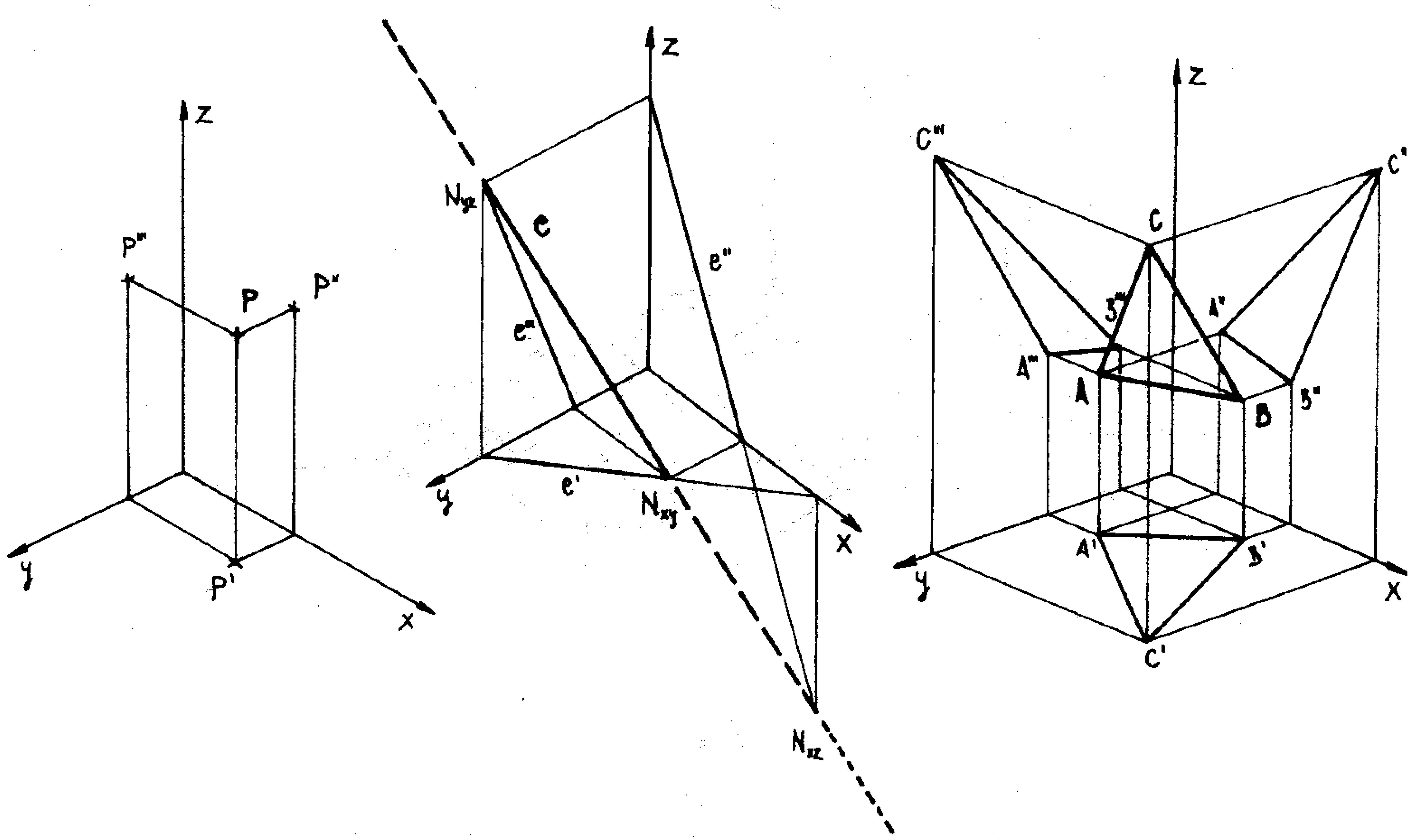
A 65. ábrán látható épületnek merőleges vetületei segítségével elkészíthetjük axonometrikus képét. Alaprajzát a rövidülési arányok ismeretében fölrajzoljuk, majd a magassági méreteket a z irányú rövidülésnek megfelelően ábrázoljuk. A csonkagúla alakú kémény metszése a tetősíkkal a második képről leolvasható.



65. ábra

Az axonometrikus ábrázolás önmagában is teljes ábrázolási rendszer, alkalmazásához nem szükségesek a kétképsíkos ábrázolási ismeretek. A Monge-féle ábrázoláshoz hasonlóan itt is kiindulhatunk a térelemek ábrázolásából. A pont, egyenes és sík ábrázolása itt is két képpel történik: axonometrikus képével és valamelyik koordinátasíkra eső vetületével. A többi koordinátasíkra eső vetület ezekből szerkeszthető (66. ábra).

Az axonometriában ábrázolt térelemeknek az axonometrikus képsíkokhoz viszonyított különleges helyzetét elérni, vagy a térelemek merőlegességét felismerni axonometriában kissé körülményesebb. Az axonometriát leggyakrabban szemléltetésre használjuk. Ez a körülmény befolyásolja a tengelykereszt és a rövidülések megválasztását is. Tetszőleges szabad axonometriában először ábrázolunk egy "szemléletes kockát", majd ehhez illesztjük a tengelykeresztet.



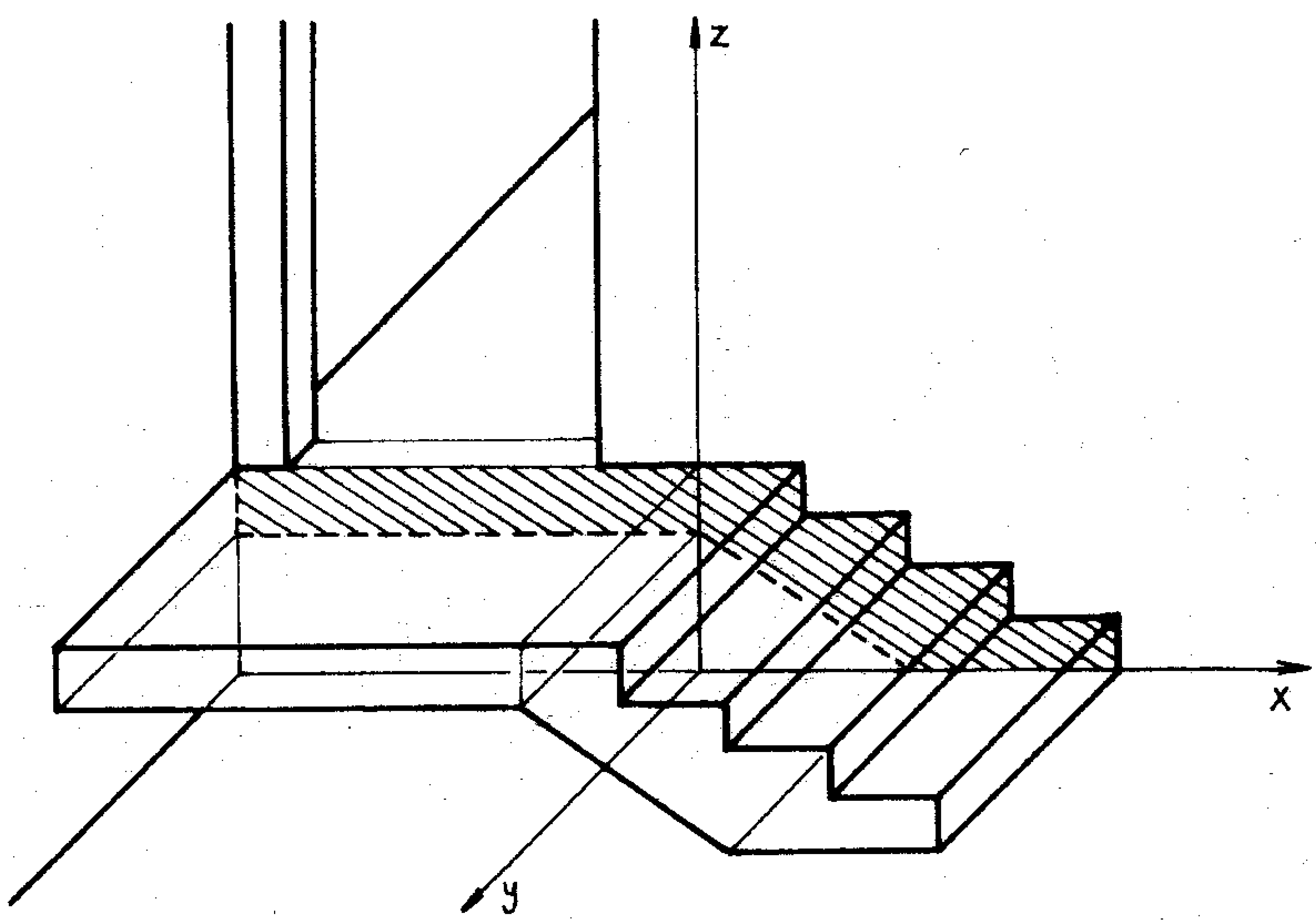
66. ábra

A ferde axonometria különleges esetei

Ha valamelyik koordinátasík az axonometrikus képsíkkal párhuzamos helyzetű, a szerkesztési munka lerövidül, hiszen az a vetület egyúttal az axonometrikus kép része is.

*Frontális axonometriá*ban valamelyik függőleges képsík pl. a zx sík párhuzamos az axonometrikus képsíkkal, az x és z tengely mentén rövidülés nincs. A harmadik tengely képe és rövidülése a vetítési iránytól függ.

Épületek ábrázolásánál igen gyorsan szemléletes képhez juthatunk, ha a homlokzat síkjából az előreugró tagozatokat a tetszőlegesen választott y irányba kiemeljük (67. ábra). A valóságos viszonyokat jól megközelítő képet kapunk, ha y tengely irányát az x, z tengelyek szögfelezőjéhez közelinek választjuk, és a rövidülés értékét $1/2 \leq q_y \leq 2/3$ között adjuk meg.



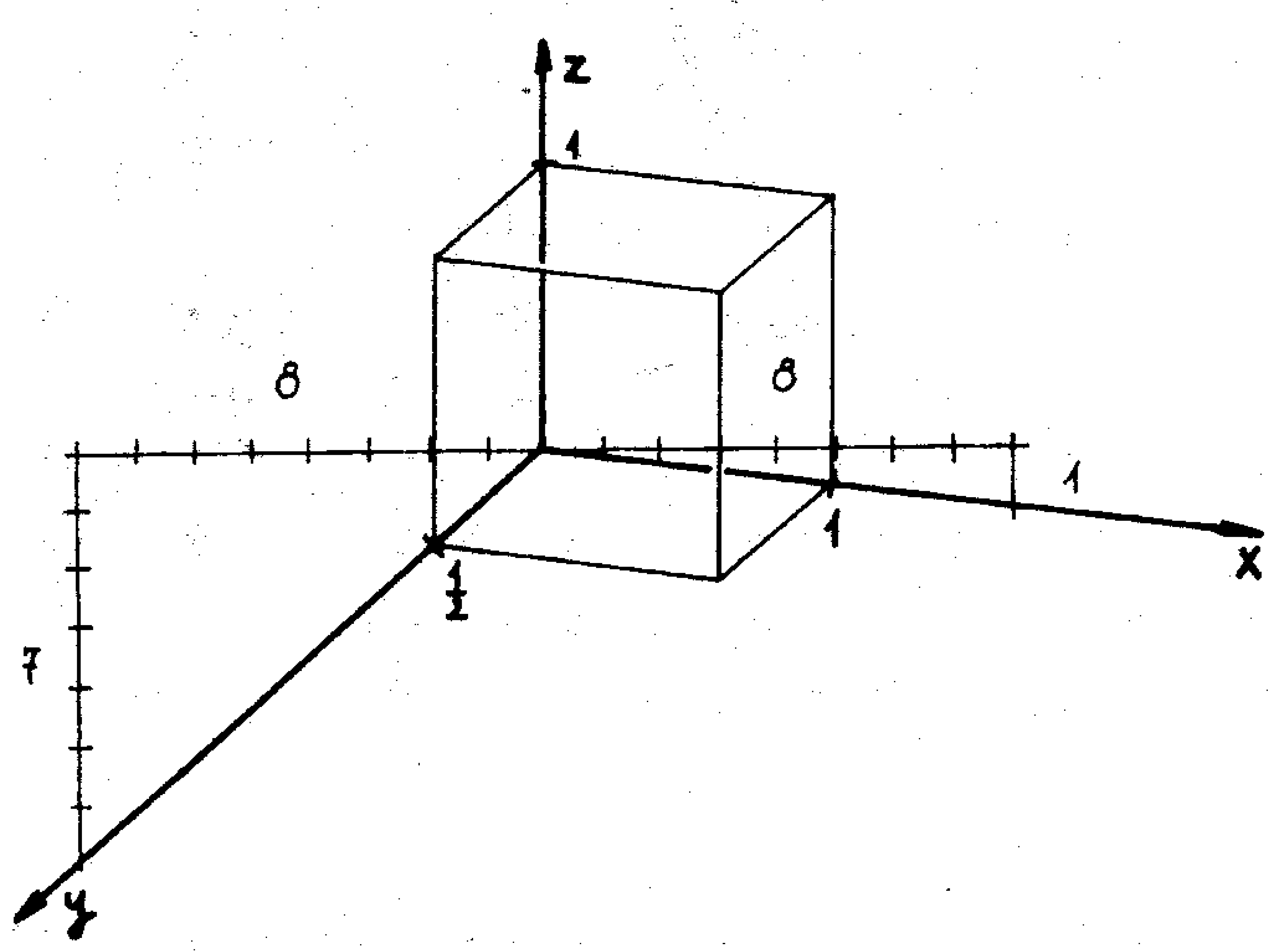
67. ábra

A frontális axonometriának azt a különleges esetét, amikor az y tengelyen nincs rövidülés, *kavalier-axonometriá*nak nevezzük. Ekkor nemcsak a homlokzati méretek olvashatók le az ábrákról, hanem azok mélysége vagy kiemelkedése is. Hátránya, hogy a kép kissé nyújtott, kevésbé szemléletes.

Ha a ferde axonometria képsíkja az xy síkkal párhuzamos, akkor az alaprajzok látszódnak valódi méretben. A z tengely irányában bármilyen rövidülést választhatunk. Fölülnézetes változatát *madárvetület*nek, az alulnézeteset *békavetület*nek nevezzük. A két kép csak láthatóságban különbözik egymástól. Ez az ábrázolás igen praktikus térképek, tájékoztató helyszínrajzok szemléletessé tételére.

Ha a harmadik irányban mindent a valódival megegyező méretben emelünk ki (q_z=1), akkor úgynevezett katonavetülethez jutunk.

A szabad axonometriának egy szívesen használt változata a műszaki tengelykereszt (68. ábra). Itt a különlegesen választott tengelyelrendezéssel és az adott rövidülésekkel a merőleges vetületek képiességét elérő axonometrikus képhez juthatunk.

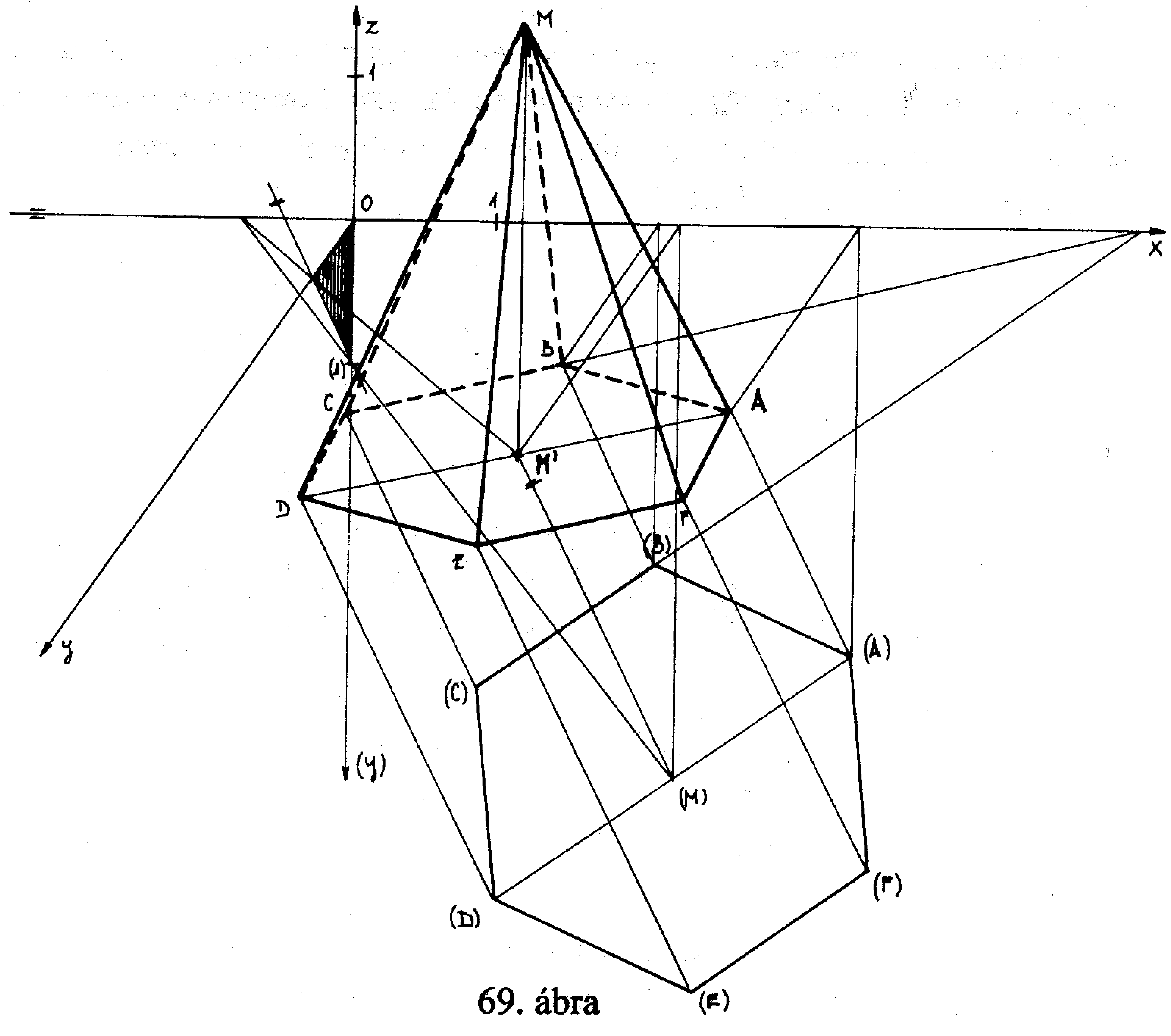


68. ábra

Méretfeladatok frontális axonometriában

Szerkesszünk szabályos hatszög alapú gúlát frontális axonometriában! Az alapsíkja az xy sík, csúcsának vetülete M', egyik csúcspontja A, magassága pedig megegyezik az alapsokszög körülírt körének átmérőjével és $q_y=1/2$.

Az alapsokszög szerkesztéséhez forgassuk be az xy síkot az axonometrikus képsíkba. A forgatás tengelye – a két sík metszésvonala – az x tengely, az y tengely forgatottja, (y), merőleges x-re, és rajta az egység valódi mérete látszik. A már tanultak szerint a vetület és forgatottja itt is affin megfelelői egymásnak. Az affinitás tengelye a két sík metszésvonala, az x tengely.



69. ábra

Az affinitás iránya az y és (y) egyenesek megfelelő pontjait köti össze. Az affinitás iránya most nem merőleges az affinitás tengelyére – *ferde affinitás* van a két sík között. A ferde affinitást is egyértelműen meghatározza a tengelye és egy megfelelő pontpár.

Az M' pont ezek segítségével leforgatható. Az | 1, M| egyenes affinitási tengellyel való metszéspontját összekötjük az (1) ponttal. Ezen az egyenesen jelöli ki az M'-re illeszkedő, az affinitás irányával párhuzamos egyenes az (M) pontot. A leforgatott pont úgy is szerkeszthető, hogy az M' pontra az O1(1) háromszöghöz (vonalkázott) hasonló háromszöget illesztünk.

Az A pont leforgatása után a szabályos hatszög megrajzolható. Visszaforgatva megkapjuk a gúla alapsokszögét. A gúla magasságát az M'-ben állított merőlegesre fölmérhetjük, hiszen a z tengely irányában nincs rövidülés.

Merőleges vagy ortogonális axonometria

Tetszőleges szabad axonometriában a koordinátarendszer térbeli visszaállíthatóságát a Pohlke-tétel garantálja, de megvalósítása nem egyszerű. Könnyen rekonstruálhatjuk a térbeli rendszert, ha a vetítés irányát az axonometrikus képsíkra merőlegesen választjuk meg.

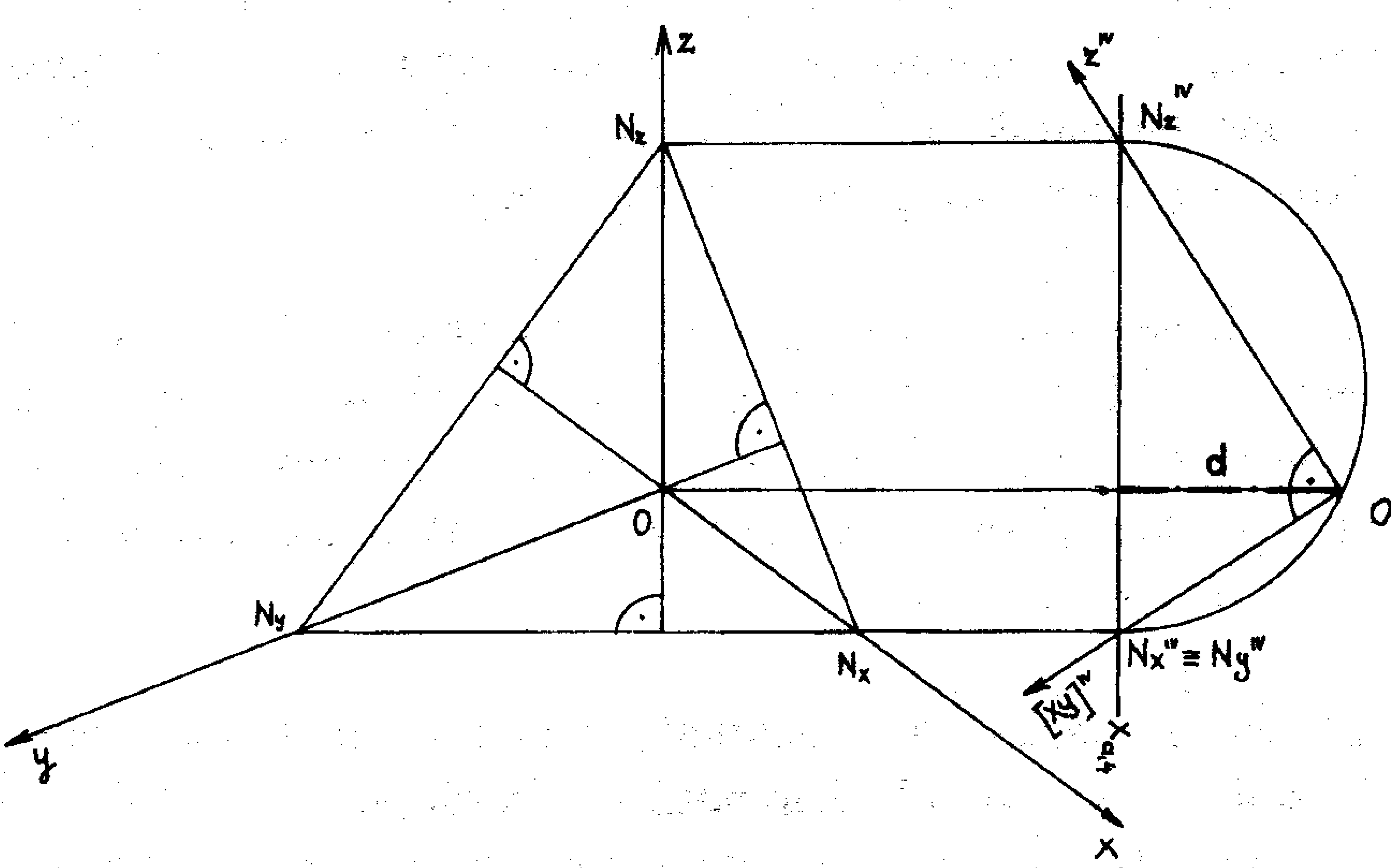
A térbeli koordinátarendszer tengelyei az axonometrikus képsíkot egy-egy pontban metszik. Ezeket a döféspontokat *nyompontok*nak, az axonometrikus képsíkban lévő háromszöget pedig *nyomháromszög*nek nevezzük. A nyomháromszög oldalai értelemszerűen a koordinátasíkok axonometrikus képsíkkal alkotott metszésvonalai.

A nyomháromszög oldalai fölé illesztett Thalesz-gömbök metszéspontjai mindig kijelölik a koordinátarendszer kezdőpontját. Két ilyen koordinátarendszer tartozik egy nyomháromszöghöz – az axonometrikus képsíkra szimmetrikusan helyezkednek el. A bennük ábrázolt alakzatok képe azonos, csak láthatóságban térnek el egymástól. Mi általában azt a "fölülnézetes" rendszert használjuk, amikor az origó az axonometrikus képsík mögött van.

A merőleges axonometria mindig jellemezhető nyomháromszögével. *A nyomháromszög mindig hegyesszögű.* A tengelyek képei a nyomháromszög magasságvonalaira esnek.

Igen egyszerűen meghatározható az origó (a koordinátarendszer kezdőpontja) távolsága az axonometrikus képsíktól (70. ábra).

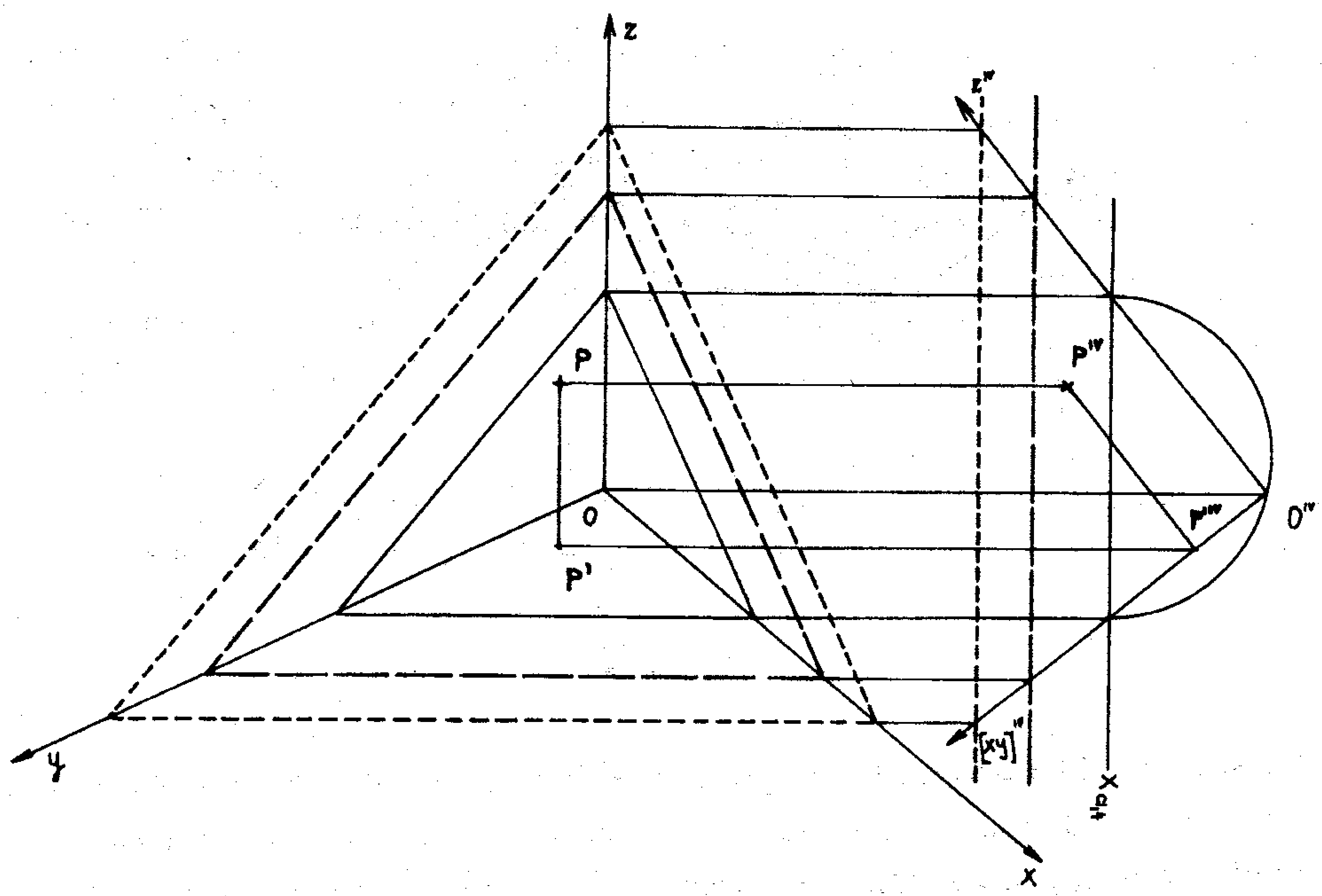
> A z tengelyre axonometrikus vetítősíkot illesztünk és ábrázoljuk az axonometrikus képsíkhoz kapcsolt negyedik képen. A vetítősík az xy síkból tartalmaz egy z tengelyre merőleges egyenest, amelyik z-t az origóban metszi. Az xy sík nyomvonala (a nyomháromszög oldala) negyedik képen pontnak látszik, így az O^{IV} pont a nyomvonal és N_z negyedik képe (N_z^{IV}) fölé rajzolt Thalesz-körre illeszkedik. Az axonometrikus képsík az $x_{a,4}$ tengelyben látszik, így a távolság leolvasható.



70. ábra

A 70. ábráról leolvasható még a z tengely rövidülése (és valódi mérete), valamint a z tengely axonometrikus képsíkkal bezárt szöge is.

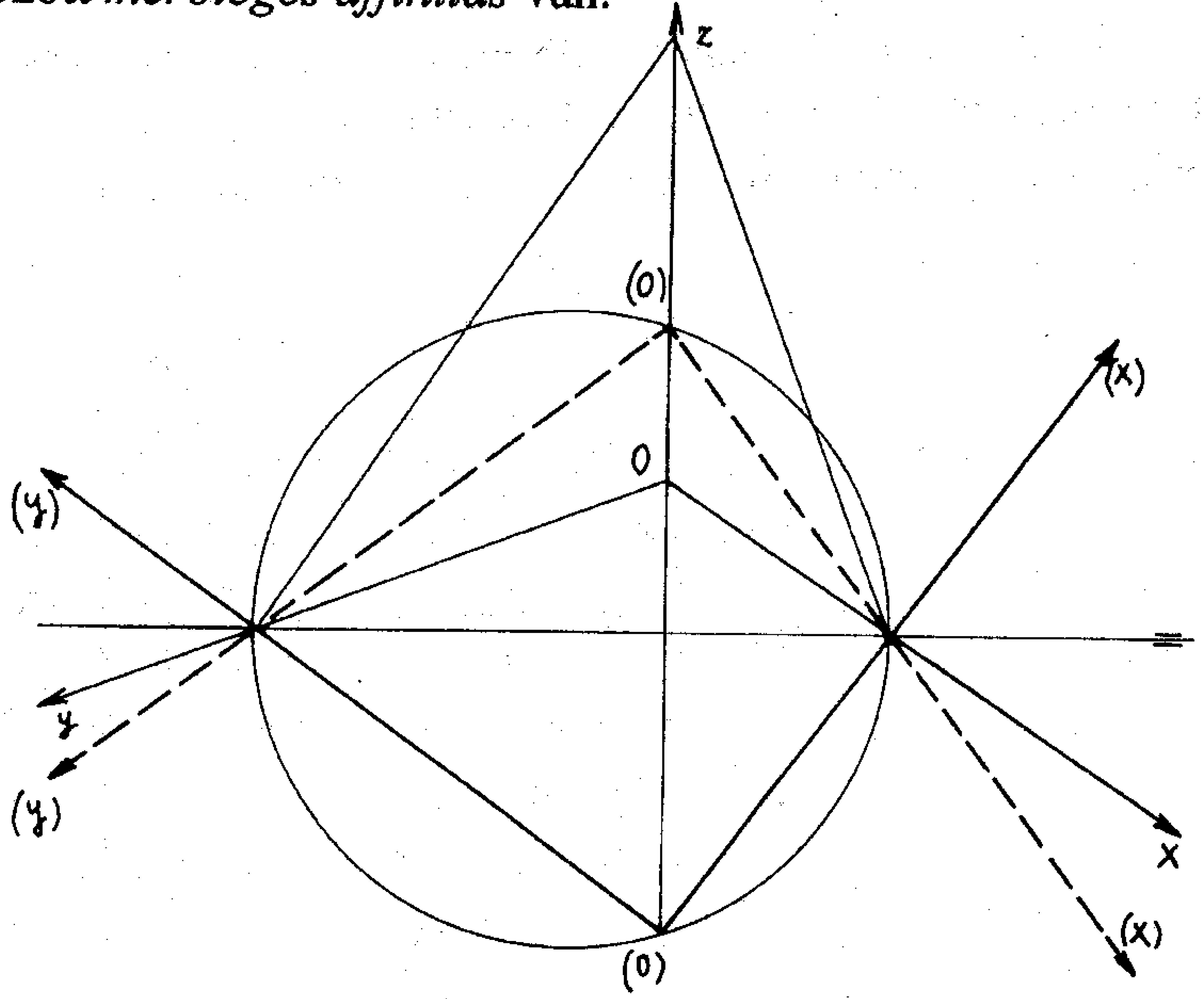
Egy pont (alakzat) képe nem függ az axonometrikus képsík (nyomháromszög) megválasztásától (71. ábra). Tekintsük a P pont első vetítősugarának negyedik képét! Ennek helyzete független az $x_{a,4}$ megválasztásától, csak a koordinátarendszertől függ. Ezért a tengelykereszt ismeretében ortogonális axonometriában a nyomháromszög nagysága tetszőlegesen választható.



71. ábra

Épületeket vagy bármilyen alakzatot úgy ábrázolunk axonometriában, hogy elkészítjük az alaprajzát, majd kiemeljük a megfelelő magasságra a pontokat. (Axonometriában a három koordinátasík közül egyiknek sincs kitüntetett szerepe, ezért bármelyik tengely vagy koordinátasík valódi méretének meghatározása hasonló módon történik.)

Az xy síkot nyomvonala körül az *axonometrikus képsíkba forgathatjuk.* Mivel az x és y tengelyek merőlegesek egymásra, az origó forgatottja a tengelyek nyompontja fölé írt Thálesz-körre illeszkedik (72. ábra). Az origó a nyomvonalra merőleges síkú körön fordul, így az axonometrikus vetület és forgatottja között *merőleges affinitás* van.



72. ábra

Az xy sík képsíkba forgatását a nyomvonal bármelyik oldalára elvégezhetjük. Egyszerűbb ábrázolásnál szokás a nyomháromszögön kívülre forgatni. Ha összetett az ábra, vagy nem szeretnénk, ha az affin kép a forgatott "fölé" kerülne, úgy megtehetjük, hogy ellenkező irányba forgatunk, majd az egész leforgatott síkot – a tengelyekkel együtt – kitoljuk az ábrából.

Ortogonális axonometriában az *ábrázolási* és *illeszkedési feladatok* a ferde axonometriához hasonlóan elvégezhetők. *Sík és egyenes döféspontjának szerkesztése* a kétképsíkos ábrázolásban tanult elvek szerint történik.

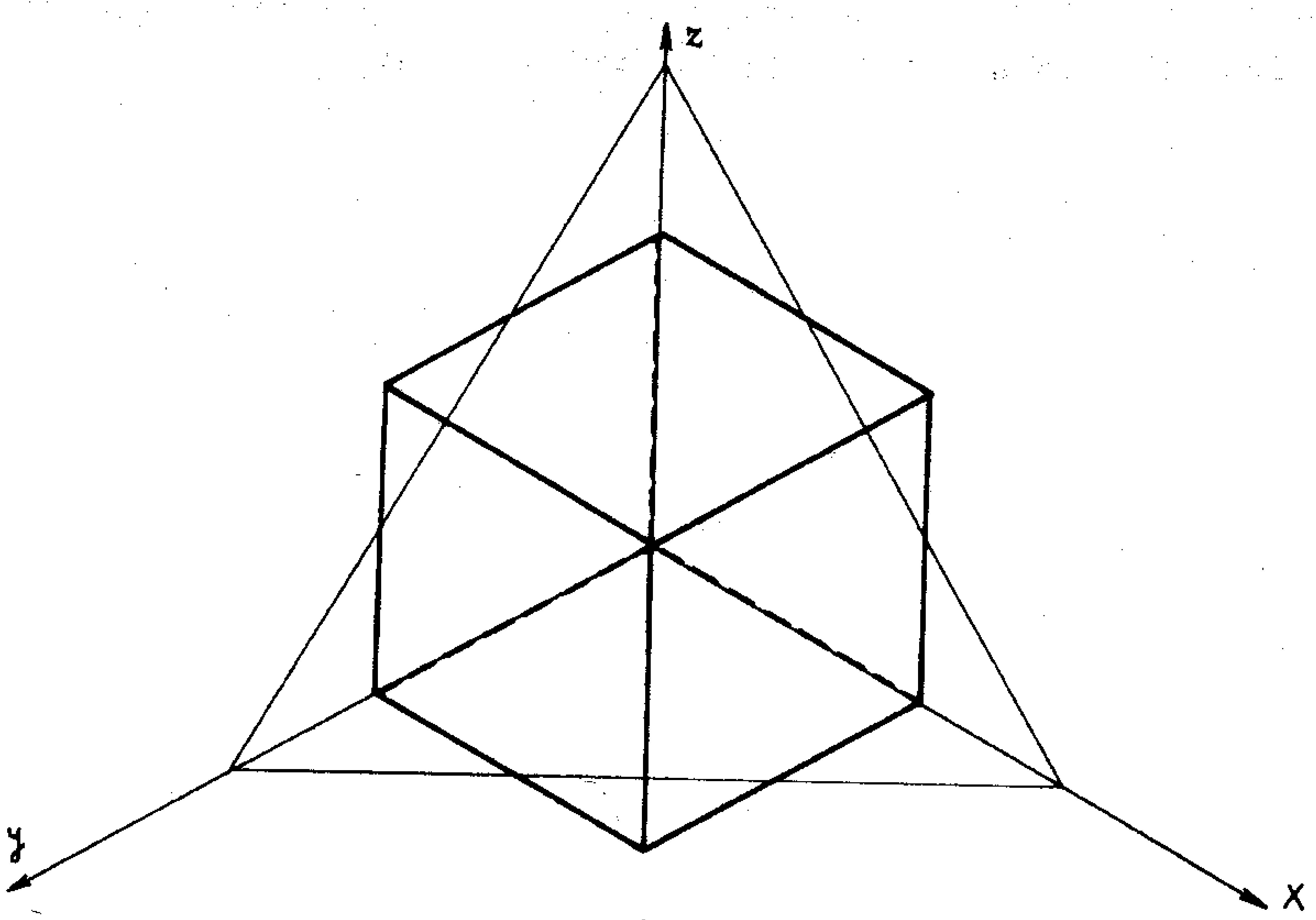
Síklapú testek síkmetszése az élek egyenkénti döféspontjainak szerkesztésével mindig megoldható. Ha a metsző sík valamelyik koordinátasíkra merőleges, ezen a képen a vetítő helyzet a döféspont-szerkesztésnél jól kihasználható. Általános helyzetű sík vetítő helyzetűvé tétele bonyolult.

Mivel az ortogonális axonometriában merőleges térelemek állításával nem foglalkozunk, az áthatásokat a Monge-féle ábrázolásnál ismertetett módszerek valamelyikével szerkeszthetjük.

Az ortogonális axonometria különleges esetei

Ha úgy választjuk meg az axonometrikus képsíkot, hogy mindhárom koordinátatengellyel azonos szöget zárjon be, mindegyik tengelyen ugyanakkora lesz a rövidülés. A tengelyek szimmetriájából következik, hogy a nyomháromszög szabályos háromszög. Ezt a különleges tengelykeresztet szokás izometriának nevezni. Igen gyors szerkesztést tesz lehetővé, de nem mindig szemléletes (73. ábra). Kocka képhatára izometriában szabályos hatszög.

Ha csak két koordinátatengely zár be azonos szöget az axonometrikus képsíkkal, a nyomháromszög egyenlő szárú.

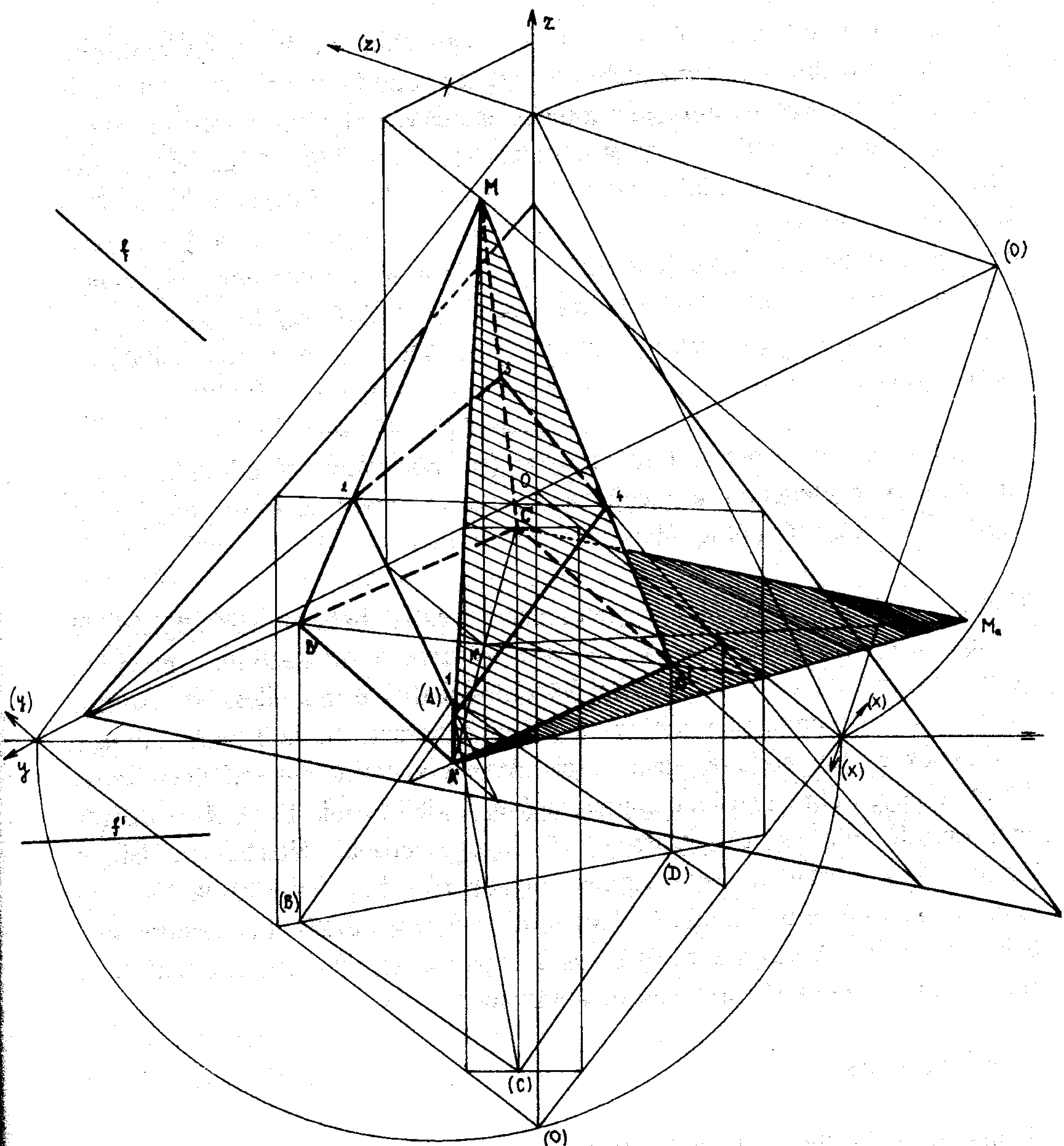


73. ábra

Összefoglaló gyakorlatként szerkesszük meg az xy síkon álló szabályos négyoldalú gúla metszését egy nyomvonalaival adott síkkal és az alapsíkra vetett árnyékát a 74. ábrán!

Az alapnégyzetet leforgatásban szerkesztjük meg. A pontokat affinitás segítségével visszük vissza az alapsíkra. (Ugyanazok a törvényszerűségek érvényesek, amiket a kétképsíkos ábrázolásnál ismertettünk.) A gúla síkmetszetét az élek döféspontjainak szerkesztésével kaphatjuk meg. A BM és MD élek síkja első vetítősík, ezért a sík második és harmadik nyomvonala párhuzamos a z tengellyel. A vetítősík és a metsző sík közös egyenese, amely átmegy a síkok nyomvonalainak közös pontján, kijelöli az éleken a döféspontokat. A másik két élen a döféspont ugyanígy vagy centrális kollineációval is szerkeszthető.

A gúla alapsíkra vetett árnyékát is a kétképsíkos ábrázolásnál tanultak szerint szerkeszthetjük. Az M csúcspontra fénysugarat illesztünk (az axonometrikus képére és az alaprajzára is), majd megkeressük a fénysugár metszését a gúla alapsíkjával. A csúcspont árnyéka a fénysugár első nyompontja lesz. Az élek árnyékát berajzolva az árnyékválasztó élek kijelölik az önárnyékos lapokat.



74. ábra

GÖRBÉK ÉS GÖRBE FELÜLETEK ÁBRÁZOLÁSA

A görbe vonal jellemezhető egyenletével, véges sok pontjával vagy érintőivel is. (Ezek a fogalmak matematikából ismertek.) A görbe vonal lehet síkbeli, de térgörbe is. A síkgörbe minden pontja és összes érintője ugyanabban a síkban van, a térgörbe pontjai és érintői nincsenek egy síkban.A görbe vonalak vetületei is általában görbe vonalak (síkgörbe képe egyenes, ha a síkja vetítősík). A görbe érintőinek képe általában érinti a görbe képét. Ha a görbe érintője vetítősugár, akkor az érintési pont képe a képgörbének *csúcspontja* lesz. A görbék szerkesztését általában úgy végezzük, hogy megszerkesztjük véges sok pontjának és érintőjének a képét, majd a görbét ezekre illesztve berajzoljuk.

Ha tudjuk a képgörbéről, hogy milyen (pl. kör vagy másodrendű görbe) típusú, akkor elegendő a meghatározó adatait kiszerkeszteni, majd ezek segítségével közvetlenül további pontokhoz juthatunk.

Eddigi szerkesztéseink csak egyenes szakaszokkal határolt sokszögekre és síklapú testekre vonatkoztak. A bennünket körülvevő világ azonban nagyrészt görbe vonalakkal vagy felületekkel közelíthető illetve modellezhető. Ahhoz, hogy eddigi ismereteinket ezekre is alkalmazhassuk, be kell határolnunk a görbéknek és felületeknek azt a (csak elemi geometriát igénylő igen szűk) körét, amelyek ábrázolásával és metszésével foglalkozunk. Ezek elsősorban a másodrendű görbék és felületek. A legegyszerűbb, általánosan ismert másodrendű görbe a kör. Ennek megrajzolásához eszközünk is van (körző).Ha ábrázolni akarjuk, a középpontján és sugarán kívül ismernünk kell a kör síkját is. (A középpont és a sugár együtt csak azt a gömböt határozza meg, melynek egyik főkörét akarjuk ábrázolni.)

Kör ábrázolása

Szabályos sokszögek ábrázolásakor a leforgatott (valódi méretben látszó) alakzatnak elegendő volt a csúcspontjait visszaforgatni és mindkét képen összekötni. A körvonalon nincsenek kitüntetett csúcspontok, de jól közelíthető szabályos sokszögekkel.

Bizonyítható, hogy a kör merőleges vetülete ellipszis. Ha ezt elfogadjuk, tetszőlegesen sok pont képe helyett elegendő az ellipszis meghatározó adatainak képét szerkeszteni.

Hány pont elegendő az ellipszis meghatározásához? Az ellipszis legáltalánosabb egyenlete matematikából ismert : $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. Öt pont koordinátáinak behelyettesítésével az együtthatókra nézve homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, vagyis öt pontja ismeretében az ellipszis matamatikailag egyértelműen meghatározott.

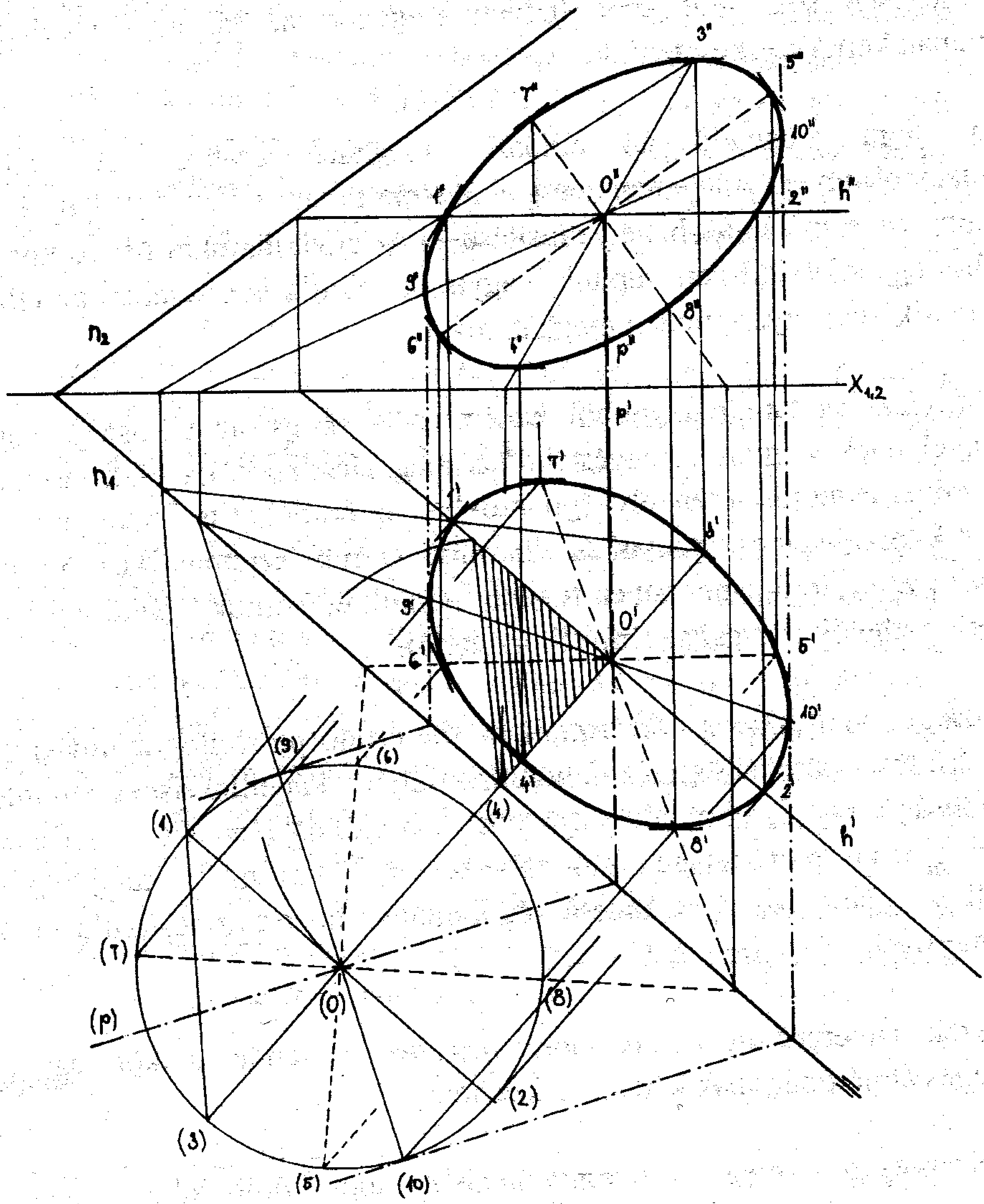
A középiskolás tanulmányokból ismert az is, hogy az ellipszist nagy és kistengelyének végpontjai egyértelműen meghatározzák. Ez csak látszólag 4 adat, mivel ismerjük a tengelyvégpontokban az érintőket is. Bizonyított tény, hogy a kúpszeletek pontjainak és érintőinek szerepe szimmetrikus, *bármelyik öt pont vagy érintő* ismeretében további pontok és érintők egyélű vonalzóval is szerkeszthetők (Pascal és Brianchon tétele).

Párhuzamos vetítéskor a kör érintőnégyzete érintő paralellogrammába megy át, az érintési pontokat összekötő körátmérőkből a képellipszisnek különleges tulajdonságú, konjugált átmérőpárja lesz. A *konjugált (kapcsolt) átmérőpár* – a kör egymásra merőleges átmérőinek képe – azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy az egyik átmérő végpontjában húzott érintő párhuzamos a társátmérővel.

Mindezek ismeretében a kör ábrázolásához elegendő a kör egymásra merőleges átmérőpárjának képét szerkeszteni.

Szerkesszük meg a nyomvonalaival adott dőlt síkban lévő, O középpontú, adott sugarú kör képét (75. ábra)!

Először egy első fővonal segítségével illesszük a síkra a kör O középpontját, majd nyomvonala körül forgassuk le a síkot! (Elegendő az O forgatottját megszerkeszteni.)



75. ábra

Rajzoljuk meg a leforgatott kört, majd két egymásra merőleges átmérőjét forgassuk vissza! Szokás a nyomvonallal párhuzamos és rá merőleges átmérőpárt választani. A nyomvonallal párhuzamos átmérő (1,2) képe nem rövidül, ez lesz a képellipszis nagytengelye, a rá merőleges átmérő (3,4) képe esésvonal irányú, ez lesz a kép kistengelye. A pontok második képe a kör második képén az egyik konjugált átmérőpárjának végpontjai. A 3 illetve 4 pontok egyúttal a legalacsonyabban ill. legmagasabban fekvő ellipszispontok.

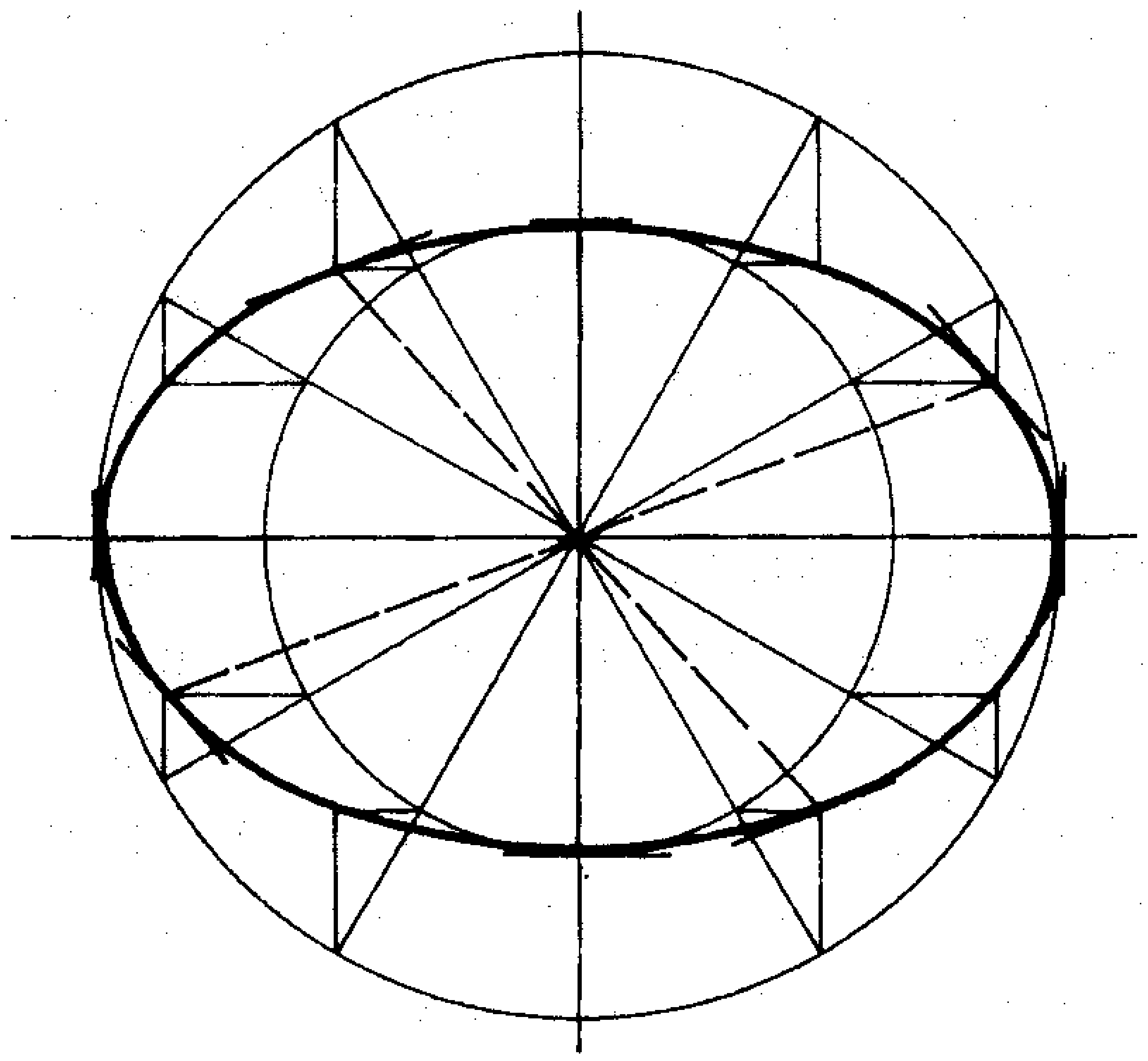
A második képen a nagytengely párhuzamos a második nyomvonallal, a kistengely rá merőleges. Ha a nagytengely egyenesét (5, 6 pontokra illeszkedő fővonal) leforgatjuk az első nyomvonal körül, a rá merőleges átmérő végpontjainak (7, 8) visszaforgatásával kaphatjuk meg a második kép kistengelyét. A második kép tengelyeinek szerkesztése történhet második nyomvonal körüli leforgatással is.

A második kép tengelyeit adó körátmérők első képe konjugált átmérőpár.

A képek pontos rajzolásához szükséges még a bal- és jobboldali szélső pontok szerkesztése, melyek a profil irányú érintők érintési pontjai. Ezeket a kör középpontján átmenő profilegyenesre merőleges átmérő végpontjai szolgáltatják (9,10), melyek a leforgatásban kereshetők meg.

Az ellipszis nagy- és kistengelyének ismeretében további ellipszispontok szerkeszthetők. Az ellipszis nagytengelyének egyenese tekinthető egy olyan merőleges affinitás tengelyének, amelyben az ellipszis egy kör affin képe.Az affinitás tengelyére merőleges körátmérő végpontjainak az ellipszis kistengelyvégpontjai felelnek meg, a leképezés „összenyomás". Az ellipszis származtatható a kistengelye, mint átmérő körüli kör nagytengely irányú nyújtásával is.

Az ellipszispontok az előbbi két merőleges affinítás egyidejű alkalmazásával szerkeszthetők. (76. ábra)



76. ábra

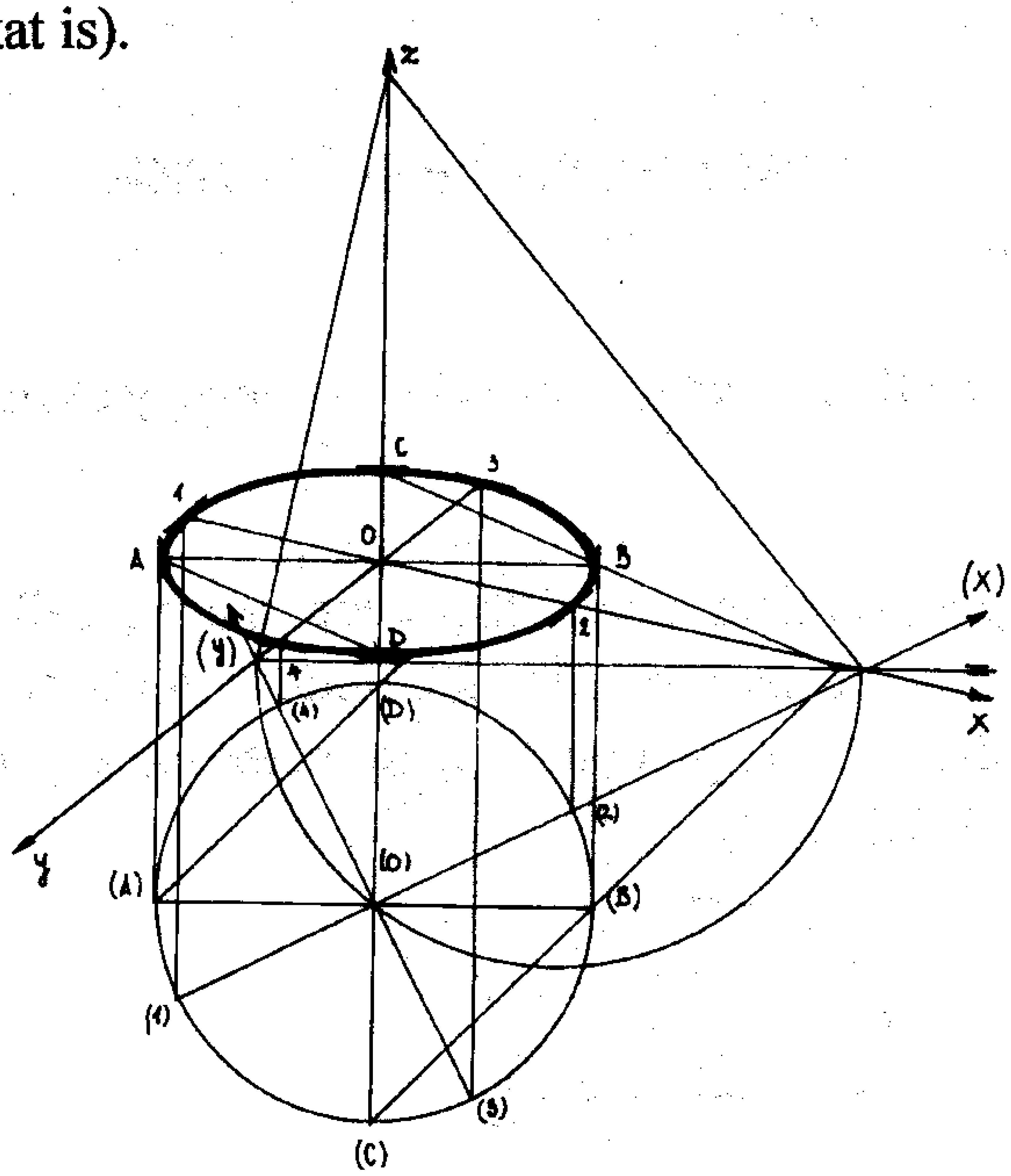
Merőleges axonometriában az xy síkon lévő kör képének ábrázolása az előbbiekben ismertetett elv szerint történik.

A nyomháromszög oldala körül leforgatjuk az alapsíkot, majd megrajzoljuk az adott sugarú kört. Visszaforgatáskor az oldallal párhuzamos átmérő nem rövidül, a rá merőleges átmérőből lesz a képellipszis kistengelye (77. ábra).

Görbék és felületek osztályozása

A görbék és felületek osztályozása a koordinátageometriában matematikai módszerekkel történik. Az osztályozás alapja a görbék nagy részénél (algebraiak) az egyenleteik fokszáma, amit *a görbék rendszámának* nevezünk. Ez a rendszám megegyezik a görbe és egy sík metszéspontjainak számával, síkgörbe esetén a görbe és egy egyenes közös pontjainak számával (figyelembe véve a képzetes vagy komplex gyököknek megfelelő végtelen távoli pontokat is).

Hasonló módon *a felületek rendszáma* az egyenletük fokszáma, amely megegyezik egy általános egyenessel való metszéspontok számával (beleértve a képzetes pontokat is).



77. ábra

Görbék különleges pontjai:

– *duplapont*, amelyen a görbe kétszer halad át (két különböző érintője van),
– *inflexiós pont*, melyben az érintő átmetszi a görbét,
– *csúcspont*, itt az érintő egyetlen pontnak látszik, vagyis vetítősugár.

Felületek ponttípusai:

– *elliptikus*; az érintési pont környezetében az érintősík minden pontja külső pont (gömb, ellipszis),
– *hiperbolikus*; az érintési pont környezetében az érintősík belső pontot is tartalmaz (az érintősík belemetsz: hiperboloidok),

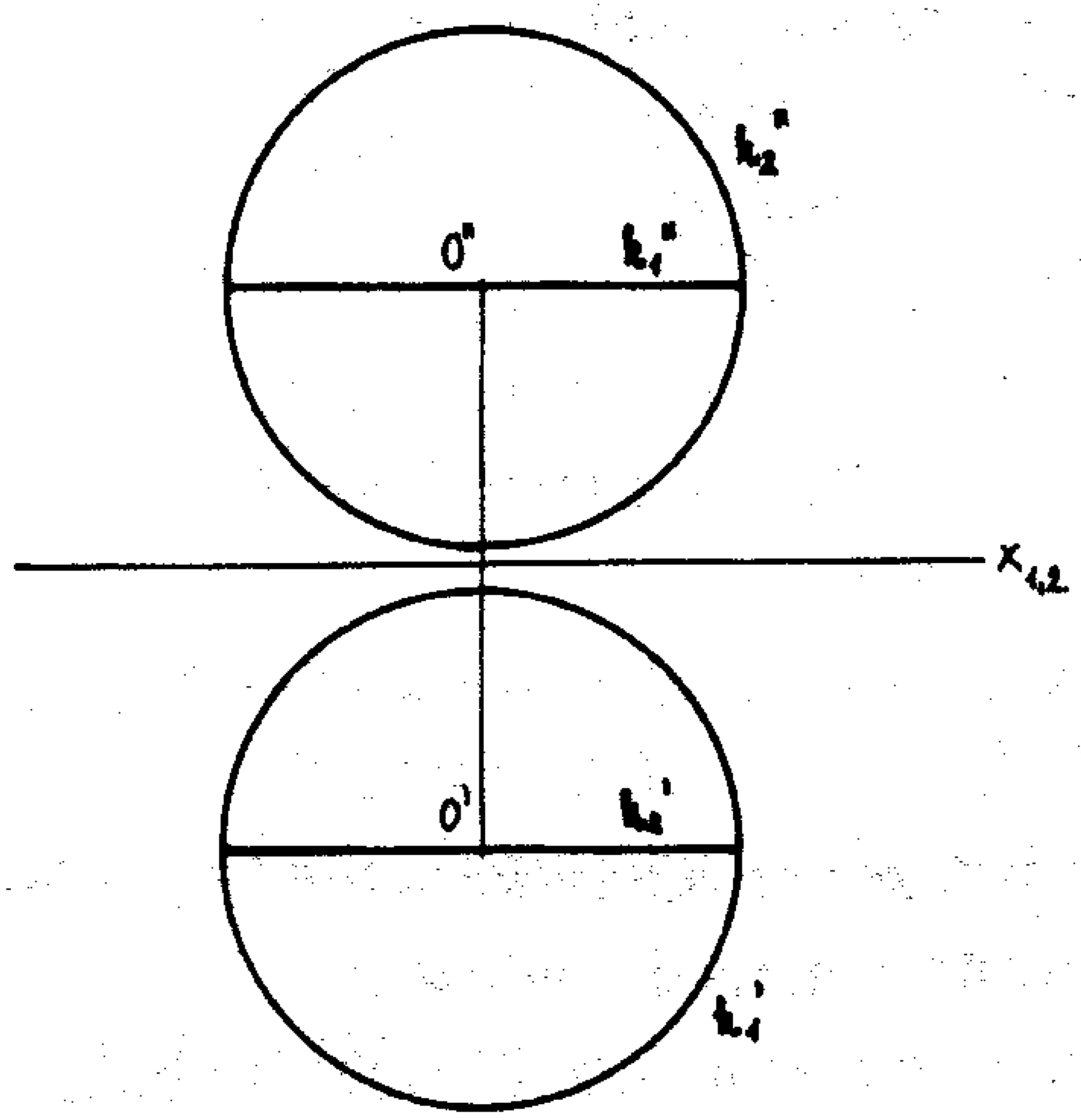
– *parabolikus*; minden más esetben (az érintősík felületi görbe mentén érint : kúp, henger, kifejthető felületek).

MÁSODRENDŰ FELÜLETEK

Gömb ábrázolása

A másodrendű felületek közül először a legegyszerűbbet, a gömböt vizsgáljuk.

A gömb merőleges vetülete kör. Első képe megegyezik a középpontján átmenő, első képsíkkal párhuzamos sík által kimetszett kör képével, a második képe pedig a középponton átmenő, második képsíkkal párhuzamos metszetkör képével (78. ábra).



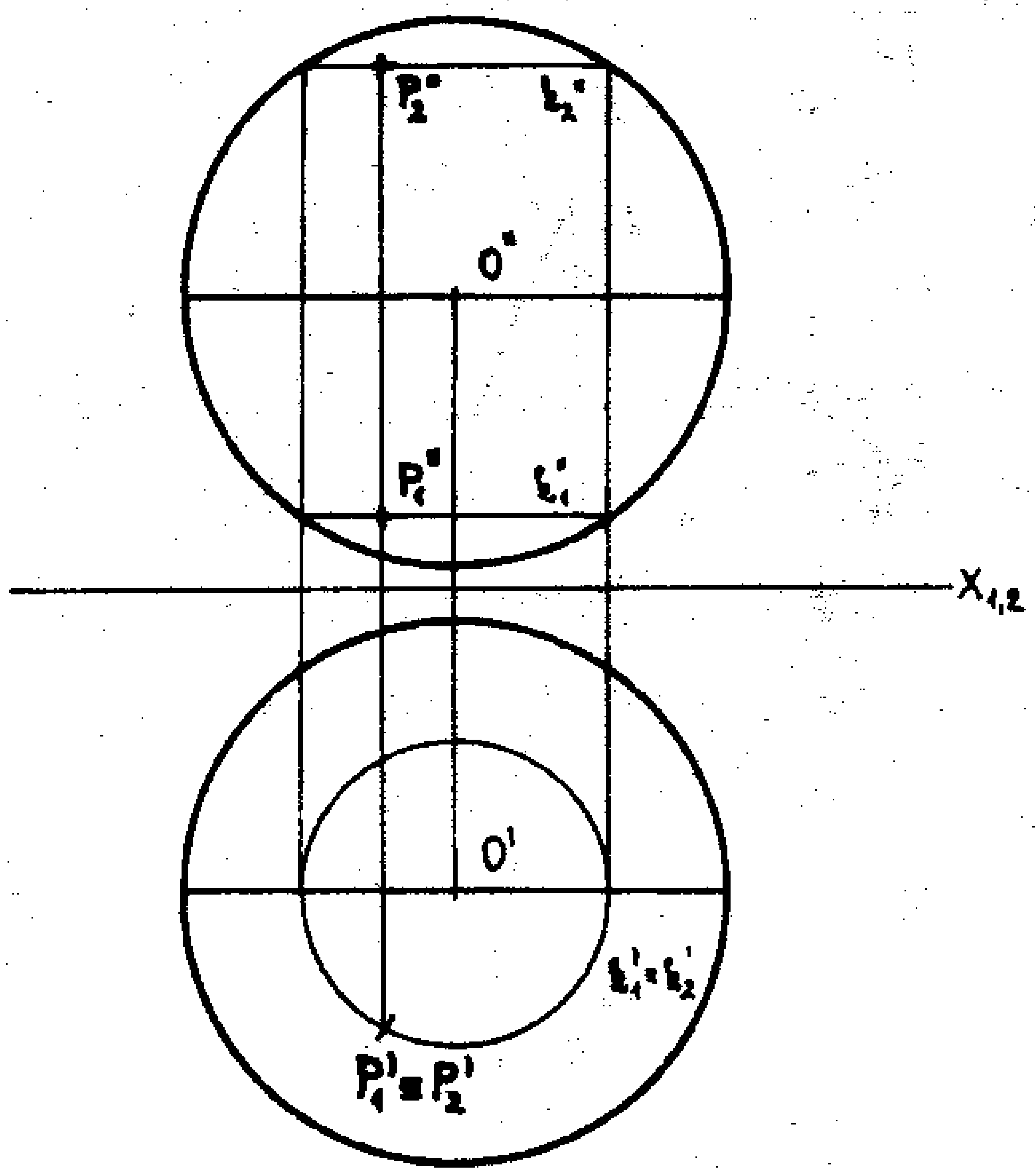
78. ábra

A k_1 illetve k_2 gömbi körök a gömb kontúrkörei, k_1' és k_2'' pedig a gömb képei vagy képkontúrjai.

A felületek kontúrja a vetítési iránytól függ. *A kontúr azon pontok összessége a felületen, melyekben az érintősík vetítő helyzetű.*

Pont illesztése gömbfelületre.

A gömb minden síkmetszete kör, s a képsíkokkal párhuzamos helyzetű metszetek körnek is látszódnak. Ezek segítségével rajzolhatók meg a pont képei. A pont egyik képét tetszőlegesen kijelölhetjük, majd választunk egy rajta átmenő, pl. vízszintes síkú kört (79. ábra).

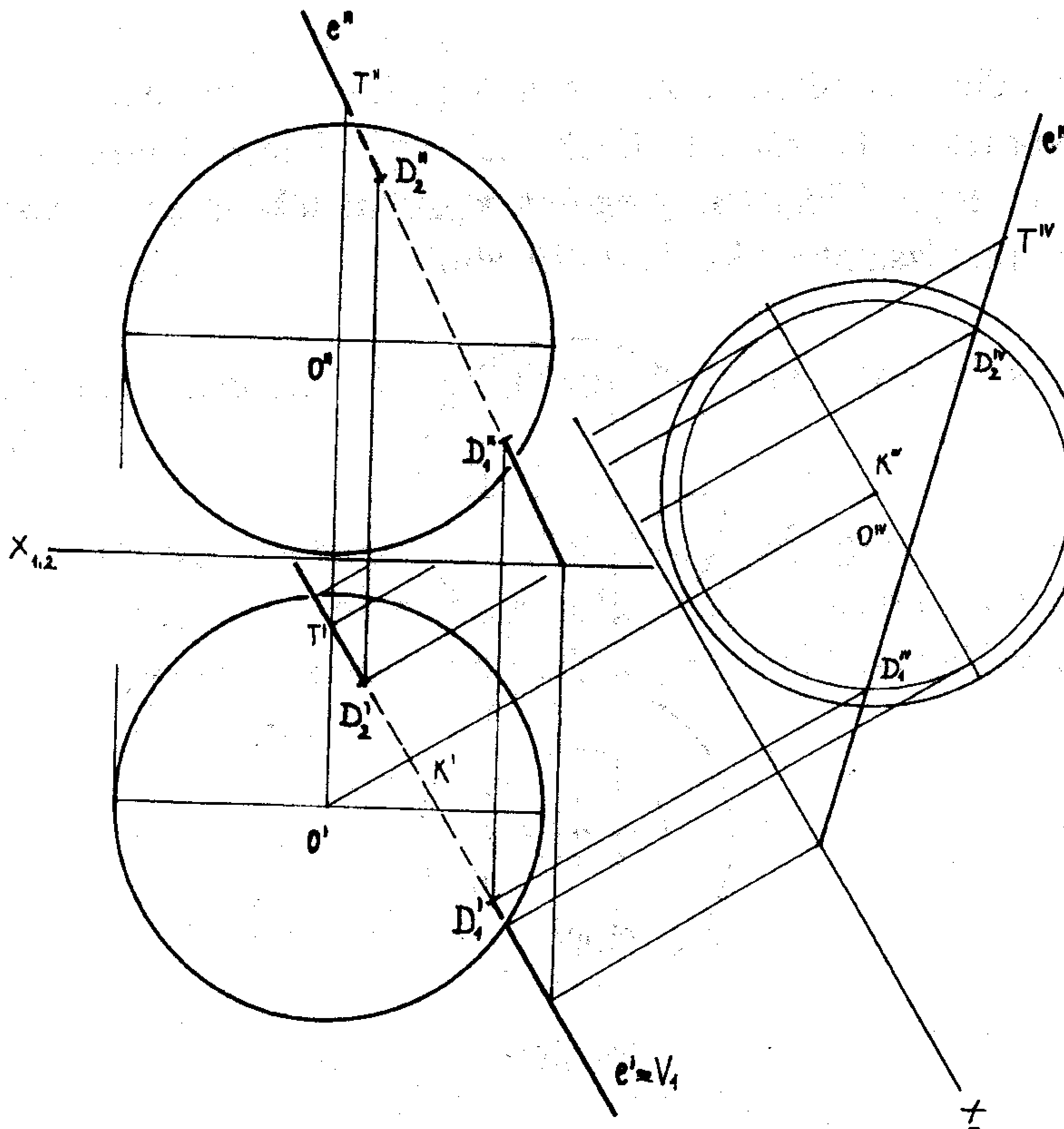


79. ábra

A P' ponton átmenő k' kör a gömb két vízszintes metszetének is lehet az első képe, így P''-re két lehetőség is adódik, azaz *a P-n átmenő vetítősugárnak a gömbbel két közös pontja van.* Ez természetes, hiszen *a felület másodrendű.*A képsíkok szerepe szimmetrikus, ezért a pont második képeiből is indulhattunk volna.

Gömb és egyenes döféspontja

A szerkesztés elve megegyezik az eddig tanultakkal. Az egyenesre illesztett – célszerűen választott – segédsík metszi a gömböt. A gömbi kör és az egyenes metszéspontjai a keresett döféspontok (80. ábra).



80. ábra

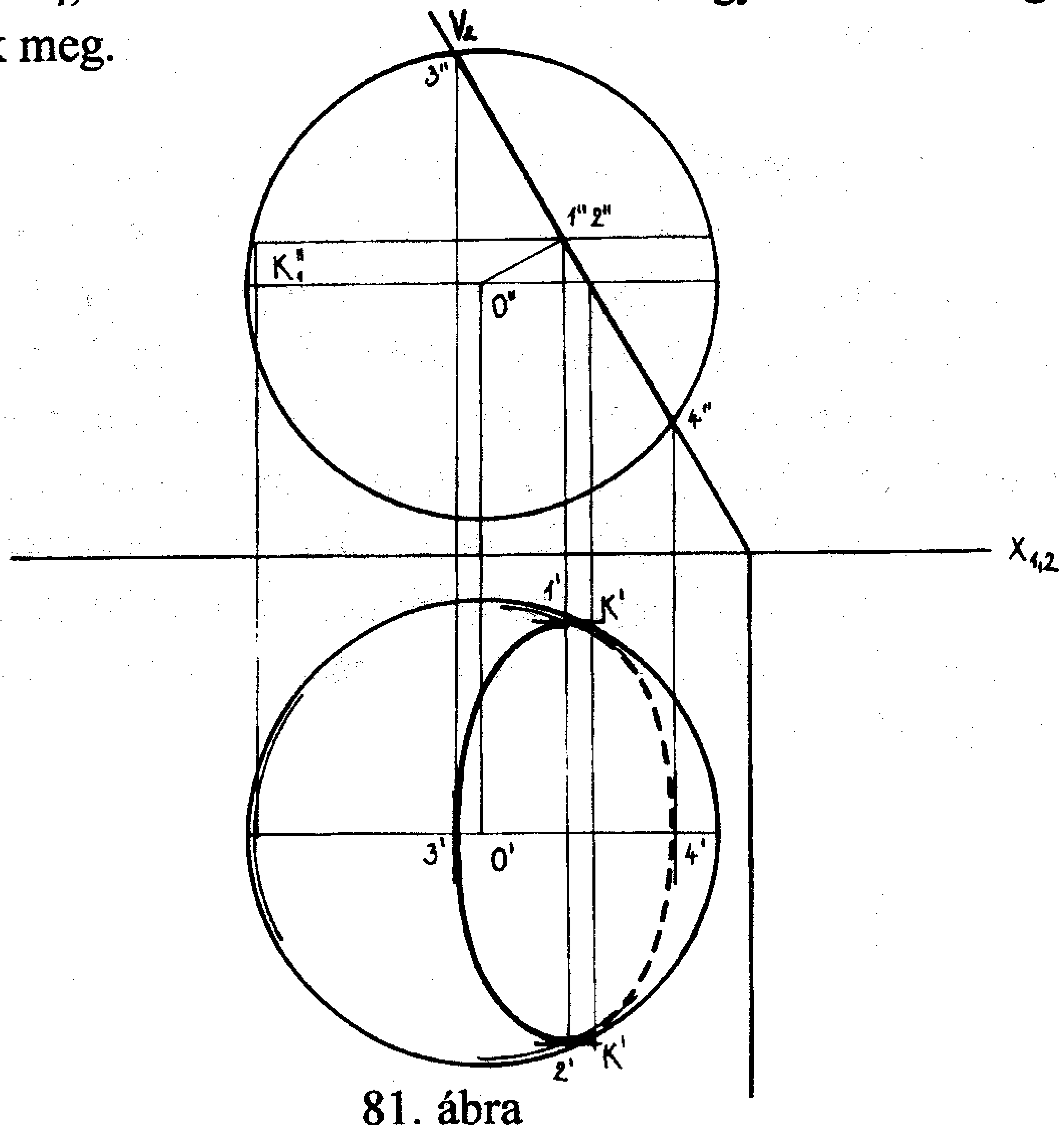
Legegyszerűbb, ha segédsíknak az egyenes valamelyik (pl. első) vetítősíkját vesszük. A vele párhuzamos negyedik képen a metszetkör valódi méretében látszik. A metszetkör középpontja ugyanolyan magasan van, mint a gömbközéppont, sugara pedig az első képről leolvasható. Az egyenes és gömb láthatóságát szintén a negyedik kép segítségével állapíthatjuk meg.

Szokás még segédsíknak választani az egyenesre és a gömb középpontjára illeszkedő főkör síkját. A metszéspontokat ekkor leforgatásban szerkeszthetjük meg.

Gömb síkmetszése

Metsszük a gömböt második vetítősíkkal! Tudjuk, hogy a metszet kör, s a második képe egy szakasz. Elegendő a metszetkörnek azokat az egymásra merőleges átmérőit ábrázolnunk, amelyek első képei a képellipszis tengelyei.

A metszetkör középpontja a gömb középpontjából a kör síkjára állított merőlegesen van. A második kontúrkörön lévő pontok, 3 és 4, a metszetkör átmérőjének végpontjai. A második képen az átmérő valódi nagyságban látszik. (3"4" párhuzamos a második képsíkkal, második fővonalon van.) A rá merőleges átmérő képe egyetlen pontban jelenik meg – 1 és 2 második vetítősugáron van. Első képüket a metszetkör középpontján átmenő vízszintes gömbi kör képe jelöli ki. A metszetkör fölső félgömbre eső íve az első képen látszik. Az első kontúrra eső pontokban megváltozik a láthatóság: ezeket a pontokat az első kontúrsík, K_1, és a metsző sík közös egyenesének segítségével kereshetjük meg.



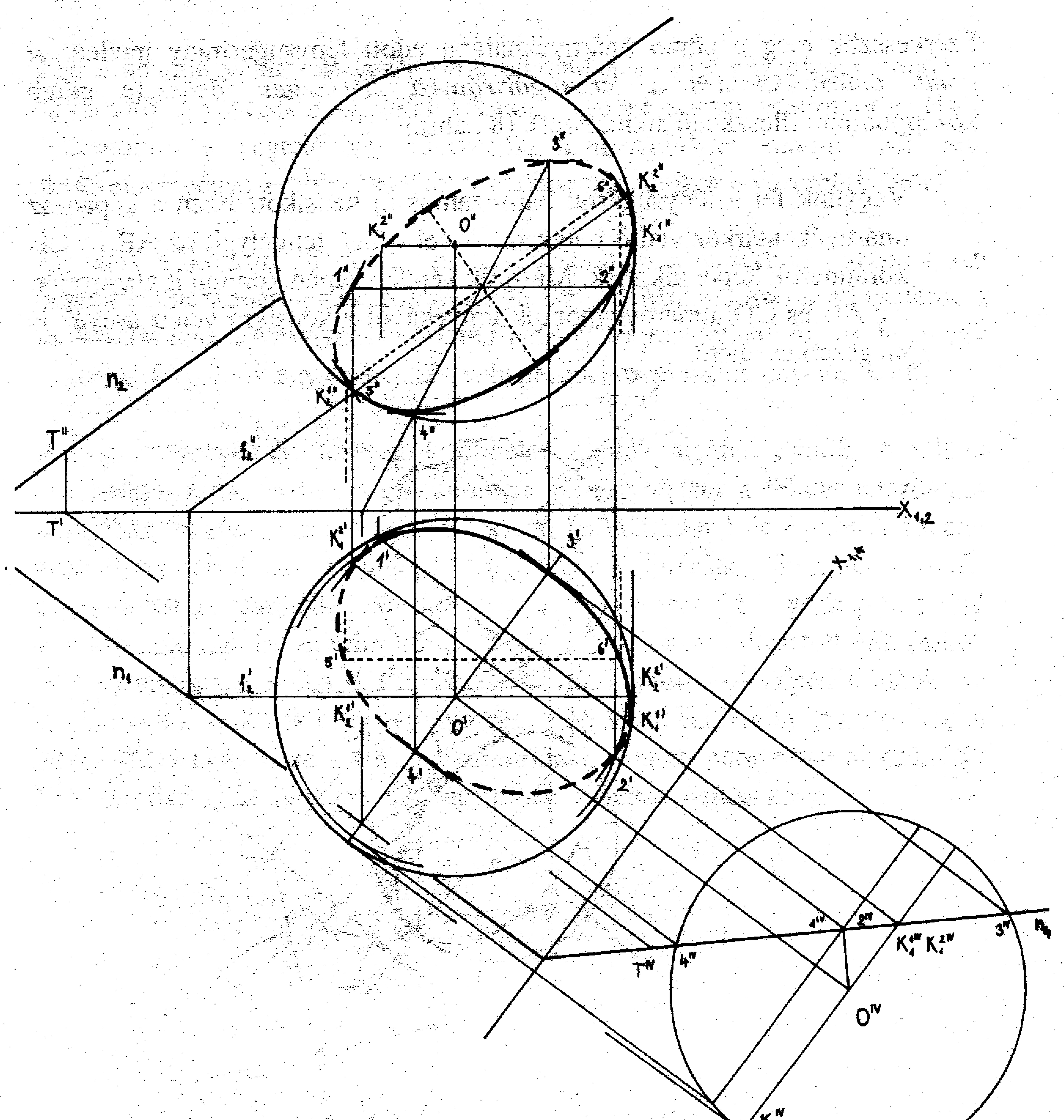
81. ábra

Gömb metszése általános helyzetű síkkal kétféleképpen is szerkeszthető:
1. A metsző síkot vetítősíkká transzformáljuk, majd a metszetet visszavisszük az első és második képre.
2. Meghatározzuk a metszetkör középpontját és sugarát, majd ábrázoljuk az adott síkban az ismert középpontú és sugarú kört.

Szerkesszük meg egy gömb metszését nyomvonalaival adott, általános helyzetű síkkal!(82.ábra)

A síkot első nyomvonalára merőlegesen vetítősíkká transzformáljuk, majd a 81. ábránál ismertetett módon megszerkesztjük a metszetkör első képét. A második kép középpontját és konjugált átmérőpárját a negyedik képről lemérhető (elmaradó) rendezők segítségével kaphatjuk meg. A második kép nagytengelye párhuzamos a metsző sík második nyomvonalával, hossza megegyezik a gömb átmérőjének nagyságával. A rá merőleges kistengely csak ötödik kép vagy leforgatás segítségével szerkeszthető meg.

A láthatóság megállapításához meg kell keresnünk a metszetkör és a gömb kontúrköreinek közös pontjait. Az első kontúrsíkkal való metszéspontok, K_1^1 és K_1^2 a negyedik képről közvetlenül leolvashatók. A K_2^1 és K_2^2 második kontúrpontokat a második kontúrsík és a metsző sík metszésvonala (a metsző sík második fővonala) metszi ki a második kontúrkör képéből. Mivel a kontúrkörök választják el egymástól a gömb látható és nem látható felét, a metszetkör láthatósága a kontúrkörökkel való metszéspontok képeiben változik. Az első képen az első kontúrkör fölötti része , míg a második képen a második kontúrsík előtti íve látszik.

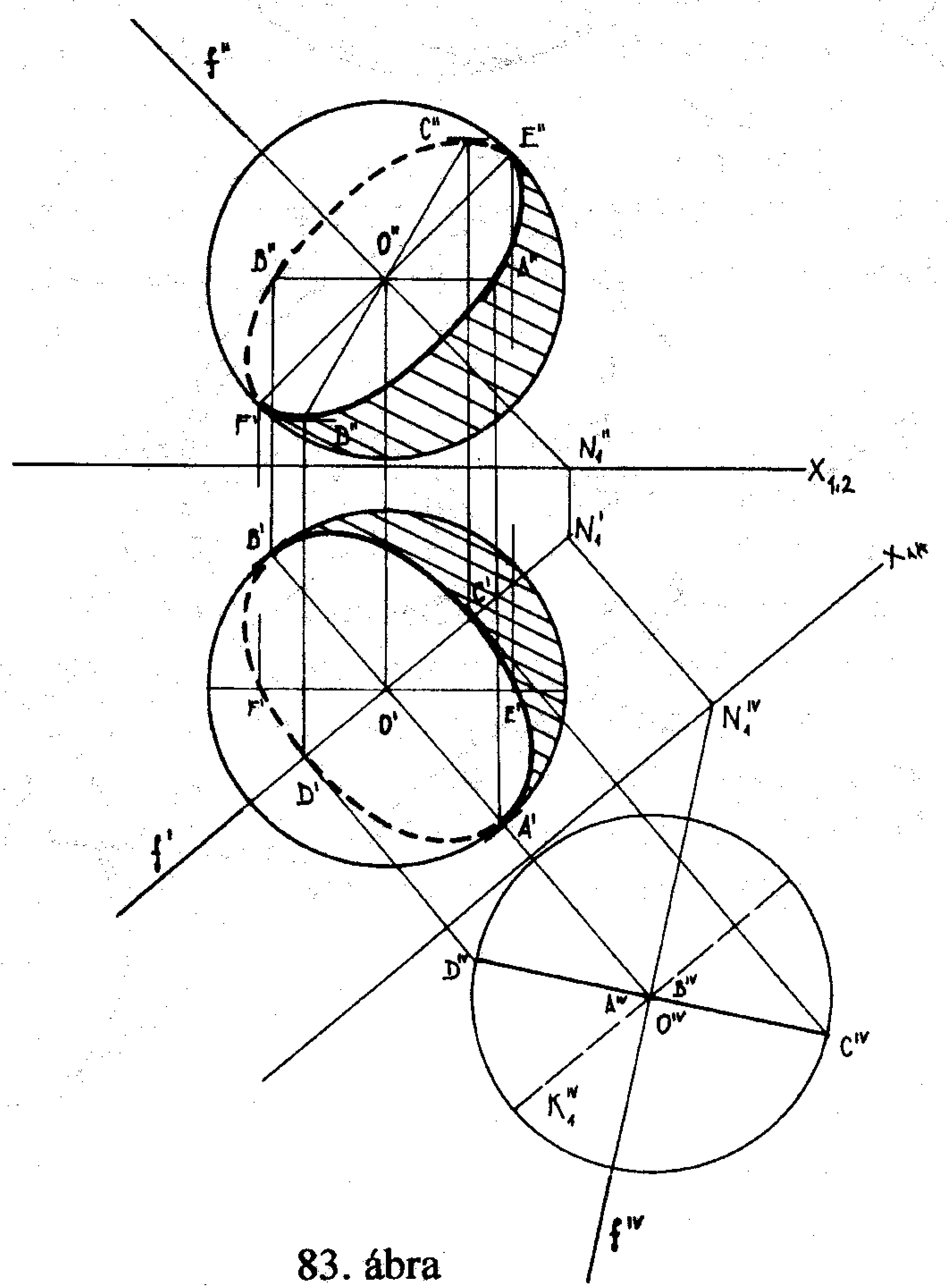


82. ábra

A gömb árnyéka

Szerkesszük meg a gömb önárnyékhatárát adott fénysugárirány mellett! *A gömb önárnyékhatára a fénysugárirányra merőleges főkör* (a gömb középpontjára illeszkedő síkmetszet). (83.ábra)

Vegyünk fel a fénysugárral párhuzamos új képsíkot! Ezen a képen az önárnyékhatárkör vetítő helyzetű. Az első kép tengelyeit az AB és CD körátmérők képei alkotják. Második képük csupán konjugált átmérőpár. Az AB és CD átmérővégpontok árnyékából a képsíkra vetett árnyék is megszerkeszthető.



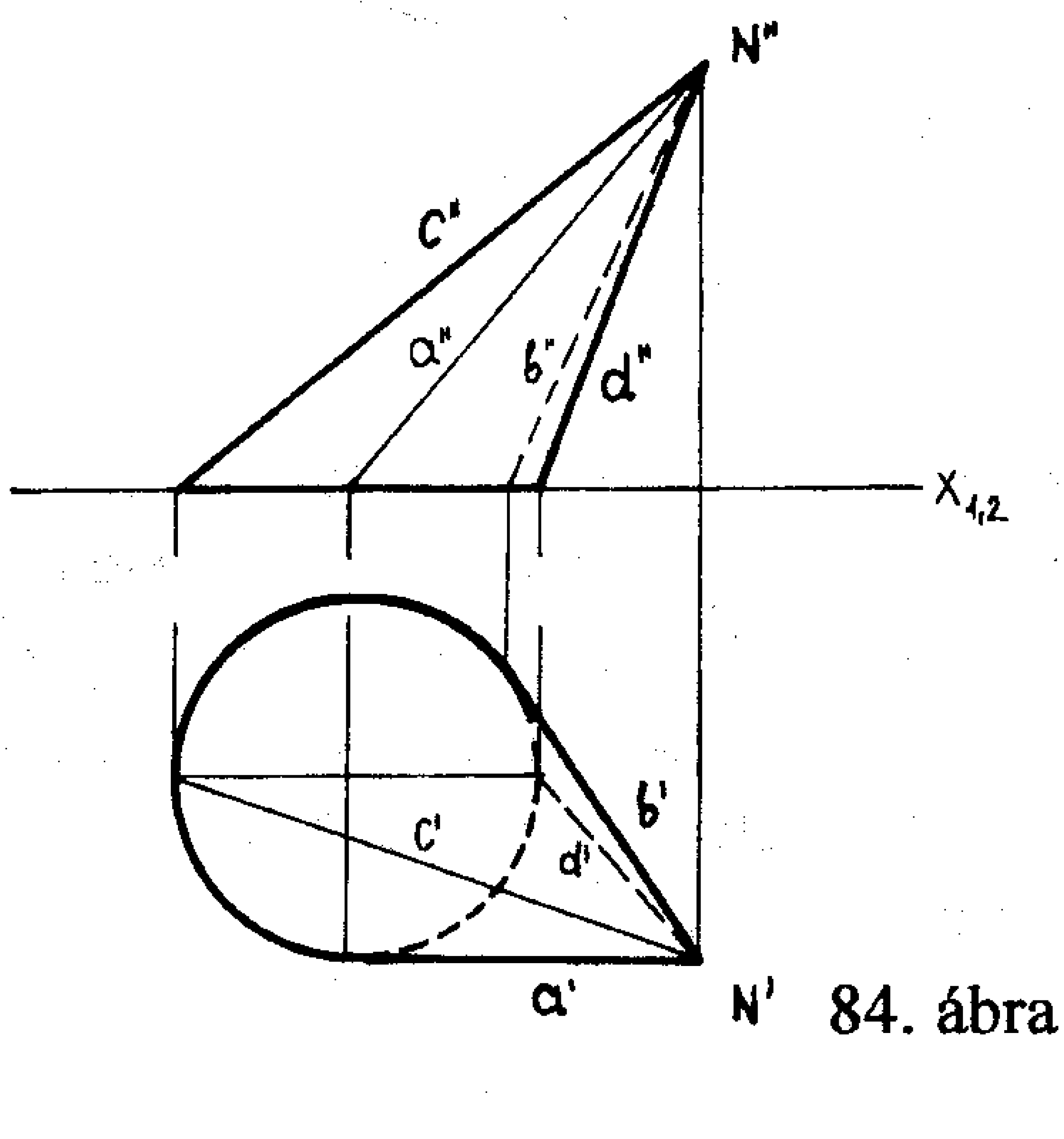
83. ábra

Kúp és henger

Egy szabadon választott vezérgörbe pontjait a tér egy tetszőleges pontjával összekötő egyenesek *kúpfelület* alkotói. A pont a kúp csúcspontja. Ha a csúcspontot a végtelenben választjuk, *hengerfelület*et kapunk. Mi csak azokkal a legegyszerűbb esetekkel foglalkozunk, amikor a vezérgörbe kör.

Egyenes a körkúp (henger), ha a csúcspontot a vezérkör középpontján átmenő, síkjára merőleges egyenesen választjuk. Minden más esetben ferde a körkúp (henger). Az egyenes körkúp (henger) származtatható úgy is, hogy egy egyenest forgatunk egy őt metsző (vele párhuzamos) másik egyenes körül.

A kúp és henger érintősíkjai a felületet alkotók mentén érintik. A felület érintősíkjai tartalmazzák a csúcspontot. Az *érintősíkot* a felület tetszőleges pontjában *meghatározza* a ponton átmenő felületi alkotó és a ponton átmenő körmetszet érintője. A kúp és a henger kontúralkotói azok lesznek, amelyekben az érintősík vetítő helyzetű. A 84. ábrán a ferde körkúp **a, b** első kontúralkotóinak képei érintik az alapkört (ezek a rájuk illesztett érintősíkok első nyomvonalai is). A **c, d** második kontúralkotók első képének alapkörre eső pontját a vetítősík első nyomvonala jelöli ki az alapkörön. Az első képen látszó körív nem része a kúp képkontúrjának (hiszen pontjaiban az érintősík nem vetítősík), ezt *képhatár*nak vagy a kép szélének szokás nevezni.

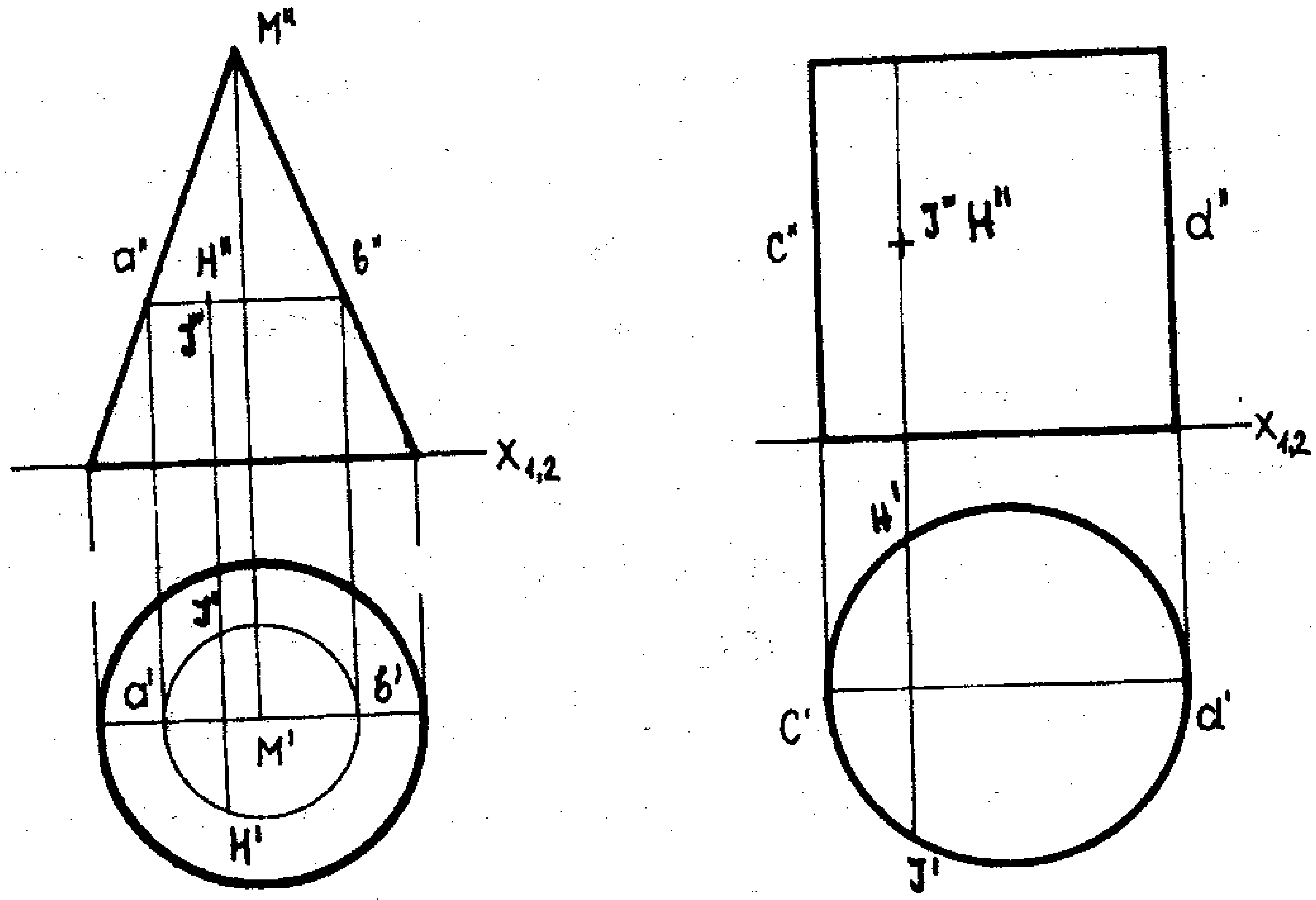


84. ábra

Ha külön nem jelezzük, a továbbiakban csak egyenes körhengerrel és forgáskúppal foglalkozunk.

Pont illesztése kúpra és hengerre

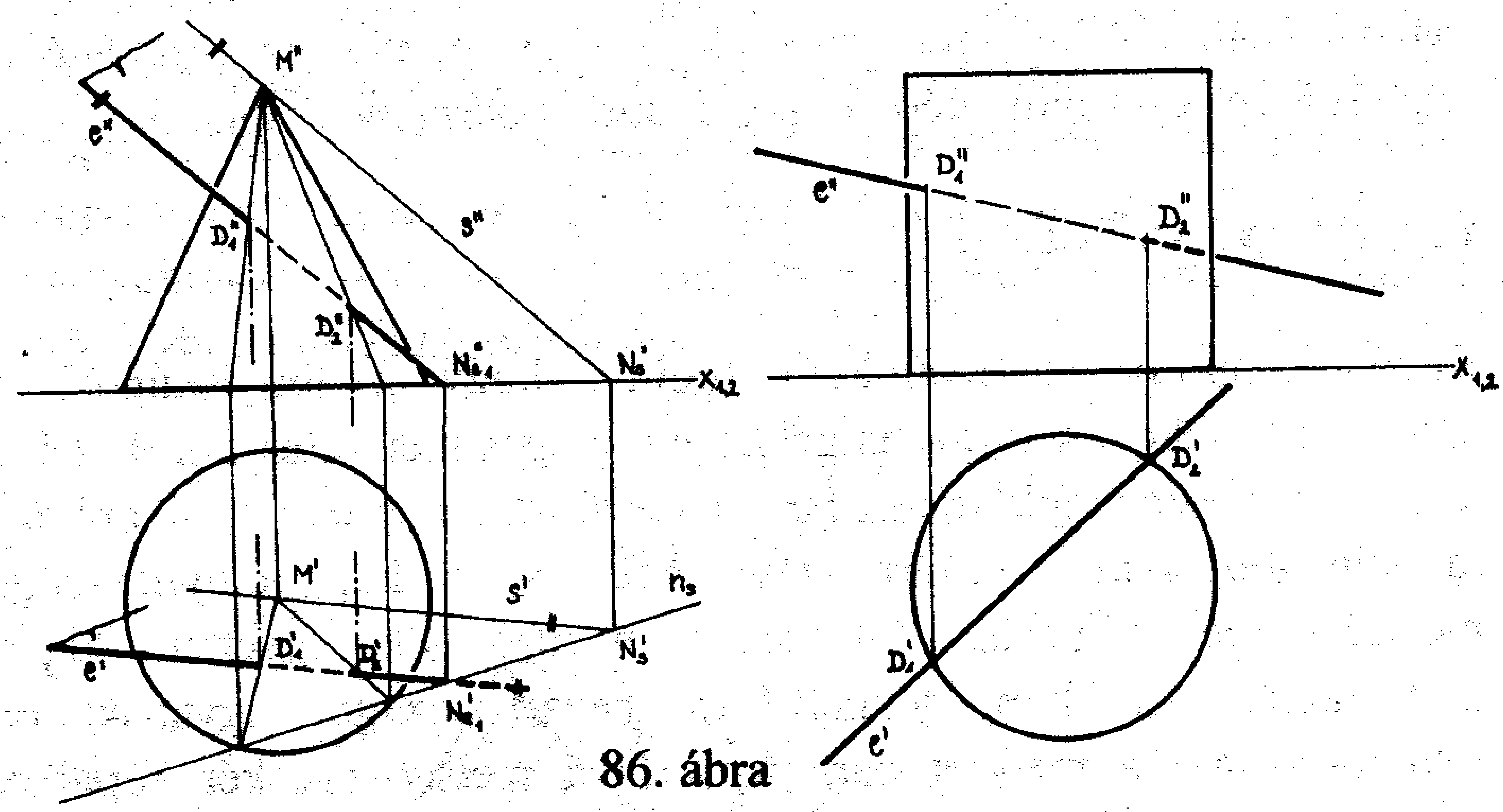
Felületi pontot általában valamilyen jól rajzolható felületi görbére illesztve ábrázolhatunk. A kúpon és hengeren jól rajzolható görbék a tengelyre merőleges síkú körök, valamint a felületi alkotók.(85. ábra) Itt is, mint a gömbfelület esetében, a pont egyik képét tetszőlegesen kijelölhetjük, majd körmetszetet vagy alkotót illesztve rá, a felületi görbe másik képén két lehetséges képpontot kapunk (ezek is másodrendű felületek).



85. ábra

Kúp és henger metszése egyenessel

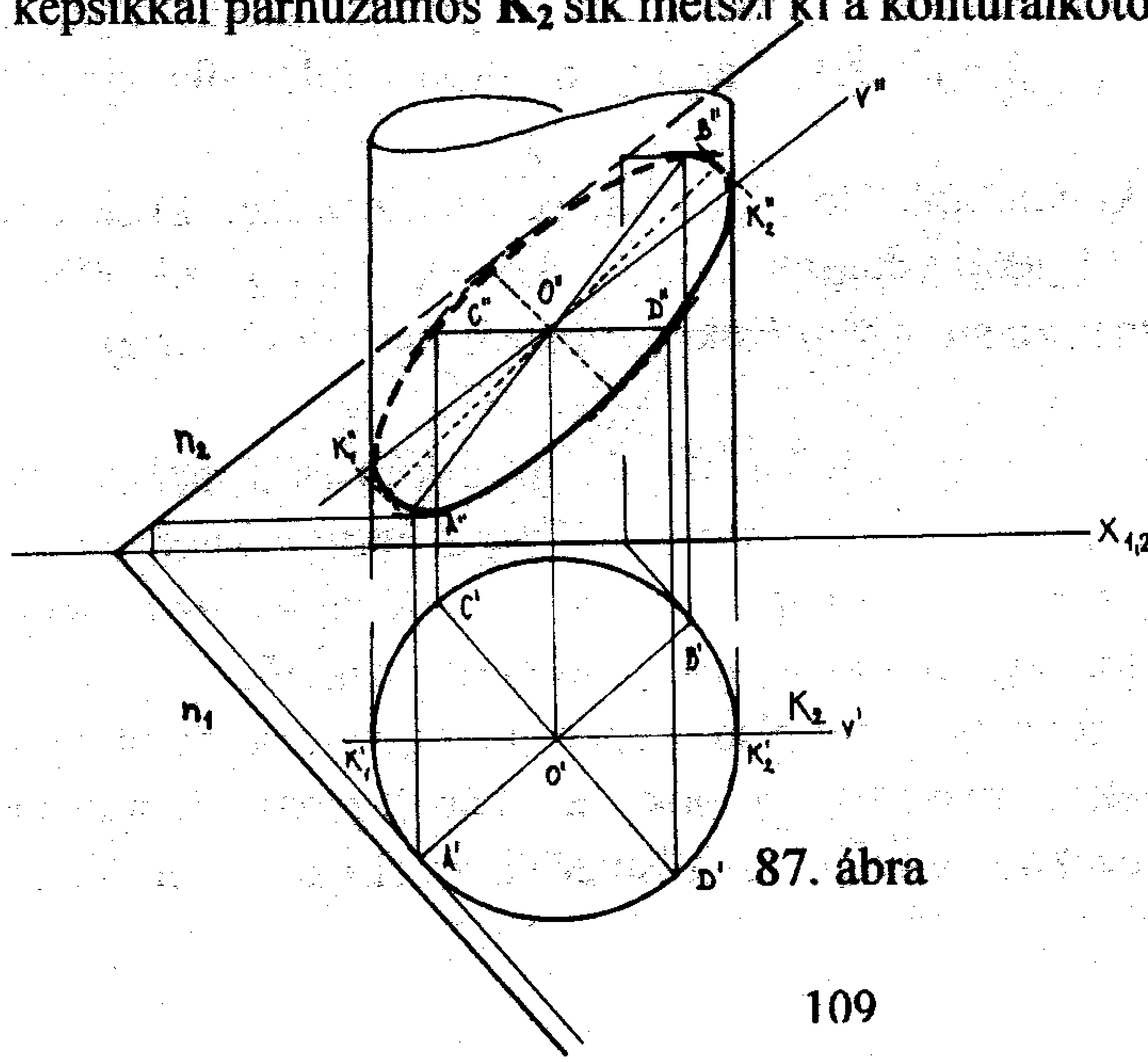
A szerkesztés elve megegyezik a gúla és egyenes döféspontjánál tanultakkal. Az egyenes és a kúp csúcspontja által meghatározott sík ha belemetsz az alapkörbe, kijelöli annak a két alkotónak a talppontját, amelyek a döféspontokat tartalmazzák. Egy közös pont van, ha a nyomvonal érinti az alapkört. (86. ábra.) Egy egyenesnek a felülettel legfeljebb két döféspontja lehet, ezért a kúp és a henger másodrendű felület.



86. ábra

Henger síkmetszése

Az első képsíkon álló hengert a dőlt sík ellipszisben metszi, melynek első képe kör. A metszetellipszis nagytengelye a sík esésvonalára eső AB, kistengelye a CD első fővonal. Ezek a második képen konjugált átmérőpárt alkotnak. A metszet második kontúrpontjait a tengelyre illeszkedő második képsíkkal párhuzamos K_2 sík metszi ki a kontúralkotókból (87. ábra).



87. ábra

Az általános helyzetű metsző síkot lehet pl. $x_{1,4}$ segítségével vetítősíkká is transzformálni. A metszet negyedik és első képéből az elmaradó rendezők felmérésével a második kép konjugált átmérőpárja megkapható.

Forgáskúp síkmetszetei

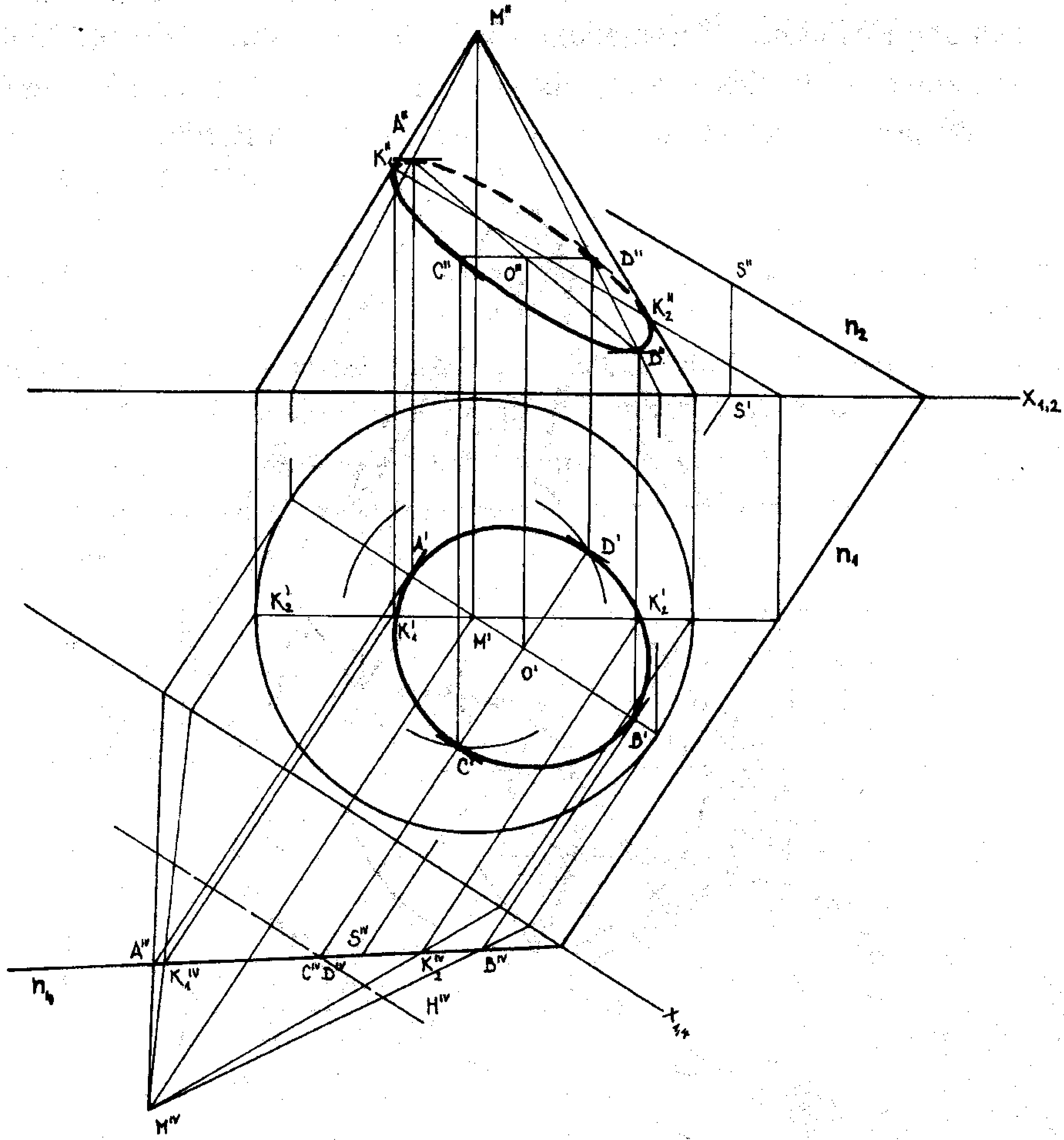
Középiskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy a forgáskúpnak többféle síkmetszete lehet. A forgástengelyre merőleges metszetek körök, bármely kör tekinthető a kúp alapkörének. Ha a metsző sík a kúp összes alkotóját átmetszi (a kúp tengelyével bezárt szöge nagyobb a kúp félnyílásszögénél), a metszésgörbe ellipszis. Amikor a metsző sík egyetlen kúpalkotóval párhuzamos (a kúp tengelyével bezárt szöge ugyanakkora, mint félnyílásszöge) a metszet parabola. Ha a metsző sík két kúpalkotóval is párhuzamos, a két végtelen távoli ponttal rendelkező síkmetszet hiperbola.

Szerkesszük meg függőleges tengelyű forgáskúp *ellipszismetszet*ét általános helyzetű síkkal.

Két különböző szerkesztési módszert alkalmazhatunk:
1. A vízszintes síkok a kúpot körökben, a metsző síkot fővonalban metszik. Az azonos szintben lévő körök és egyenesek közös pontjai szolgáltatják a síkmetszet pontjait. (Ezzel az eljárással bármilyen forgásfelület síkmetszete szerkeszthető.)
2. A metsző sík és a kúpalkotók döféspontjainak szerkesztése. Ezeket a döféspontokat közvetlenül leolvashatjuk azon a képen, ahol a sík élben látszik, ezért célszerű a metsző síkot vetítősíkká transzformálni (88. ábra).

> A metszetellipszis AB nagytengelye illeszkedik a kúp és a metsző sík közös szimmetriasíkjára, a CD átmérő az ellipszismetszet kistengelye, negyedik vetítősugár, és felezi a nagytengelyt. Első képe, a rajta átmenő vízszintes körmetszet vagy alkotó segítségével szerkeszthető.
> A metszetellipszis tengelyei az első képen is egymásra merőleges átmérők (tengelyek), második képük a képellipszis konjugált átmérőpárja, ezért ezekben a pontokban ismerjük az ellipszis érintőit is.

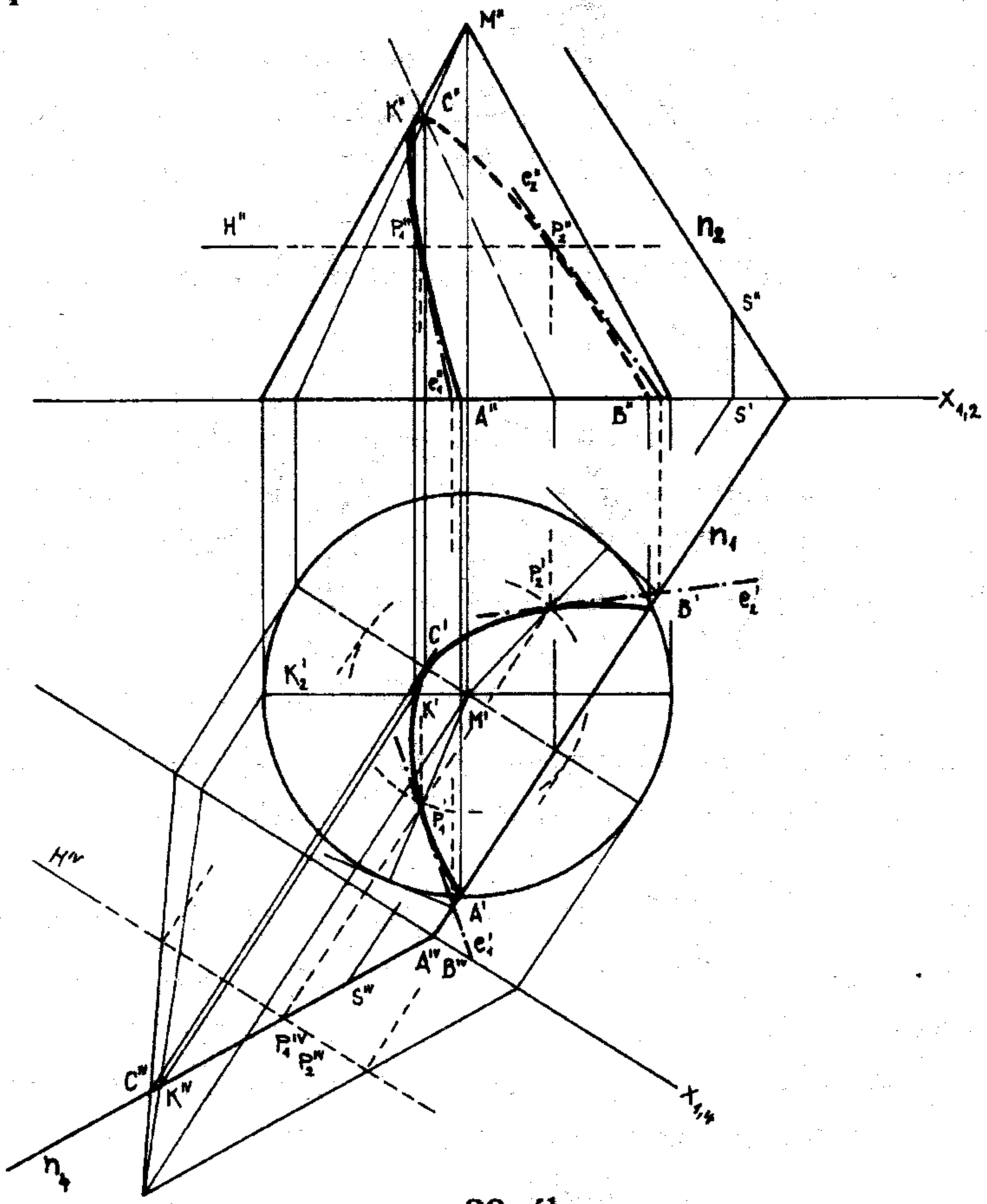
Meg kell keresni a második kontúralkotók síkkal való döféspontjait is, hiszen ezek választják el a felületen a metszésgörbe látszó és nem látszó részét. Ezt lehet a negyedik képről visszavetíteni, vagy közvetlenül döféspontot szerkeszteni. Mivel a második kontúrsík illeszkedik a kúp tengelyére, ezért a metsző sík kontúrsíkba eső második fővonala is a kontúrpontokat jelöli ki a megfelelő alkotókon. Kontúrpontban az érintő egybeesik a kontúralkotóval.



88. ábra

Forgáskúp parabolametszete

Vegyünk fel a kúpfelületen egy tetszőleges C pontot. Szerkesszük meg azt a parabolametszetet, amelynek C a csúcspontja (89. ábra)! A C pont és a kúp tengelye jelöli ki a metszet szimmetriasíkját (első vetítősík), az ezzel párhuzamos negyedik képen a metszet síkja élben látszik (C kontúrra kerül). A metszet alapkörre eső pontjait és csúcspontját ismerjük, C-ben az érintőt is (ez merőleges a metsző sík és a kúp közös szimmetriasíkjára, - a metsző sík első fővonala). További pontokat vízszintes szeleteléssel vagy alkotók segítségével kaphatunk. A második kontúrpont szerkesztése az előző feladat szerint történik.



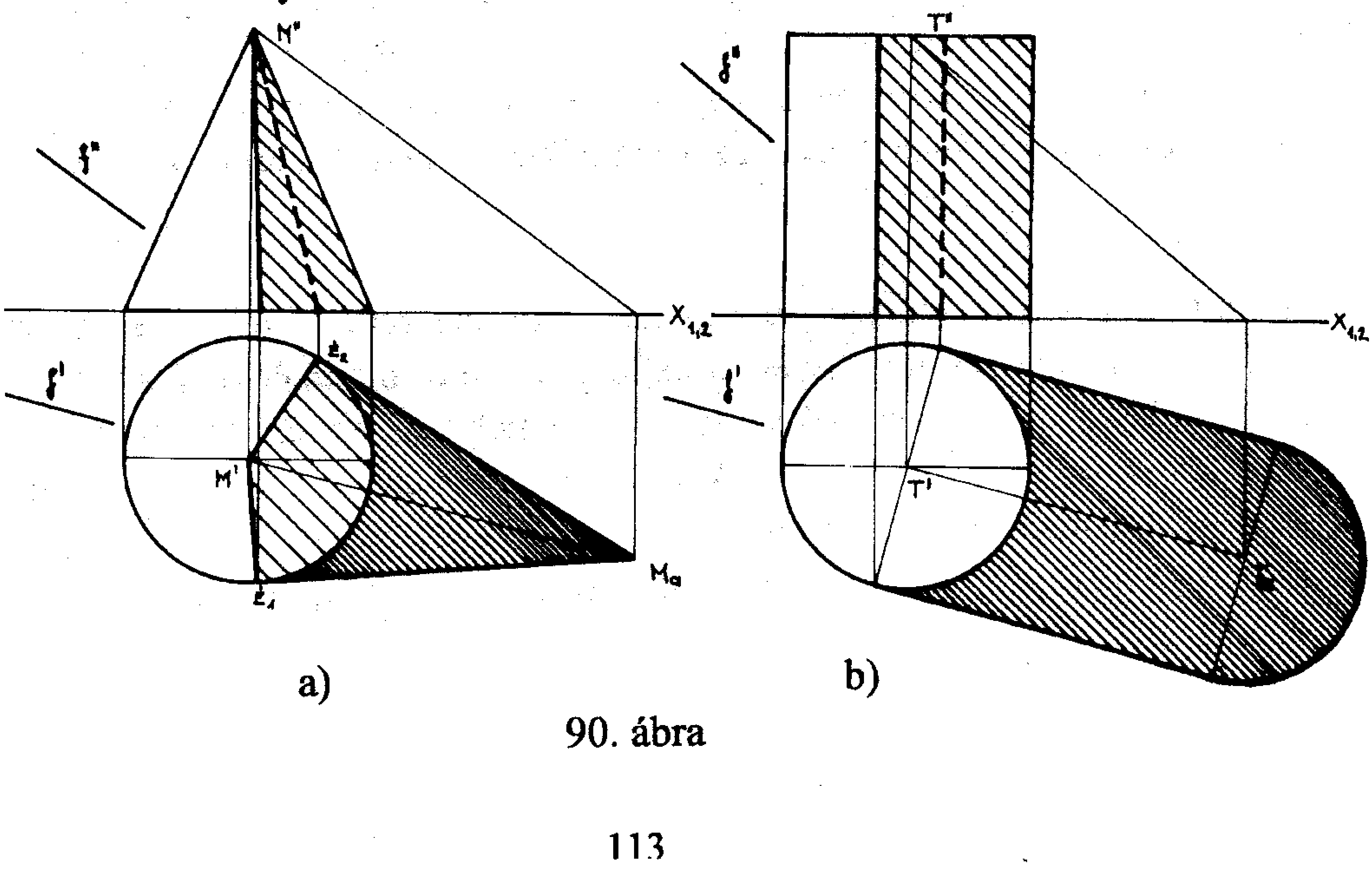
89. ábra

A síkmetszet tetszőleges pontjában térgeometriai megfontolásokkal *érintőt is szerkeszthetünk. Az érintő egyenes a metsző sík és a pontbeli felületi érintősík metszésvonala.* Az érintő egyenes egy pontja ismert (P_1 ill. P_2), másik pontjaként szerkesszük meg az érintő első nyompontját. Ez az érintősík és metszősík első nyomvonalának metszéspontja.

A kúp hiperbolametszetének szerkesztése az előbbiekhez hasonlóan történik. Bár a kúpszeleteket öt adat (pl. öt pontja) egyértelműen meghatározza, a két hiperbolaág szép megrajzolásához általában jóval több szerkesztett pont szükséges.

Kúp és henger árnyéka

Szerkesszük meg az első képsíkon álló forgáskúp árnyékát az adott fénysugárirány mellett (90/a. ábra). Az összes kúpalkotó árnyékát megkaphatjuk, ha a csúcspont alapsíkra vetett árnyékát összekötjük az alapkör minden pontjával. Természetesen elegendő a vetett árnyék szélét megrajzolni, vagyis érintőket szerkeszteni az alapkörhöz. Az érintési pontok kijelölik az önárnyékhatár alkotókat, amelyek elválasztják a felület világos és árnyékos részét. A vetett árnyék felöli felületrész az önárnyékos.



90. ábra

Henger esetében a szerkesztés az előbbivel megegyező, de itt az M csúcs a végtelenben van. A henger alkotói párhuzamosak tengelyével, ezért először a henger tengelyének árnyékát szerkesztjük meg (90/b. ábra). A tengely tetszőleges T pontjának alapsíkra vetett árnyékát összekötjük a tengely talppontjával. Ezzel az egyenessel párhuzamos az alkotók árnyéka. Az önárnyékhatár alkotókat a tengelyre illeszkedő fénysíkkal párhuzamos érintősíkok jelölik ki.

MÁSODRENDŰ FELÜLETEK ÁTHATÁSA

Az áthatás szerkesztési elve megegyezik a szögletes testeknél tanultakkal, de a munkát nehezíti, hogy itt nincsenek kitüntetett élek.

Másodrendű felületek áthatása általában negyedrendű térgörbe. A görbe meghatározásához nem elegendő néhány pont szerkesztése. A görbe (és a vetületek) mindig csak közelítőleg határozható meg véges sok pontjával és érintőjével.

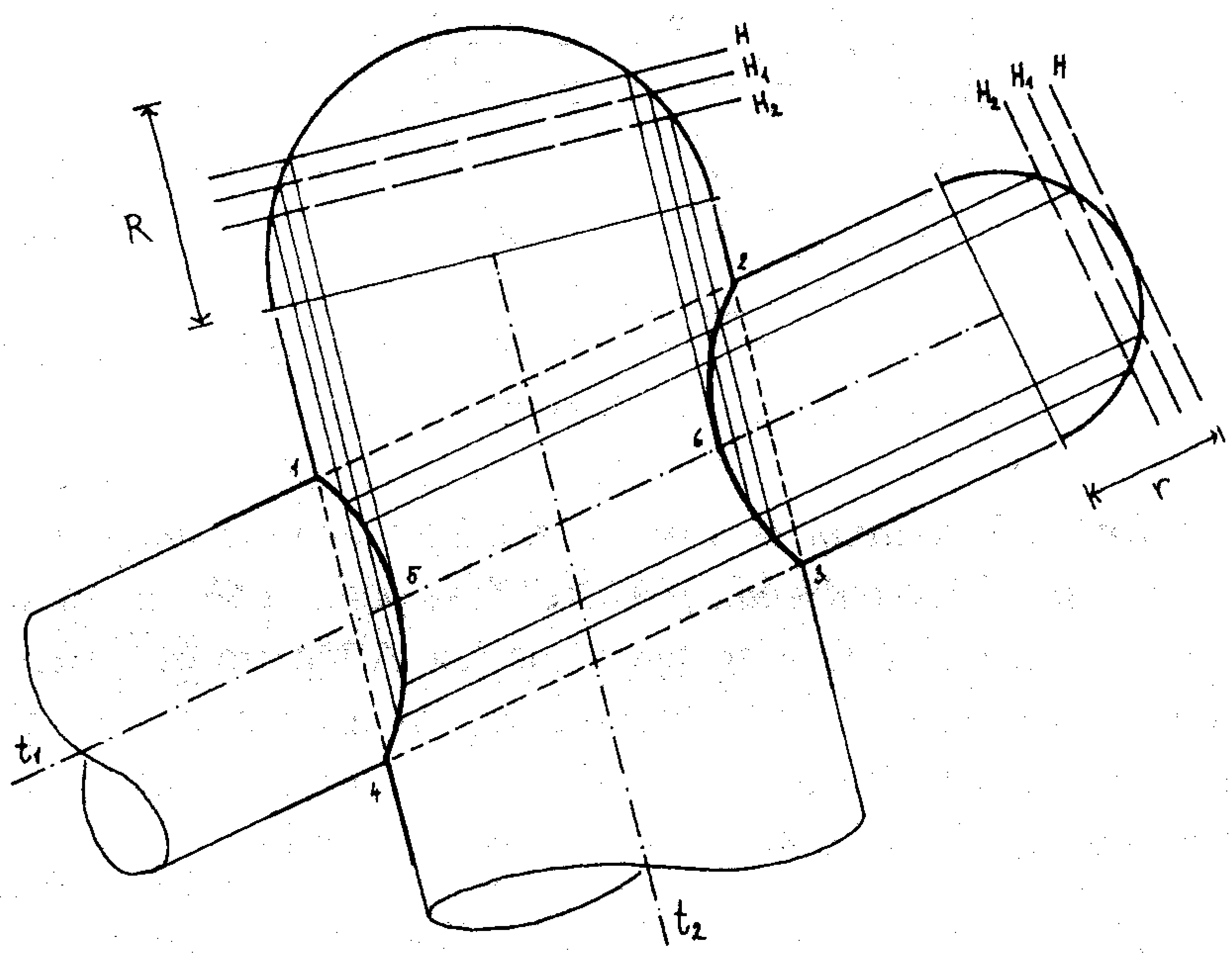
Az áthatási görbe helyes megrajzolását a lényeges pontok és érintőik megrajzolása nagymértékben segíti. Először tisztáznunk kell, hogy az áthatási görbe egy vagy két darabból áll-e (ugyanúgy, mint gúla és hasáb esetén), kettősvetületként jelenik meg vagy széteső áthatásról van-e szó. Ha a két felületnek egy pontban közös az érintősíkja, ebben a pontban az áthatási görbe önmagát metszi.

Az áthatási görbe előzetes vizsgálata után célszerű előbb a különleges pontokat megszerkeszteni. Ezek: a kettőspont, ahol mindkét felületnek közös az érintősíkja; szimmetriasíkra eső pont, melyben az érintő merőleges a szimmetriasíkra; mindkét felület kontúrjaira eső pontok, ahol a kontúrgörbe érintője egyúttal az áthatási görbe érintője is. Ezután annyi általános pontot szerkesztünk (érintővel), hogy a görbét egyértelműen megrajzolhassuk.

Általános szerkesztési módszerünk lehet a szeletelés. Olyan szeletelő síkokat kell keresnünk, amelyek – mindkét felületből egyszerre – jól megrajzolható görbéket metszenek ki. E metszésgörbék közös pontjai szolgáltatják az áthatási pontokat.

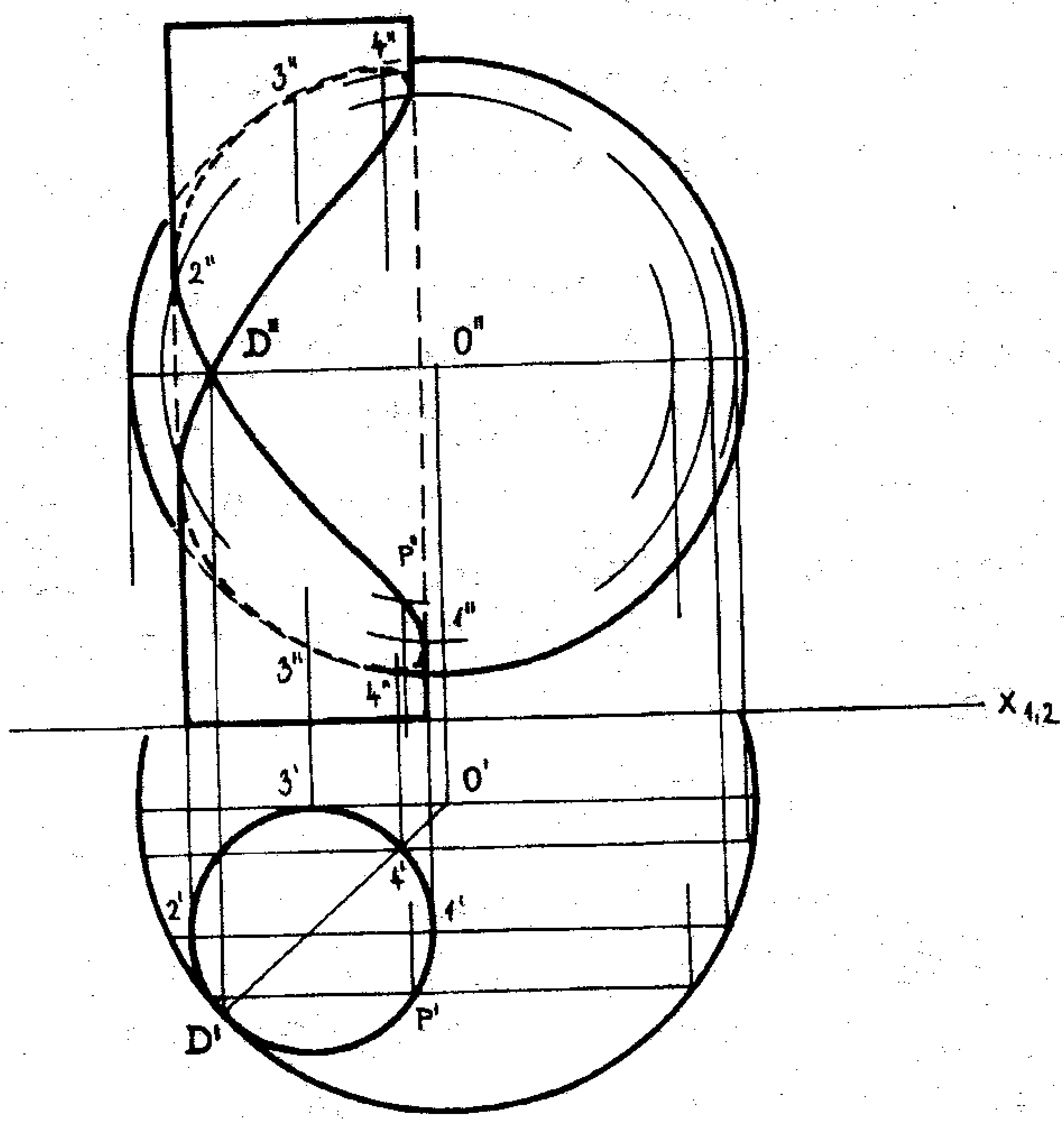
Szerkesszük meg két metsző tengelyű, különböző sugarú henger áthatását. A tengelyek síkját (közös szimmetriasíkjukat) a rajzunk síkjának tekintve elegendő a hengereket egyetlen képen ábrázolni (91.ábra).

A kontúralkotók 1, 2, 3, 4 metszéspontjai áthatási pontok. További közös pontokat kaphatunk a szimmetriasíkkal párhuzamos szeleteléssel. A síkok helyzetét a tengelyekre merőleges metszetek beforgatásán jeleztük. Az utolsó szeletelő sík a kisebbik henger érintősíkja. Az áthatás kettősvetületben jelenik meg. Szimmetriasíkra vetítve a negyedrendű térgörbe fokszáma feleződik, a vetület két darabból álló másodrendű görbe, hiperbolaív.



91.ábra

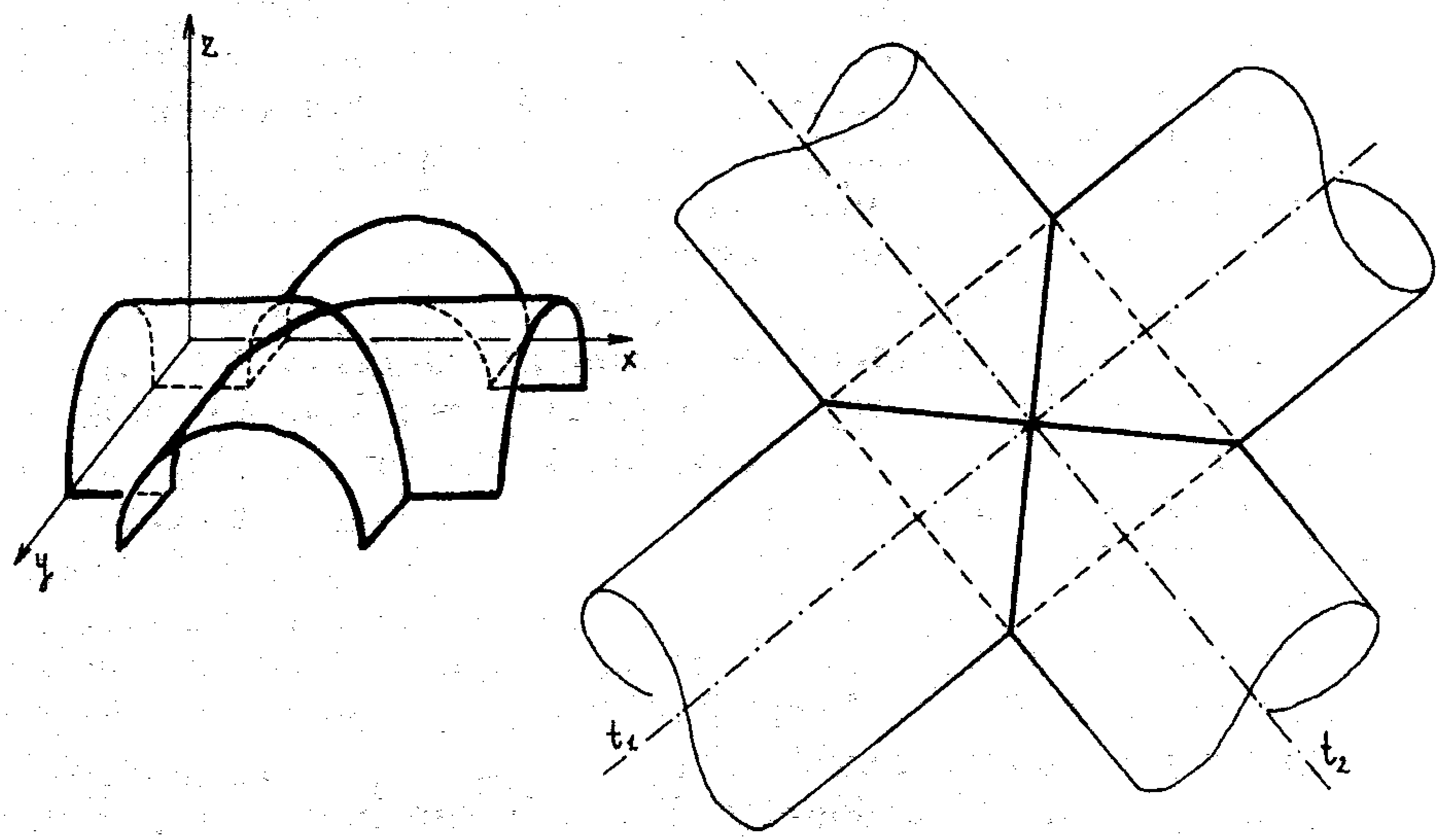
Ha az egyik felület gömb, akkor belőle a szeletelő síkok, mindig köröket metszenek ki. A közös érintési ponttal rendelkező gömb és vetítőhenger áthatása ezért vagy vízszintes, vagy a 92. ábrán látható függőleges szeletelő síkok alkalmazásával is egyszerűen szerkeszthető.



92. ábra

Ha *két különböző pontban is közös a felületek érintősíkja, a negyedrendű áthatás szétesik két másodrendű görbére.* Erre példa a 93. ábrán két egyenlő sugarú, metsző tengelyű forgáshenger áthatása. A legalsó és legfelső alkotóik közös érintősíkba esnek. A két, függőleges síkban levő áthatási ellipszisnek egyik tengelye a rajz síkjára (közös szimmetriasíkjukra) merőleges szakasz, a vízszintes tengelyeiket a kontúralkotók metszése jelöli ki.

Széteső áthatásra példa a kúp vagy henger bevett árnyéka, ahol a fedőkör egyúttal a fényhenger alapköre is (ez az egyik áthatás-kör), az áthatás másik darabja a bevetett árnyék.



93. ábra

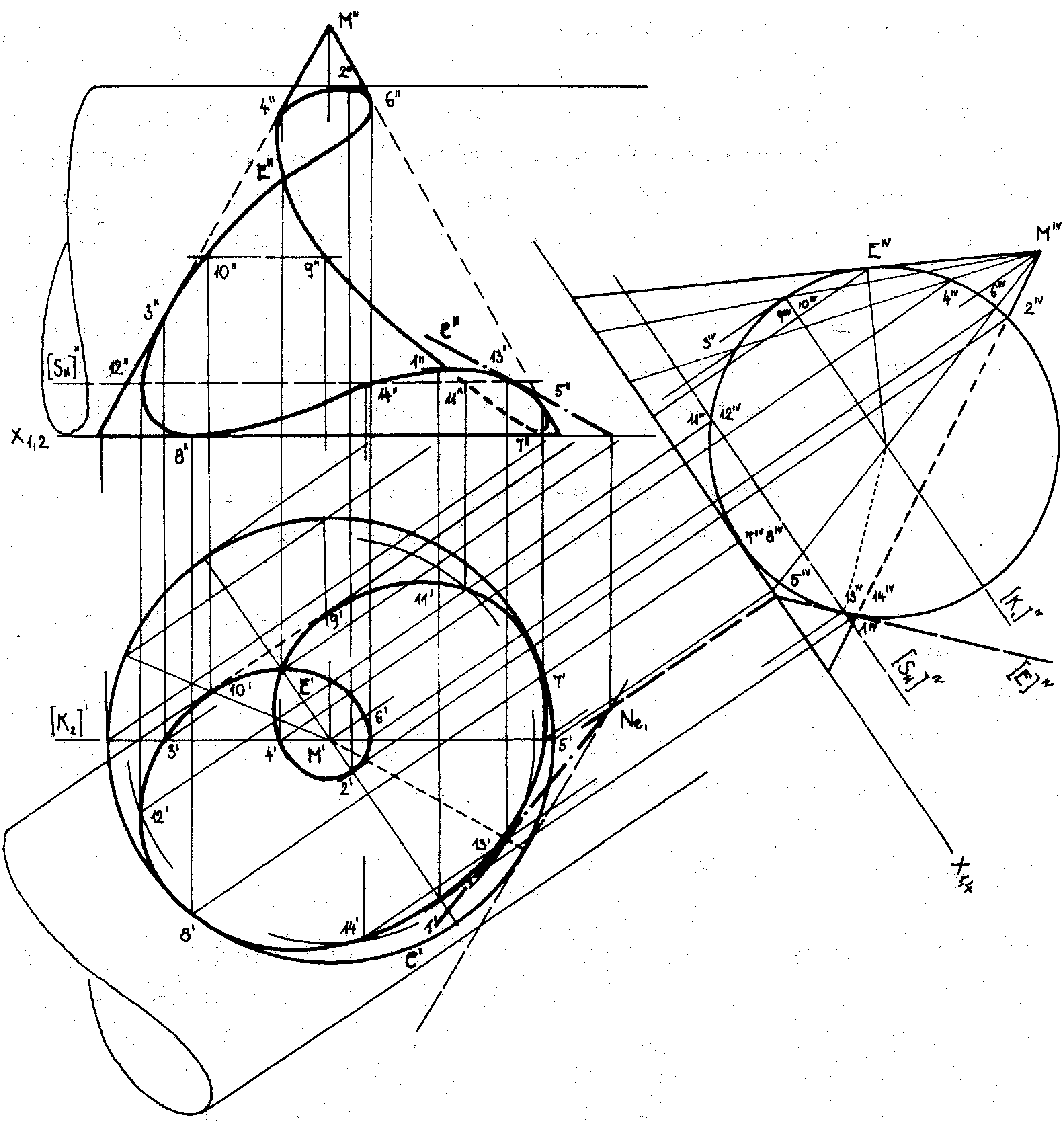
Ha az áthatásban szereplő felületek egyike henger, praktikus azt vetítőhengerré transzformálni, mert az áthatási görbe negyedik képen körívnek látszik.

Szerkesszük meg első képsíkon álló forgáskúp és vízszintes tengelyű forgáshenger áthatását abban a különleges helyzetben, amikor a két felületnek az E pontban közös az érintősíkja (94. ábra)!

Ha a hengert vetítő helyzetben látjuk, az áthatás a henger alapkörének a kúp belsejébe eső része.
Úgy vettük fel az ábrát, hogy a henger egy pontban (E) érintse a kúpot.
Nevezetes pontok szerkesztése:
1. *Kettőspont vagy duplapont*: E , a közös pont.
2. *Szimmetriasíkba eső pontok*: A szimmetriasík illeszkedik a kúp tengelyére és merőleges a hengeralkotókra. A negyedik kép fölfogható úgy is, mint egy szimmetriasíkkal való metszet. A negyedik kontúralkotók és a henger közös pontjai: E – a duplapont, valamint az 1 és 2 pontok, a szélső értékhelyek – ahol az érintők vízszintesek, merőlegesek a szimmetriasíkra.

3. *Kontúrpontok* (meg kell keresni mindkét felületnek az első és második kontúrjára eső áthatási pontokat!):
A kúpnak első kontúrja nincs. *Az áthatási görbe második kontúrpontjai a kúpon* a második kontúralkotók hengerrel való döféspontjai. Ezt negyedik képen szerkesztjük: a második kontúrsíkba eső alkotók negyedik képén a hengerrel való metszéspontok a 3, 4, 5, 6, első és második képük rendezővel visszavihető. Második képen a kúp *kontúralkotója* egyúttal a *metszésgörbe érintője* is.
A *henger első kontúr*síkja a kúpból kimetsz egy kört. Ennek első képe jelöli ki a kontúralkotó(k)-ból a kontúrpontokat (9, 10). Ugyanez úgy is megszerkeszthető, hogy a gúla csúcsán és a kontúralkotókon ($M^{IV}9^{IV}$, $M^{IV}10^{IV}$) átmenő negyedik vetítősík első nyomvonala az alapkörből kimetszi a kontúrpontokat hordozó kúpalkotók talppontját. Az első kontúralkotóra eső pontokban az alkotó egyúttal a metszésgörbe érintője is. A henger *második kontúralkotói* a legalsó és legfelső alkotók. Negyedik képen a rájuk illesztett vízszintes sík kimetszi a kúpból azt a kört, amely az alkotóra eső döféspontokat tartalmazza: első képen a tengellyel fedésben levő alkotó(k) és a kör metsződése (7, 8 pont). (Az ábrán a legfelső alkotó a kúp előtt halad, nincsen rajta döféspont.) Ezekben a pontokban a második kontúralkotó egyúttal a metszésgörbe érintője is.
4. *Általános pont* szerkesztése: a tetszőleges magasságban felvett szeletelő sík a hengerből alkotókat, a kúpból köröket metsz ki. Ezek első képét megrajzolva a 11, 12 pontok első képét kapjuk. Lehet a pontokat alkotók segítségével is megkeresni. Második képre rendezővel, elmaradó rendezővel vagy alkotó segítségével vihetők föl a pontok.
Érintő szerkesztése: negyedik képen a henger érintősíkja 11^{IV}, 12^{IV}-ben vetítősík, amely érinti a henger alapkörét – első nyomvonala, n_1 merőleges $x_{1,4}$-re. A kúp érintősíkjának első nyomvonala érinti a kúp alapkörét. A nyomvonalak metszéspontja az érintő nyompontja.
5. A metszésgörbe *összekötésének sorrendje* a negyedik képről leolvasható – az E duplaponton az áthatási görbe kétszer megy át. Első képe a függőleges helyzetű szimmetriasíkra tükrös. A második képen az összekötés sorrendje megegyezik az első kép sorrendjével.
6. A *láthatóság* megállapításához el kell döntenünk, hogy melyik testet vagy felületet kívánjuk eltávolítani. Itt a kúp láthatóságát rajzoltuk meg úgy, hogy a hengert és a közös testrészt eltávolítottuk. Első képen a teljes kúpfelület látszik – rajta az áthatási görbe minden pontja látható. A henger első kontúralkotóira eső pontok között a hiányzó henger okozta „furat" szaggatott vonalban megjelenik. Második képen a kúp második kontúrsíkja előtti görbeívek látszanak, a 3-5 között az alsó ív és a 4-6 pontok közötti felső. Az 1 és 2 pontokban az érintő vízszintes. A kúp második kontúralkotóiból a 3–4 és 5–6 pontok közötti szakaszt a

henger kivágta. A kimetszett nyíláson belelátunk a kúp belsejébe, ezért a kúp hátsó felén lévő metszésgörbék is látszódnak. A henger második kontúralkotójára eső (7" 8") döféspontok között a hiányzó henger nyoma megjelenik. Az 1–5 közötti ív eltakarja az 5–7–11 ív egy részét – ez szaggatott.



94. ábra

TOVÁBBI MÁSODRENDŰ FELÜLETEK

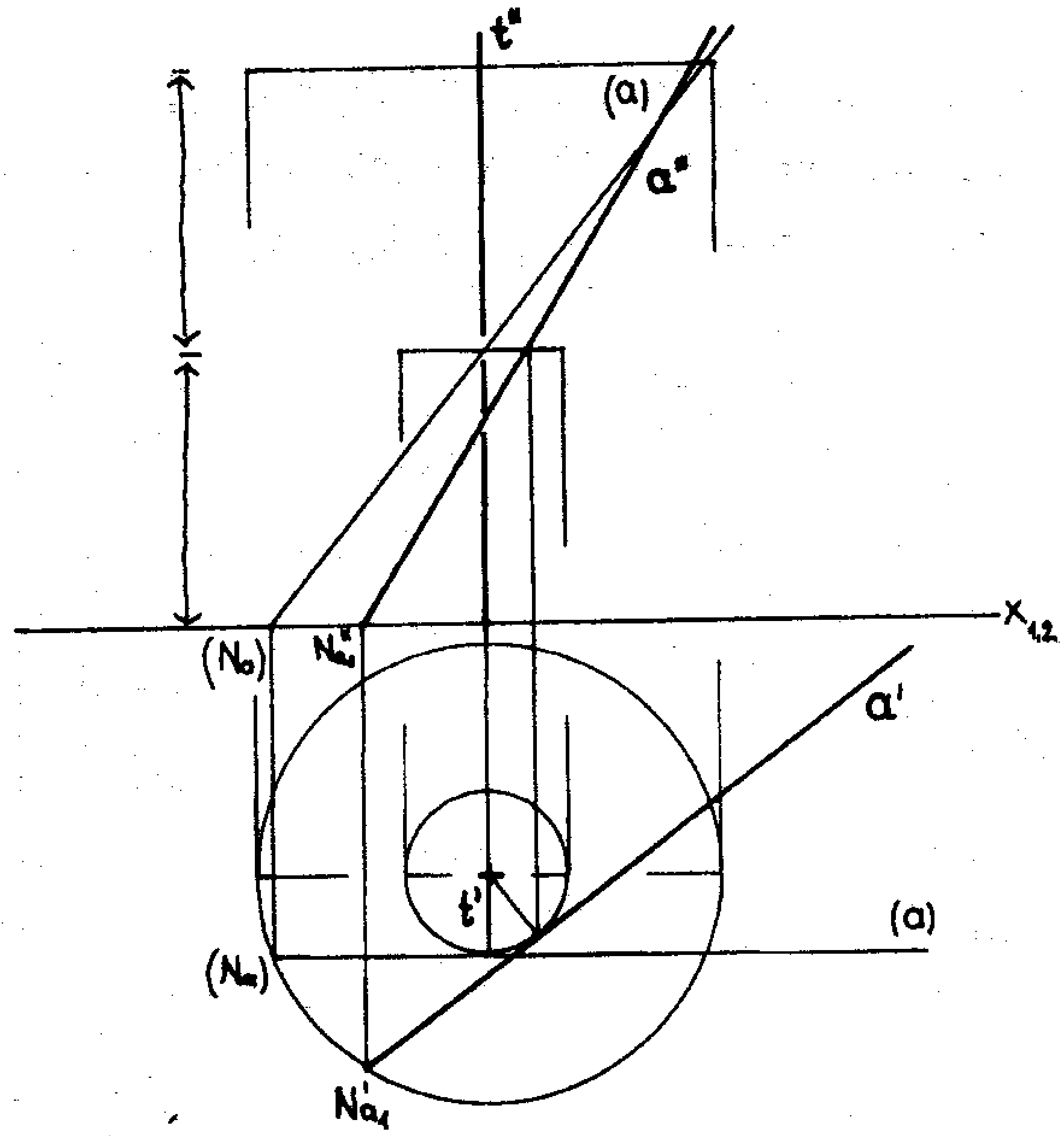
A gömb, kúp és a henger a legegyszerűbb másodrendű felületek . További másodrendű felületek származtathatók, ha a másodrendű görbéket szimmetriatengelyük körül megforgatjuk.Az ellipszis bármely tengelye körüli forgatásakor *ellipszoid*, a parabola tengelye körüli forgatásakor *elliptikus paraboloid* jön létre. A hiperbolát két tengelye körül is forgathatjuk. Képzetes tengelye körül forgatva *egyköpenyű hiperboloidot* (hűtőtornyok, nádszékek), valós tengelye körül forgatva *kétköpenyű* vagy *elliptikus hiperboloidot* kapunk. (A felületek ponttípusait a 99. oldalon ismertettük). A *hiperbolikus paraboloid* vagy *nyeregfelület* az egyetlen olyan másodrendű felület, amely nem származtatható forgatással.Bizonyítható, hogy az itt felsoroltakon kívül több másodrendű felület nincs. Térbeli affinításokkal az általánosabb un. háromtengelyű másodrendű felületekből is az előbb felsoroltakhoz juthatunk.

A másodrendű felületek közül sokrétű gyakorlati alkalmazási lehetőségük miatt az egyenes alkotókkal rendelkezőkkel foglalkozunk.

Ha egy egyenes mint tengely körül egy másik egyenest forgatunk – egymáshoz viszonyított helyzetüktől függően – háromféle felülethez juthatunk. Ha az egyenesek metszők, forgáskúp, ha párhuzamosak, hengerfelület jön létre. A forgástengelyhez képest kitérő helyzetű egyenes forgatásakor egyköpenyű hiperboloidot kapunk.

Egyköpenyű hiperboloid

Az **a** alkotó forgástengelyhez legközelebbi pontja a *torokkört* írja le (sugara a két kitérő egyenes távolsága), nyompontja a hiperboloid *alapkörét*. Szokás a felület alapkörrel egybevágó *fedőkörét* is megrajzolni. A felület minden alkotója ugyanakkora szöget zár be a vízszintes síkkal (95. ábra), ez második képen leolvasható, ha az alkotó képsíkkal párhuzamos helyzetű.



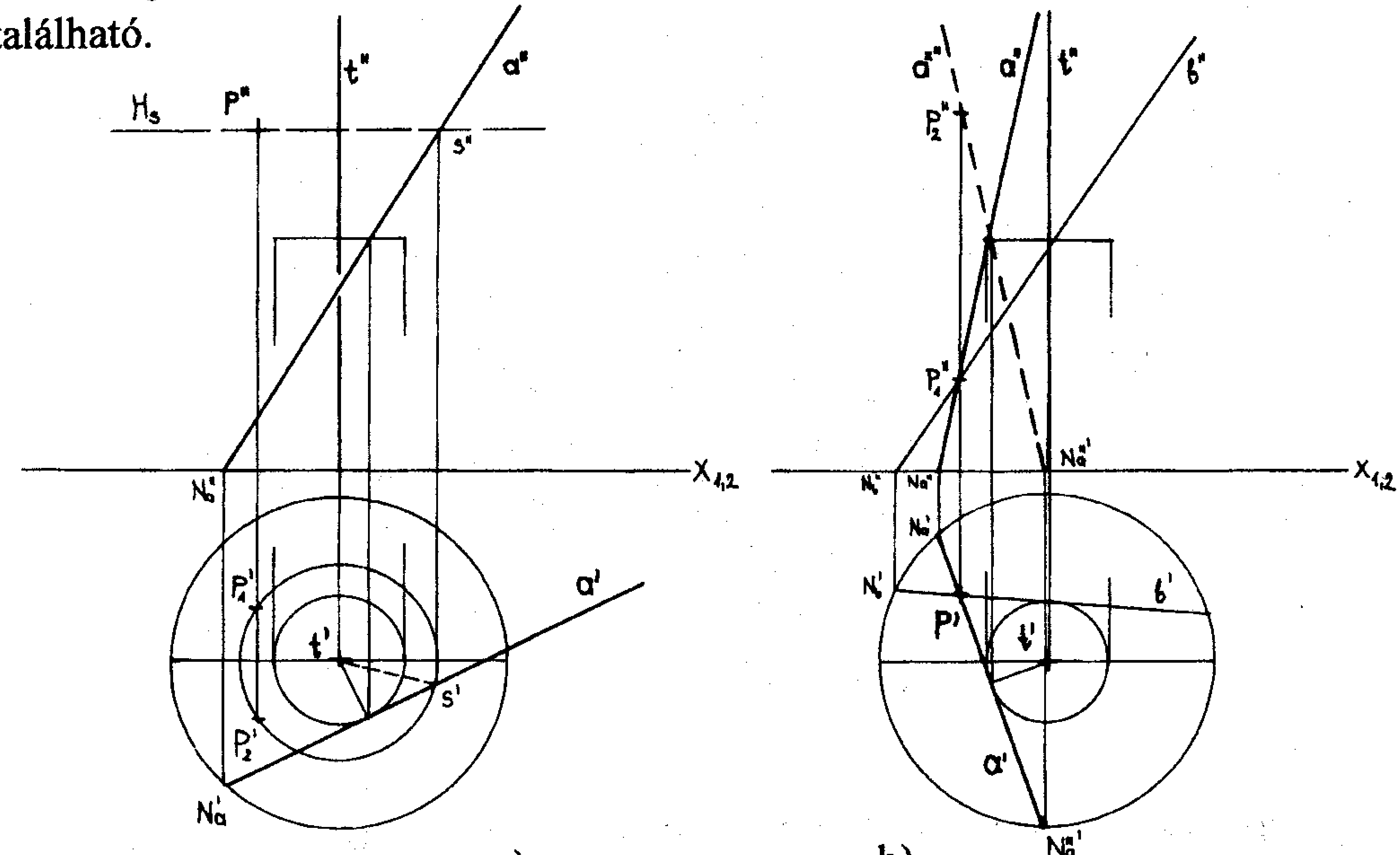
95.ábra

Ha képzetes tengelye körül forgatjuk a hiperbolát, az aszimptoták forgatásakor kúp is létrejön. Ez az *aszimptotikus (közelítő) kúp*, melynek csúcsa a torokkör középpontja, alkotói pedig párhuzamosak a felületi alkotókkal.

A tengely körül forgatandó hiperbola pontjait nem szoktuk szerkeszteni, hanem az elég sűrűn megrajzolt alkotóseregre, mint érintőkre illesztjük a görbét. A hiperboloid minden pontján két felületi alkotó halad át, melyek azonos szöget zárnak be a tengellyel, vagyis *két különböző alkotósereg* található a felületen. Az azonos seregbeliek kitérők, a különböző seregbeliek metszik egymást.A felület bármely P pontján átmenő két különböző seregbeli alkotó az egyköpenyű hiperboloid P pontbeli felületi érintősíkját alkotja (96/b.ábra). Ez természetesen az érintési pont környezetében belemetsz a felületbe, ezért a felület minden pontja hiperbolikus.

Pont illesztése egyköpenyű hiperboloidra

A hiperboloid teszőleges pontjának egyik képét kijelölhetjük, a másik képet a rá illeszkedő paralelkörön (96/a.ábra) vagy felületi alkotókon (96/b.ábra) szerkesztjük. Mivel a felület másodrendű, egy vetítősugáron két pont található.

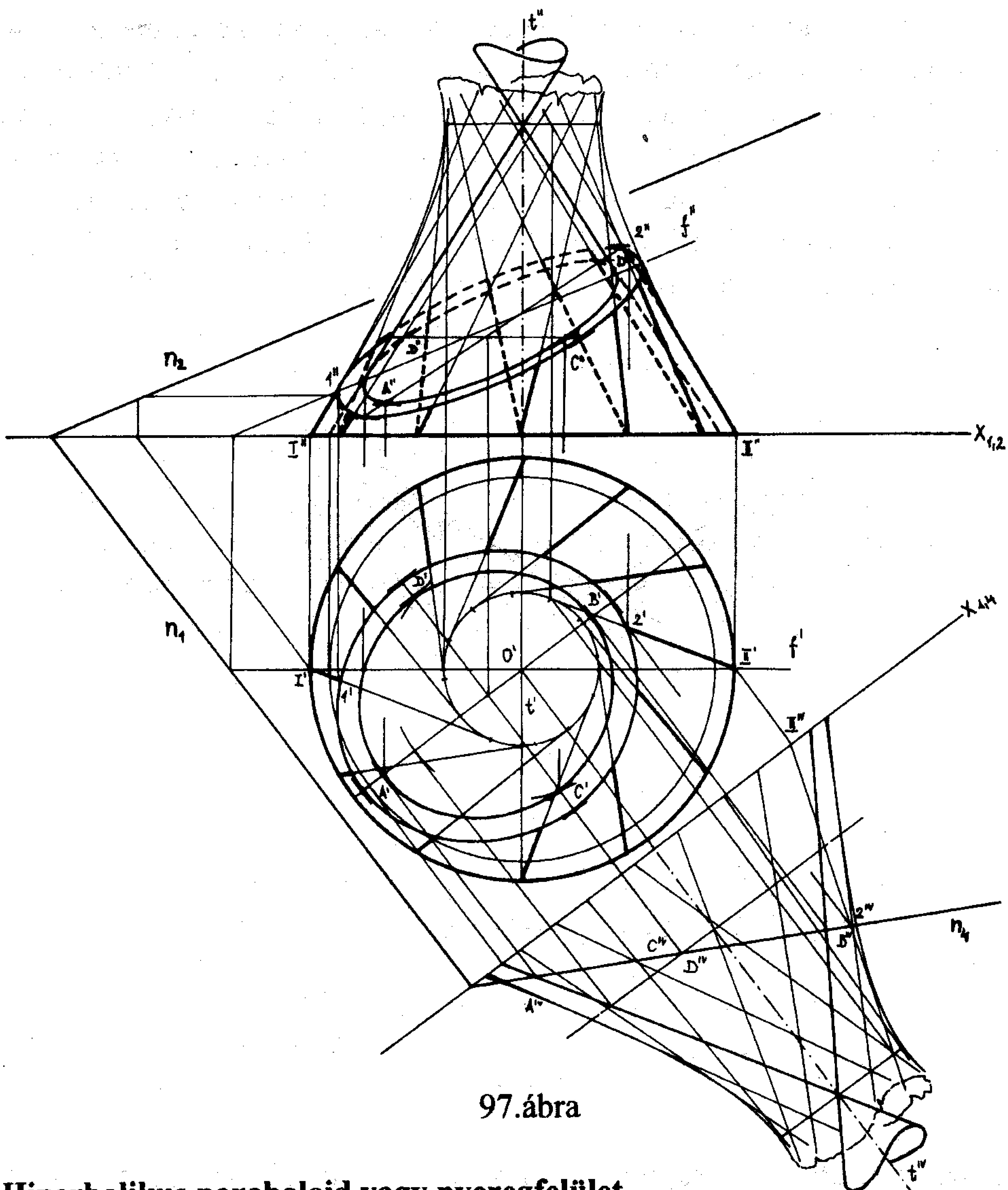


a) b)

96.ábra

Egyköpenyű hiperboloid síkmetszése

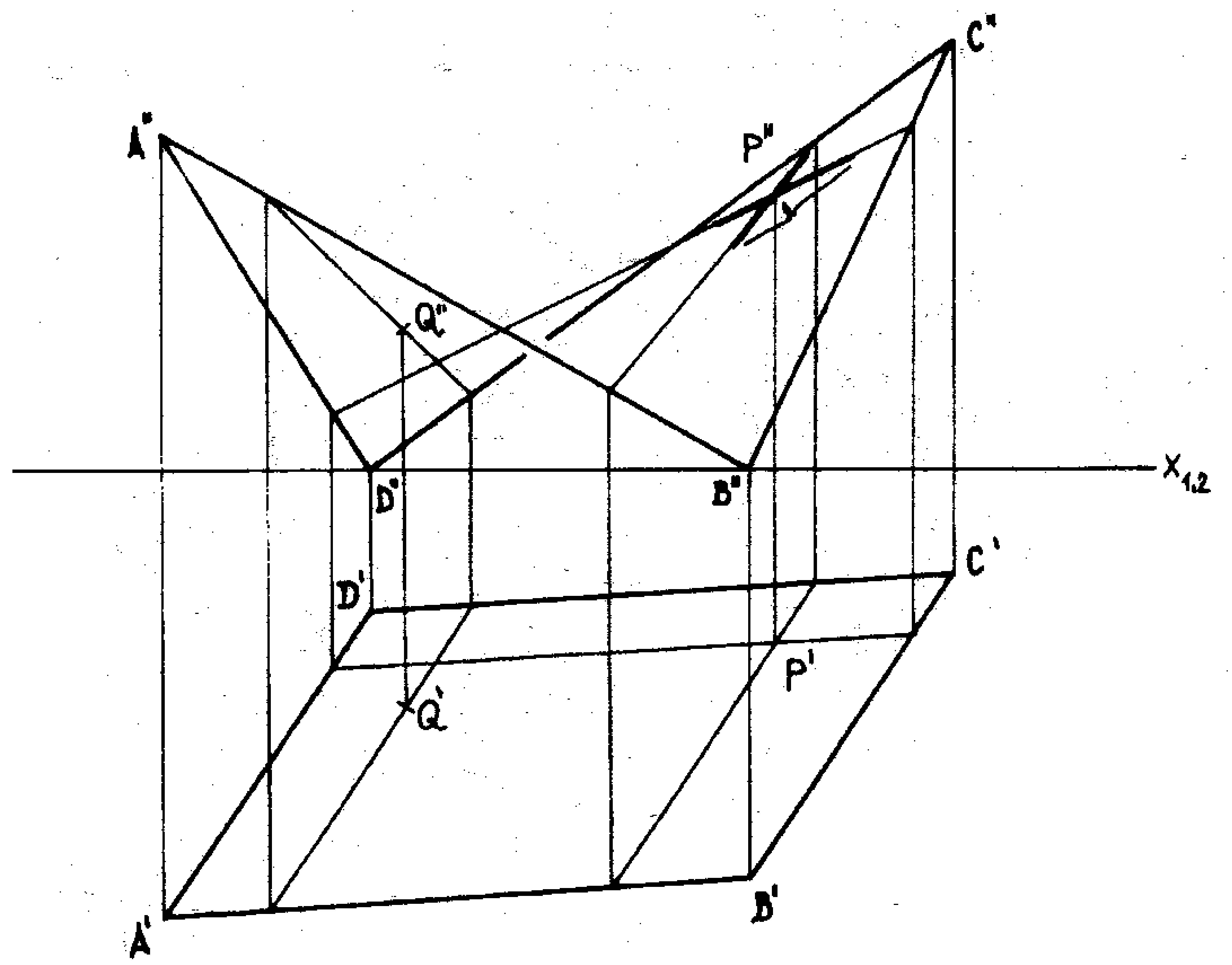
A hiperboloid alkotóinak döféspontjai a metsző sík vetítősíkká transzformált nézetéről olvashatók le (97.ábra). Ezen a képen fölismerhető a síkmetszet típusa is. A hiperboloid síkmetszete másodrendű görbe, melynek fajtája (végtelen távoli pontjainak száma szerint) megegyezik az aszimptotikus kúpjából kimetszett görbéjével (ellipszis). A metszet kontúrpontját második képen a metsző sík második kontúrsíkba eső fővonala metszi ki a kontúrhiperbolából (hiperbola és egyenes metszése szerkeszthető, de nem tanuljuk). Ezt a metszéspontot csak grafikusan tudjuk kijelölni az elég pontosan megrajzolt második kontúrból.



97.ábra

Hiperbolikus paraboloid vagy nyeregfelület

Az egyik leggyakrabban alkalmazott másodrendű felület a nyeregfelület, vagy hiperbolikus paraboloid. Ezen a felületen is *két alkotósereg* található, az azonos sereghez tartozók kitérőek, a különböző seregbeliek metszik egymást. A nyeregfelület azonos seregbeli alkotói ugyanazzal a síkkal, az iránysíkkal párhuzamosak. A hiperbolikus paraboloidnak tehát két *iránysík*ja van. Szokás a felületetet két alkotópárjára eső, úgynevezett torznégyszögével megadni. A szemköztes alkotók meghatározzák az iránysíkok állását. Ha a felületet az iránysíkok metszésvonalának irányából nézzük, a torznégyszög képe aralelogramma. Ezért a hiperbolikus paraboloid mindig ábrázolható úgy, [illegible] egyik vetülete paralelogramma legyen. A felület *tengelye párhuzamos az iránysíkok metszésvonalával.* A felület hiperbolikus, minden felületi ponton két alkotó megy át, s ezek alkotják a pontbeli felületi érintősíkot (98. ábra, P pont).



98.ábra

A felületen további alkotókat úgy nyerünk, hogy AB és CD alkotókat a másik alkotósereg által meghatározott iránysíkkal elmetsszük és a metszéspontokat összekötjük. Ha egy kiválasztott alkotón vizsgáljuk az érintősíkokat, azt tapasztaljuk, hogy az egymást követő pontokban más-más az érintősík – előző helyzetéhez képest elfordul. Az ilyen tulajdonságú felületeket torzfelületeknek hívjuk. (Az egyköpenyű hiperboloid érintősíkjai is ilyenek, ez is torzfelület.)

Pont illesztése a nyeregfelületre

A ponton átmenő alkotó legyen az a segédegyenes, melynek második képére illeszkedik a pont második képe (98. ábra, Q pont).

Hiperbolikus paraboloid síkmetszése.

A felületnek az érintősíktól különböző síkmetszetei kétfélék: *a tengellyel párhuzamos metszetek parabolák*, az összes többi metszete hiperbola.

A metszésgörbe pontjait úgy kaphatjuk meg, hogy megszerkesztjük a felületi alkotók döféspontjait a síkkal. Vetítősík esetén a metszéspontok közvetlenül leolvashatók, ezért célszerű a metsző síkot vetítősíkká transzformálni. Bár a görbe geometriai meghatározásához öt pont elegendő, a metszet szép megrajzolásához ennél jóval több pont szerkesztése szükséges.

A hiperbolikus paraboloid tengelye és főmetszetei

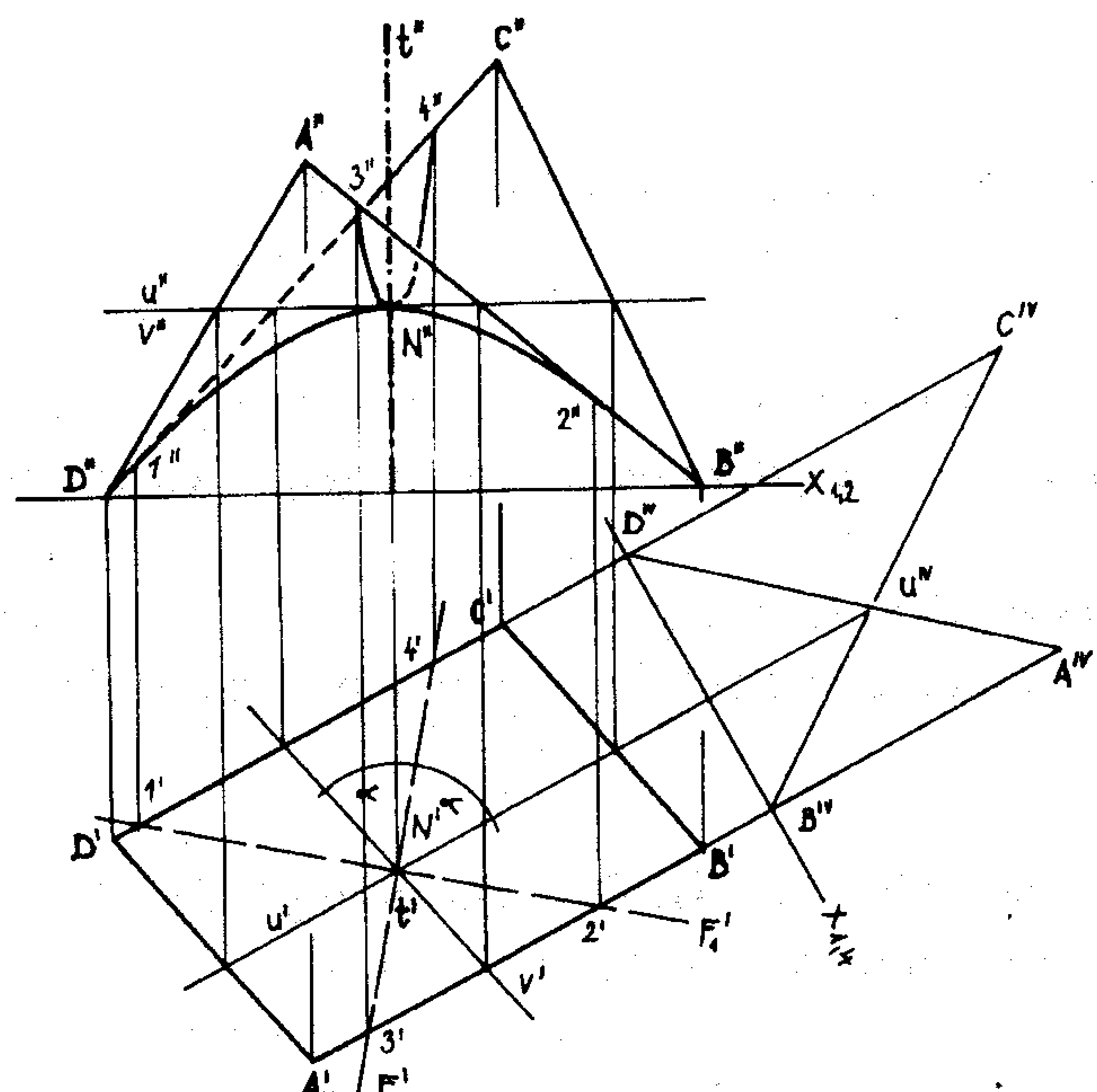
A hiperbolikus paraboloidot bármelyik elemi torznégyszöge egyértelműen jellemzi, azaz mindegyikük ugyanazokat az iránysíkokat és tengelyt jelöli ki.

A felület *tengelypontjában* (nyeregpont) *az érintősík az iránysíkok állására merőleges*. A függőleges tengelyű hiperbolikus paraboloid első képe paralelogramma.

Válasszuk ki a paraboloid egy ABCD torznégyszögét és szerkesszük meg a felület tengelyét, valamint a kontúrjait (99. ábra)!

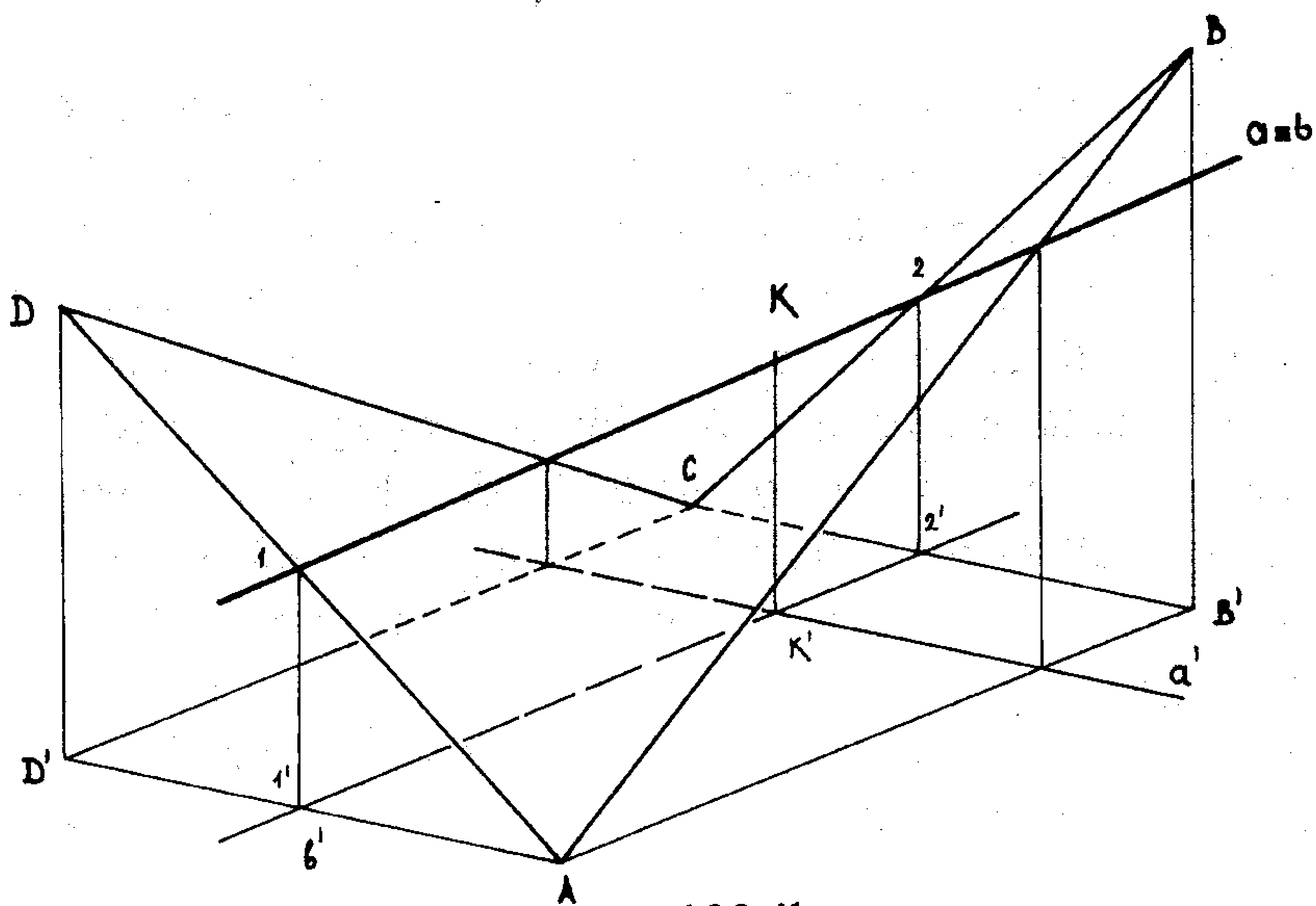
> A tengelypontban az érintősík vízszintes, ezért mindkét alkotóseregben meg kell keresnünk a vízszintes alkotókat, s ezek metszéspontja határozza meg a tengely helyét. Az egyik alkotó az AD és BC

egyenesek vízszintes irányú transzverzálisaként szerkeszthető (az irány második képe vízszintes, első képe párhuzamos A'B'-vel).
Az irányra merőleges negyedik képen az **u** transzverzális pontnak látszik, innen első és második képe szerkeszthető. A vízszintes érintősík egyúttal második vetítősík is, így a másik, keresett **v** alkotónak is ez a második képe. A **v** alkotó az AB és CD egyenesek vízszintes transzverzálisa, első képe illeszkedik az alkotók képére. A vízszintes alkotók szögfelező síkjai *a felület szimmetriasíkjai.* E síkok a felületet úgynevezett *főmetszet parabolákban metszik.* A két főmetszet tengelye megegyezik a felület tengelyével, közös pontjuk az N nyeregpont. A parabolák nyílása ellentétes: a *nyeregpont* kettős szélsőérték hely, az egyik parabolának a legmagasabb, másiknak a legmélyebb pontja. További parabolapontokat a főmetszetsíkok és felületi alkotók metszéspontjaiként kaphatunk.



99.ábra

A felület kontúrgörbéjét az alkotók kontúrpontjainak segítségével kaphatjuk meg. Kontúrpontban az érintősík vetítő helyzetű. A hiperbolikus paraboloid érintősíkját a kontúrponton átmenő két alkotó feszíti ki, ezért egy alkotón az érintési pontot a vele fedésben lévő másik seregbeli alkotó metszi ki. A 100. ábrán a nyeregfelület **a** alkotójának axonometrikus kontúrpontját szerkesztettük. Az **a** alkotóra eső kontúrpontot a vele axonometrikus fedésben lévő **b** alkotó metszi ki. A **b** egyenes az AD alkotót az 1-es, BC-t a 2-es pontjában metszi. Az egyenesek metszéspontja az első képről leolvasható.



100.ábra

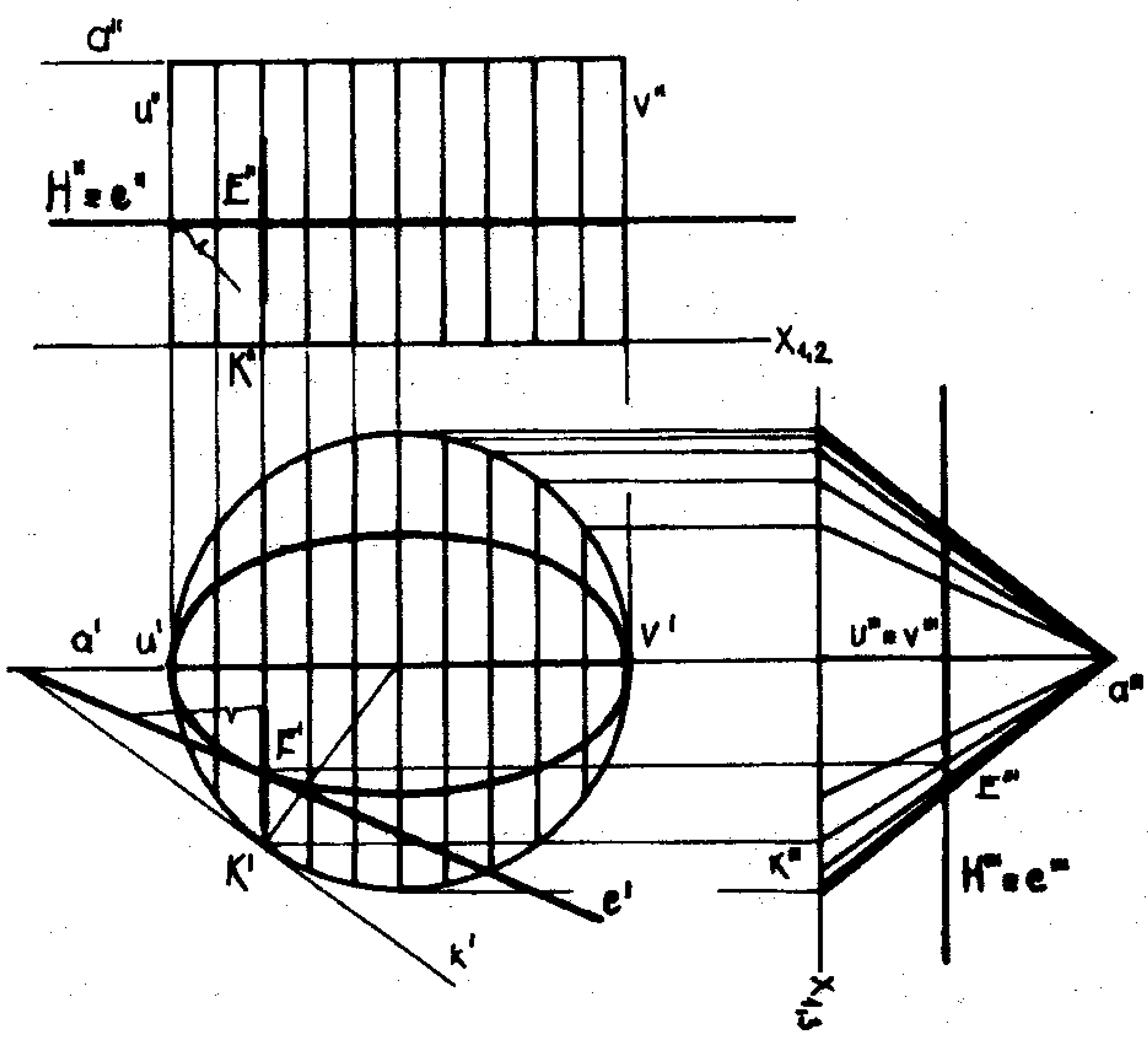
Bebizonyítható, hogy a kontúr síkja párhuzamos a felület tengelyével. Mivel a nyeregfelület tengellyel párhuzamos metszetei parabolák, ezért *a függőleges tengelyű felület kontúrgörbéje mindig parabola.*

NEM MÁSODRENDŰ FELÜLETEK

Konoid felületek

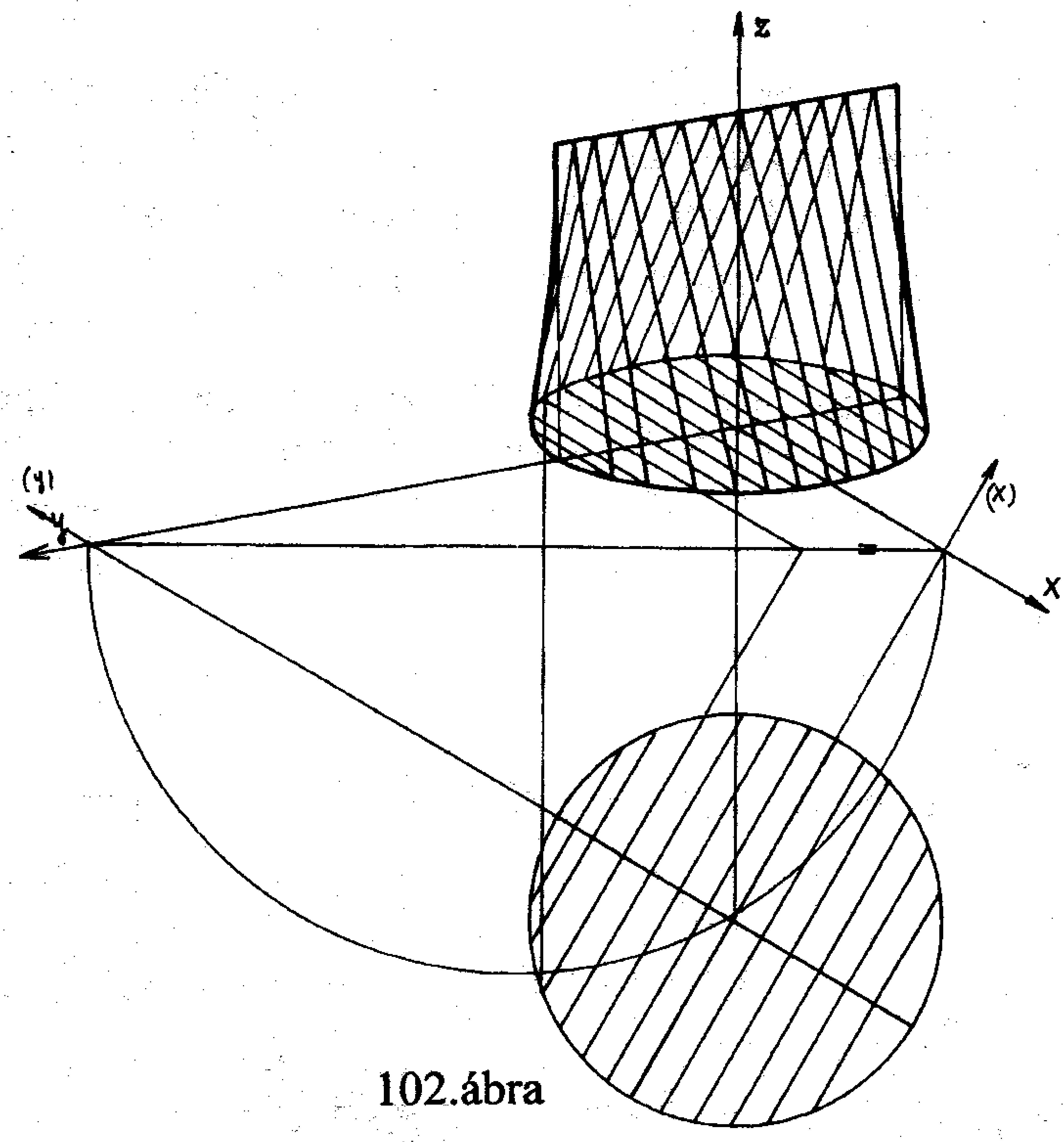
Az egyenes alkotókkal rendelkező felületek jelentősége az iparosított építéssel és előregyártással megnőtt. Az egyenes vonalú másodrendű felületeket már ismertettük. A további, magasabb rendű felületek egyik csoportjába tartoznak a *konoidok*. Ezek a felületek *megadhatók két vezérgörbével, - közülük az* *egyik egyenes - valamint iránysíkjukkal.* A felület alkotói az egyenes és vezérgörbe pontjait kötik össze az adott síkkal párhuzamosan. Az *egyenes konoid* iránysíkja és vezéregyenese merőlegesek egymásra. A konoidokat a másik vezérgörbéjükről szokás elnevezni (körkonoid, parabolakonoid) A hiperbolikus paraboloid és a későbbiekben ismertetett lapos menetű torz-csavarfelület is tekinthető konoidnak.

Az 101. ábrán *egyenes körkonoidot* ábrázoltunk, melynek vezéregyenese párhuzamos a kör síkjával (vízszintes). A rá merőleges iránysíkok körből kimetszett pontjait összekötjük az egyenesre eső megfelelő metszéspontokkal, így a felület alkotóit nyerjük. Ezt a konoidot az alapkörrel párhuzamos sík ellipszisben metszi. Bebizonyítható, hogy a metszetellipszis vetülete és az alapkör merőleges affinitásban vannak. Az affinitás tengelye a vezéregyenes vetülete. Ennek ismeretében a metszetellipszis bármely pontjában megszerkeszthetjük a felület érintősíkját. Tudjuk, hogy az érintősíkot kifeszíti a ponton átmenő bármely két síkmetszet érintője. Eszerint a pontra illeszkedő alkotó és az ugyanitt szerkeszthető ellipszisérintő meghatározza az érintősíkot. Az alkotó mentén haladva az érintősíkok pontról pontra változnak (elfordulnak), ezért ez is torzfelület.



101.ábra

A konoidok többségénél nem tudunk egy felületi ponton át könnyen rajzolható felületi görbét mutatni az alkotón kívül, ezért az érintősík általában nem szerkeszthető. A felület kontúrját az elég sűrűn rajzolt felületi alkotók burkoló görbéje határozza meg. Az 102. ábrán merőleges axonometriában ábrázoltuk egy egyenes körkonoid alkotóit és kontúrgörbéjét.



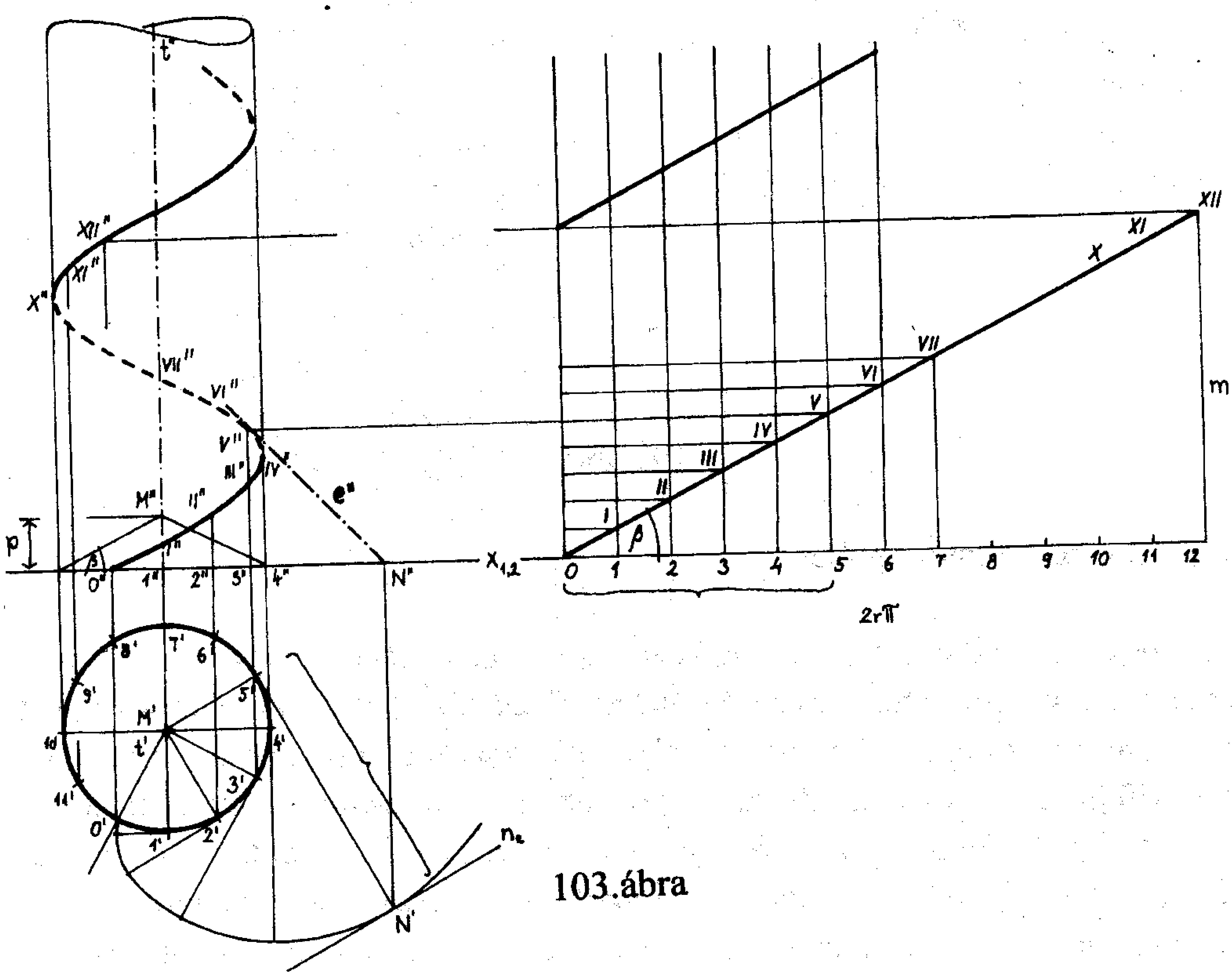
102.ábra

Csavarvonal, csavarfelület

Az egyenes alkotókkal rendelkező felületek másik nagy családja a csavarvonalra illeszthető csavarfelületek. Ezek közül mi csak a csavarvonal tengelyére merőleges alkotójú (csigalépcső) valamint a csavarvonal érintőiből álló kifejthető csavarfelülettel foglalkozunk. *A csavarvonal* szemléletesen *egy tengely körül mozgó pont pályagörbéje, ha a pont egyenletes sebességgel forog a tengely körül, s közben a tengely irányában is egyenletesen halad* (hasonlóan, mint a futónövények a karón). Eszerint a csavarvonal egyenes körhenger felületén helyezkedik el. Ha a hengerpalástot kiterítjük, *ezen a csavarvonal kiterítése egyenes*. Az egyenesnek az alapkör kiterítésével bezárt szöge *a csavarvonal emelkedési szöge*. Az egy körülforduláshoz tartozó tengelyirányú elmozdulás mértéke a csavarvonal *menetmagassága*. A következő menetek létrehozhatók ennek az egy menetnek az eltolásával is, ezért a csavarvonal önmagában elcsavarható görbe (pl. spirálrugó).

A csavarvonalat *meghatározza* a csavarhengerének *alapköre* és *menetmagassága* vagy az *emelkedési szöge*. (Bármelyik kettőből a harmadik szerkeszthető.) Az elfordulás iránya szerint a csavarvonal lehet jobbra csavarodó, vagyis jobbmenetű, illetve balmenetű.

Az 103. ábrán egy csavarvonalat ábrázoltunk, egy darabjának kifejtésével együtt.



103.ábra

Mivel a csavarvonal kifejtése egyenes, a görbe bármelyik érintője azonos szöget zár be a csavarhenger alkotóival (tengelyével). E szög pótszögét zárják be a csavarvonal érintői az alapkör síkjával. Ennek segítségével is megszerkeszthető a csavarvonal 5-es pontjában az érintő. Az érintő első képe az 5' pontban érinti a csavarhenger első képét. Az érintő első nyompontját a kiterítésről leolvasható lefejtett körív fölmérésével kaphatjuk meg. A nyompont $x_{1,2}$ tengelyre eső második képén halad át az érintő második képe. Az érintő tengellyel bezárt szöge a csavarvonal összes pontjában azonos (az emelkedési szög pótszöge), ezért minden csavarvonalhoz hozzárendelhető egy iránykúp. A kúp alapköre megegyezik a csavarhenger alapkörével, alkotói pedig párhuzamosak a csavarvonal érintőivel.

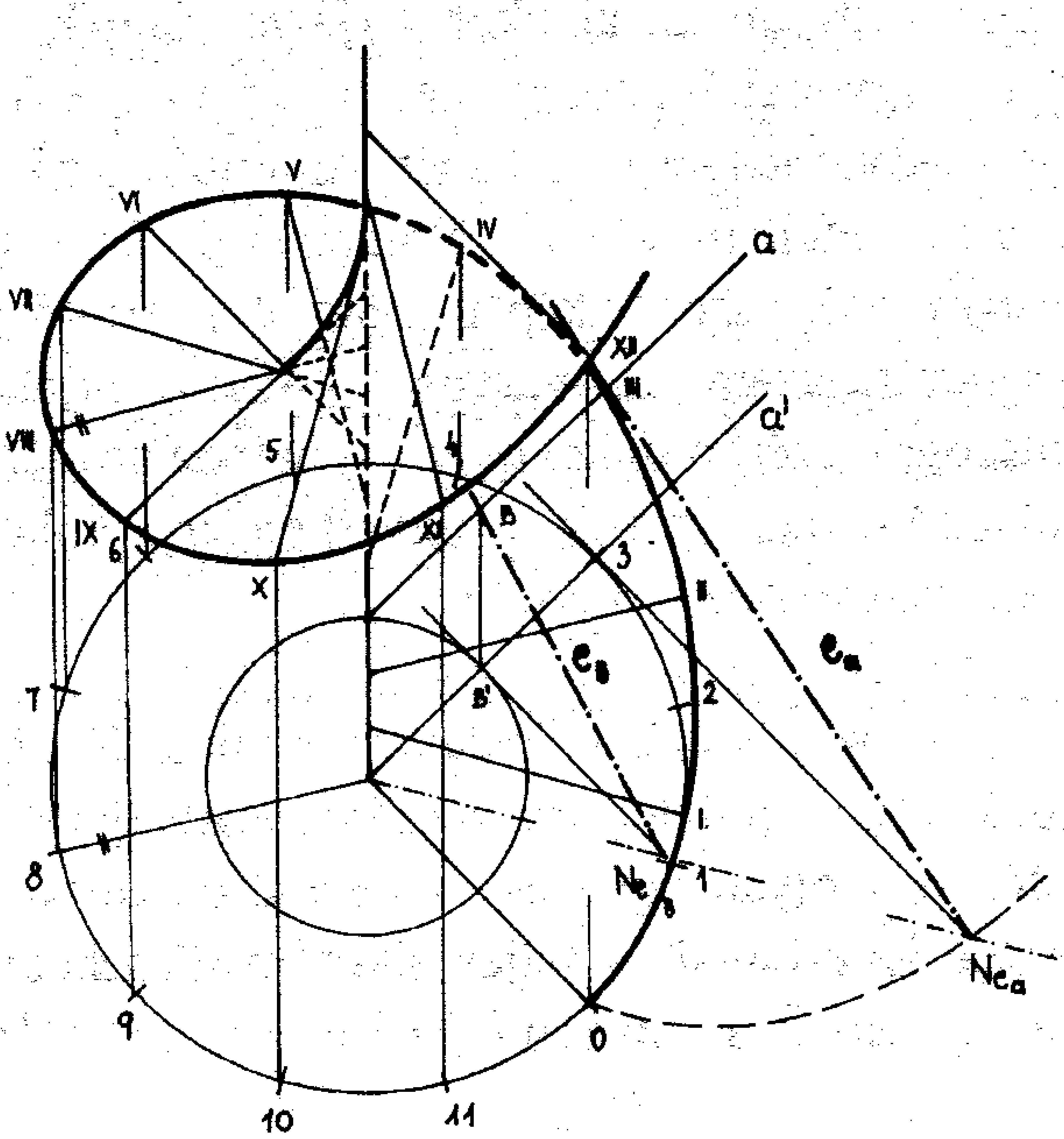
Ha a csavarvonal minden pontjában megszerkesztjük a görbe érintőjét, vonalfelülethez jutunk. Ezt a felületet úgy is származtathatjuk, hogy eltolunk a csavarvonal mentén egy olyan egyenest, amely a csavarvonalat érinti. A felület alkotója mentén az érintősík a teljes alkotóra illeszkedik (akárcsak a kúpnál és a hengernél), ezért ez a felület a *kifejthető csavarfelület.*

Azokat a csavarfelületeket, amelyek egy, a csavarvonal tengelyére nem merőleges egyenes csavarvonal menti mozgatásával jönnek létre, *élesmenetű csavarfelületeknek* nevezzük. Ha a csavarvonalon tengelyére merőleges egyenest mozgatunk *laposmenetű* csavarfelület jön létre.

A felületből a csavarvonal tengelyével megegyező tengelyű, bármilyen sugarú henger a felületből csavarvonalat metsz ki. Minden kimetszett csavarvonal menetmagassága megegyező, de emelkedési szöge annál nagyobb, minél kisebb a henger sugara.

A csavarfelület *zárt,* ha alkotói metszik a tengelyét. A *nyitott* csavarfelület alkotói és tengelye kitérő helyzetűek.

A 104. ábrán a zárt, lapos menetű csavarfelületet szemléltettük, melynek gyakorlatban előforduló alkalmazása a csigalépcső. A felület tetszőleges pontjában az érintősíkot a ponton átmenő alkotó és a csavarvonal pontbeli érintője határozza meg. Az **a** alkotó egy másik (belső) B pontjában is megrajzoltuk az érintősíkot.



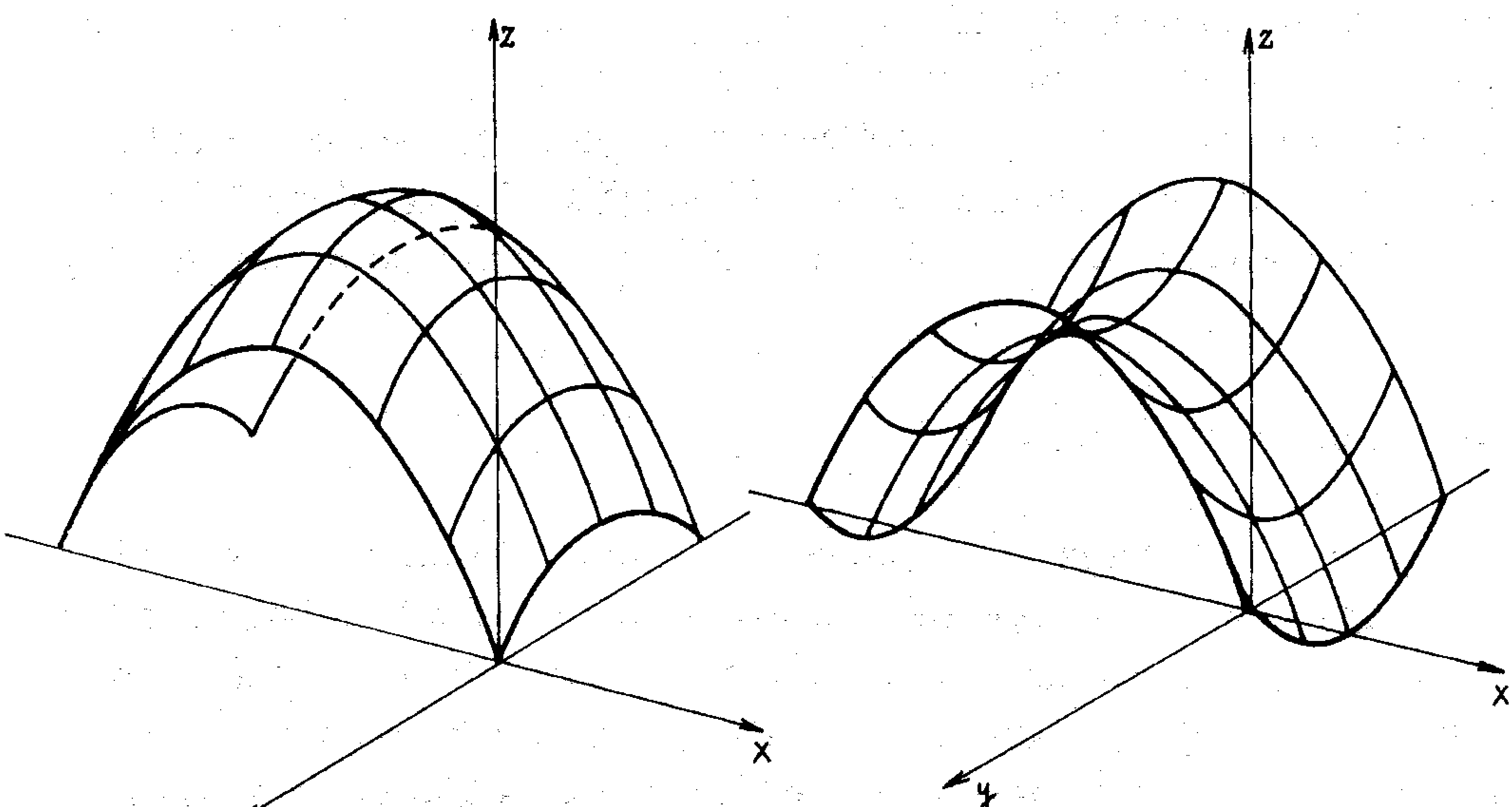
104.ábra

Az **a** alkotó mentén a tengely felé haladva az érintősíkok tengellyel bezárt szöge egyenletesen változik (minden pontban más-más az érintősík) – ez a felület *torzfelület.* A csavarfelületek kontúrját az igen sűrűn megrajzolt alkotóseregre, mint kontúrpontbeli érintőkre illesztett görbe szolgáltatja.

Felületek származtatása

Eddigi tanulmányaink során láthattuk, hogy igen sok felület származtatható *tengely körüli forgatással.* Egy egyenes körül forgatott másik görbe (egyenes, kör, ellipszis, stb.) *forgásfelületet* határoz meg. A felület minden tengelyre merőleges metszete kör és minden forgástengelyt tartalmazó síkmetszete egybevágó (meridiángörbe).

A másodrendű felületek -a hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület) kivételével - valamannyien *forgásfelületek* (vagy affin megfelelőik). A felületek másik nagy csoportja *párhuzamos eltolással* (transzlációval) állítható elő. Ezeket *transzlációs felületek*nek szokás nevezni. A henger például mindkét csoportnak tagja, mert származtatható egy tengellyel párhuzamos egyenes forgatásával, de egy körnek síkjára merőleges irányú eltolásával is. A transzlációt két görbe, a pályagörbe és az ezt metsző leíró görbe határozza meg. A leíró görbe a pályagörbén úgy mozog, hogy mindig párhuzamos marad kiindulási helyzetével. A pályagörbe és leíró görbe szerepe felcserélhető. A transzlációs felületnek vannak egymással párhuzamos egybevágó síkmetszetei. Mind a két paraboloid felfogható transzlációs felületként is (105. ábra).



105. ábra

A felületek további származtatási lehetőségeivel valamint osztályozásával nem foglalkozunk.

Körgyűrűfelület vagy tórusz

Az egyik legkönnyebben definiálható nem másodrendű forgásfelület a tórusz. A felület úgy jön létre, hogy egy kört forgatunk, a kör síkjára illeszkedő tengely körül. Ha a körnek és a forgástengelynek nincs közös pontja, *nyitott a tórusz.* A *zárt tóruszt* akkor kaphatjuk meg, ha a kör érinti a forgástengelyt. Ha a tengely belemetsz a körbe, a forgatáskor *csonka tórusz* jön létre. Ha a tengely illeszkedik a kör középpontjára, a forgástest gömb. *A tórusz negyedrendű felület*, mert egy általános helyzetű egyenes legfeljebb négy pontban metszi.

Pont illesztése tóruszra

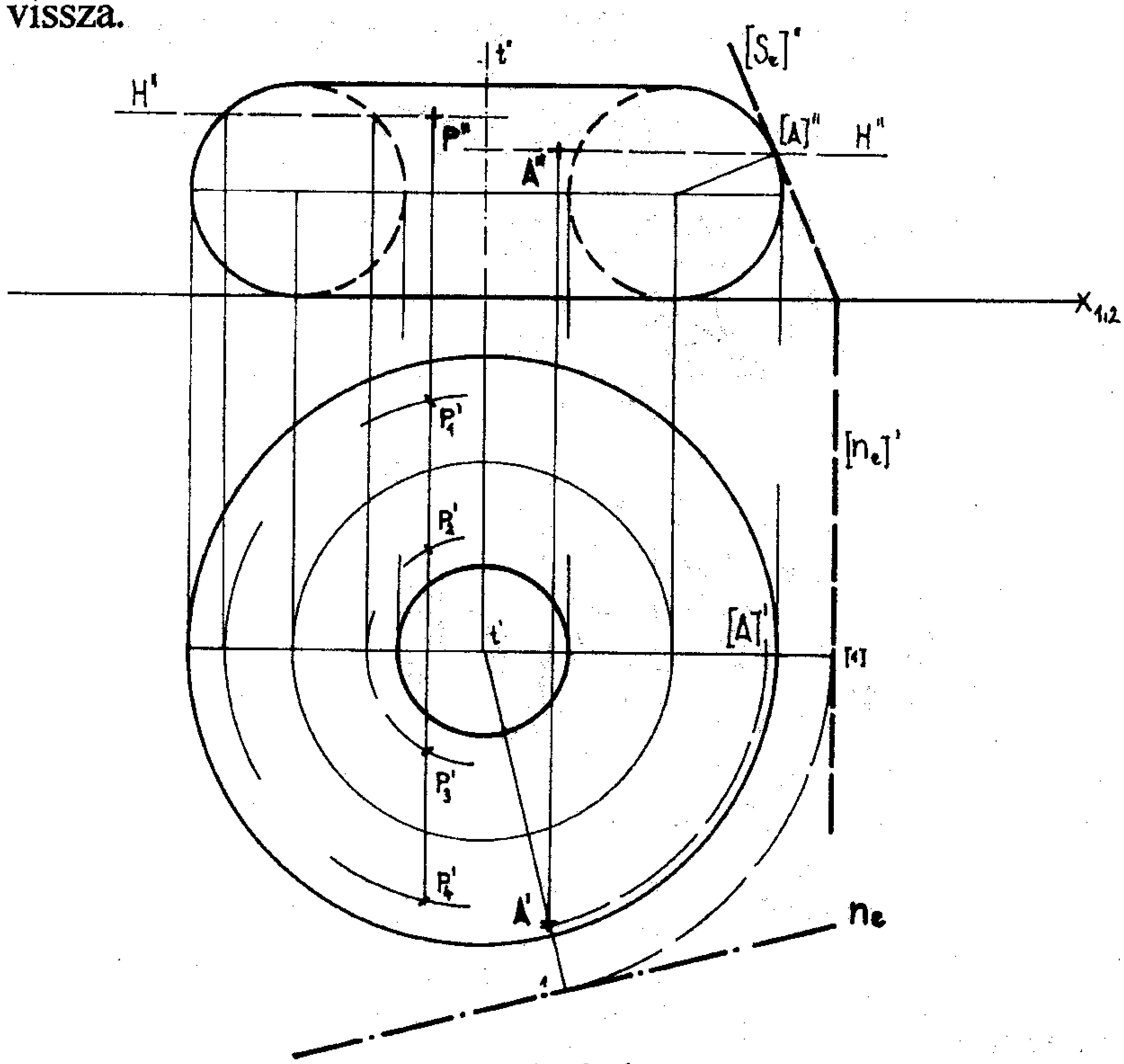
A pontra jól szerkeszthető felületi görbét illesztünk, pl. a második képen. A görbe első képén kapjuk rendezővel a pont első képeit. A tóruszon két jól rajzolható görbesereg van: a meridiánkörök, de ezek nagy részének másik képe ellipszis, és a tengelyre merőleges síkú körök (ezekkel dolgozunk). A 106. ábrán a P pont második képére vízszintes segédsíkot illesztünk. Ez a tóruszt két körben metszi, a P pont rendezőjének a körökkel maximum négy közös pontja lehet.

A tórusz nevezetes körei

A tengely körül forgatott, felületet leíró kört *meridiánkör*nek hívjuk. Függőleges tengelyű tórusz esetén a második kontúrsíkba eső köröket szokás *második főmeridián*nak nevezni. A felületnek a tengelyre illeszkedő síkokon kívül van még egy, *a tengelyére merőleges szimmetriasíkja* is. Ez a sík átmegy a tórusz (és a meridiánkörök) középpontján és kimetszi a felületből a legkisebb sugarú *torokkört*, valamint a legnagyobb sugarú *ekvátorkört*. Ezek egyúttal a felület első kontúrkörei. Szokás még ábrázolni a meridiánkörök középpontjaival első fedésben lévő legalsó és legfelső körét, amelyek képei a főmeridiánkörökkel együtt a második kontúrt is szolgáltatják.

A felület tetszőleges pontjában az *érintősíkot* a ponton átmenő főkör és a meridiánkör érintői határozzák meg.

Az 106. ábrán a felület A pontjában megrajzoltuk az érintősík első nyomvonalát is. Ha az A pontot a tengely körül a második főmeridiánra forgatjuk, itt megszerkeszthető a vetítő helyzetű érintősík első nyomvonala. Az A pontra illeszkedő vízszintes kör minden pontjában az érintősík ugyanakkora szöget zár be a felület tengelyével (az első képsíkkal bezárt szögek is egyenlők), ezért a sík nyomvonalának távolsága a forgástengelytől az A pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora – a nyomvonalat és az A pontot azonos szöggel forgatjuk vissza.

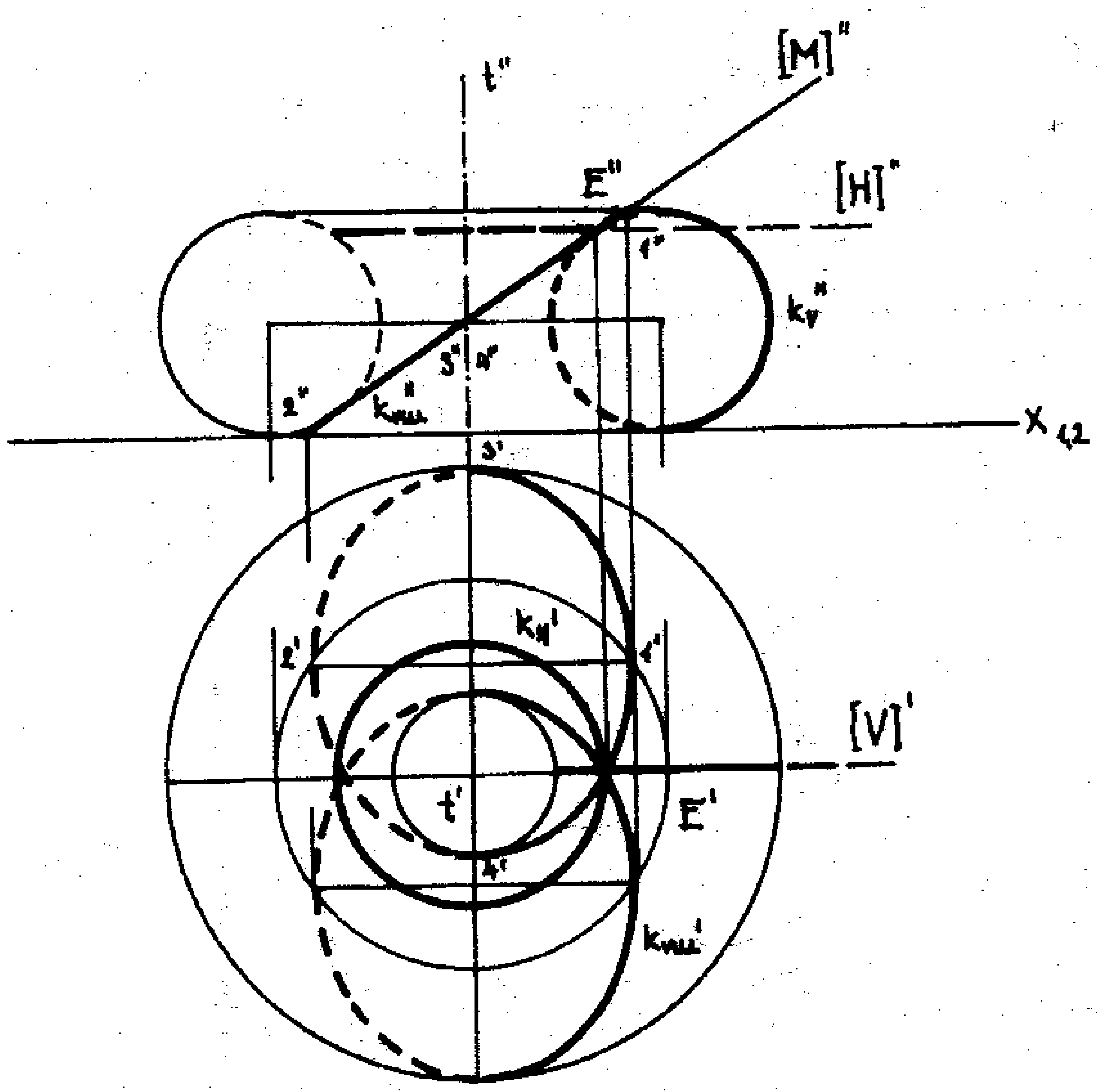


106.ábra

Ha az A pont a legalsó és legfelső köröknél nagyobb sugarú (külső) felületi körön van, az érintősíknak az A ponton kívül nincs a felülettel több közös pontja. Az ilyen pontok a felület elliptikus pontjai. A legalsó és legfelső kör síkja egyúttal érintősíkja is a felületnek – ezek a pontok parabolikusak.

A felület többi (a meridiánkör tengelyhez közelebbi félköre által leírt) pontjai hiperbolikusak, itt az érintősík az érintési pont környezetében belemetsz a felületbe.

Azok a különleges helyzetű érintősíkok, amelyek a felületet egyszerre két hiperbolikus pontjában érintik, a tóruszból az érintési pontokban metsződő két kört tartalmaznak (a bizonyítást mellőzzük).Ezeket Villarceau-féle köröknek nevezik. *A felület minden pontján négy körmetszet halad át*: egy vízszintes kör, a meridiánkör és a két Villarceau-féle kör (107. ábra).

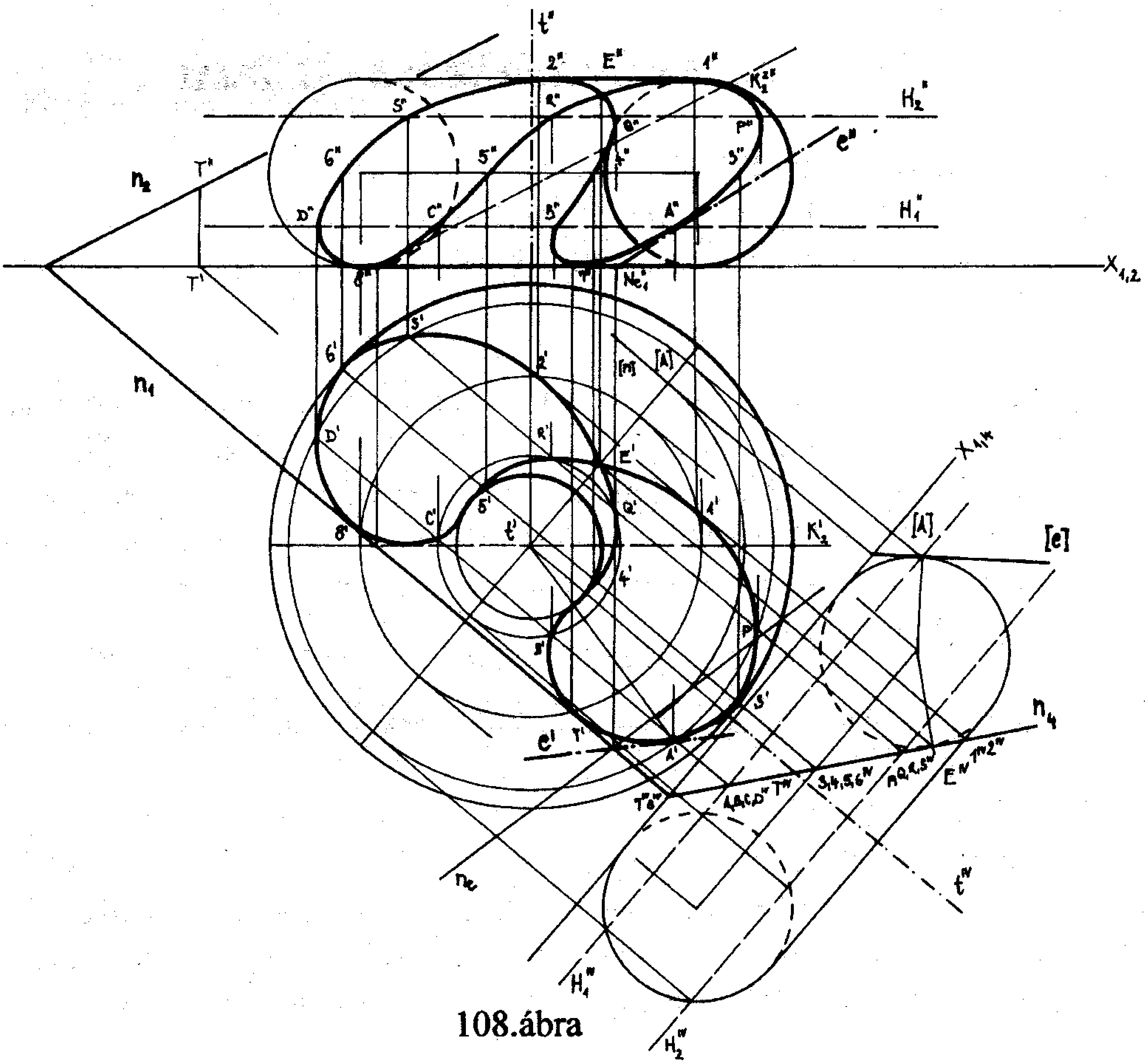


107.ábra

Tórusz síkmetszése

A tórusz negyedrendű felület, így síkmetszetei is általában negyedrendű görbék. Általános helyzetű síkkal való metszését pontonként szerkesztjük, tengelyére merőleges szeletelő síkok segítségével (108.ábra).

Célszerű a metsző síkot vetítősíkká transzformálni. Ezzel az új képsíkkal párhuzamos, tórusz tengelyére illeszkedő sík a rendszernek (így a metszetnek is) szimmetriasíkja. Az itt elhelyezkedő pontok szélsőértékhelyek, az érintő iránya merőleges a szimmetriasíkra.Ha van a metszetnek duplapontja, azt is meg kell keresni. További nevezetes pontok a kontúrpontok. Az első kontúrpontokat a tórusz vízszintes szimmetriasíkjával való metszésvonal jelöli ki a torokkörből és az ekvátorkörből. A második képkontúrra eső pontokat három síkon kell keresnünk. Először célszerű a legalsó és legfelső körökre eső metszéspontokat megkeresni. Az érintők itt is első fővonalak. A tórusz tengelyére illeszkedő második képsíkkal párhuzamos kontúrsík a metsző síkot egy második fővonalban metszi, amely kijelöli a főmeridiánkörökre eső kontúrpontokat. A metszésgörbe további pontjai vízszintes szeletelősíkok segítségével kaphatók.



108.ábra

A síkmetszet érintői jól tájékoztatnak a görbe menetéről. Ezért célszerű érintőt is szerkeszteni. Az A pontbeli érintő a metsző sík és az A pontra illeszkedő felületi érintősík metszésvonala. A metszésvonal illeszkedik az A pontra, valamint a két sík első nyomvonalának közös pontjára. (Ez az érintő első nyompontja.) A metszésgörbe láthatósága többféle lehet attól függően, hogy a sík által lemetszett részt eltávolítjuk-e, illetve héjról vagy tömör testről beszélünk.

Tórusz és más felületek áthatásának szerkesztési módszerei hasonlóak, mint amit a másodrendű felületek áthatásánál tanultunk. Mivel a tórusz negyedrendű, másodrendű felületekkel való áthatása nyolcadrendű térgörbe. az áthatási görbe csak pontonként szerkeszthető.

A PERSPEKTÍV ÁBRÁZOLÁS ALAPJAI

A bennünket körülvevő tárgyak, geometriai formák ábrázolását leggyakrabban párhuzamos vetítés segítségével jelenítjük meg. Az így nyert képekről közvetlenül leolvashatók a kívánt méretek, vagy szerkeszthetők a felületen görbék.

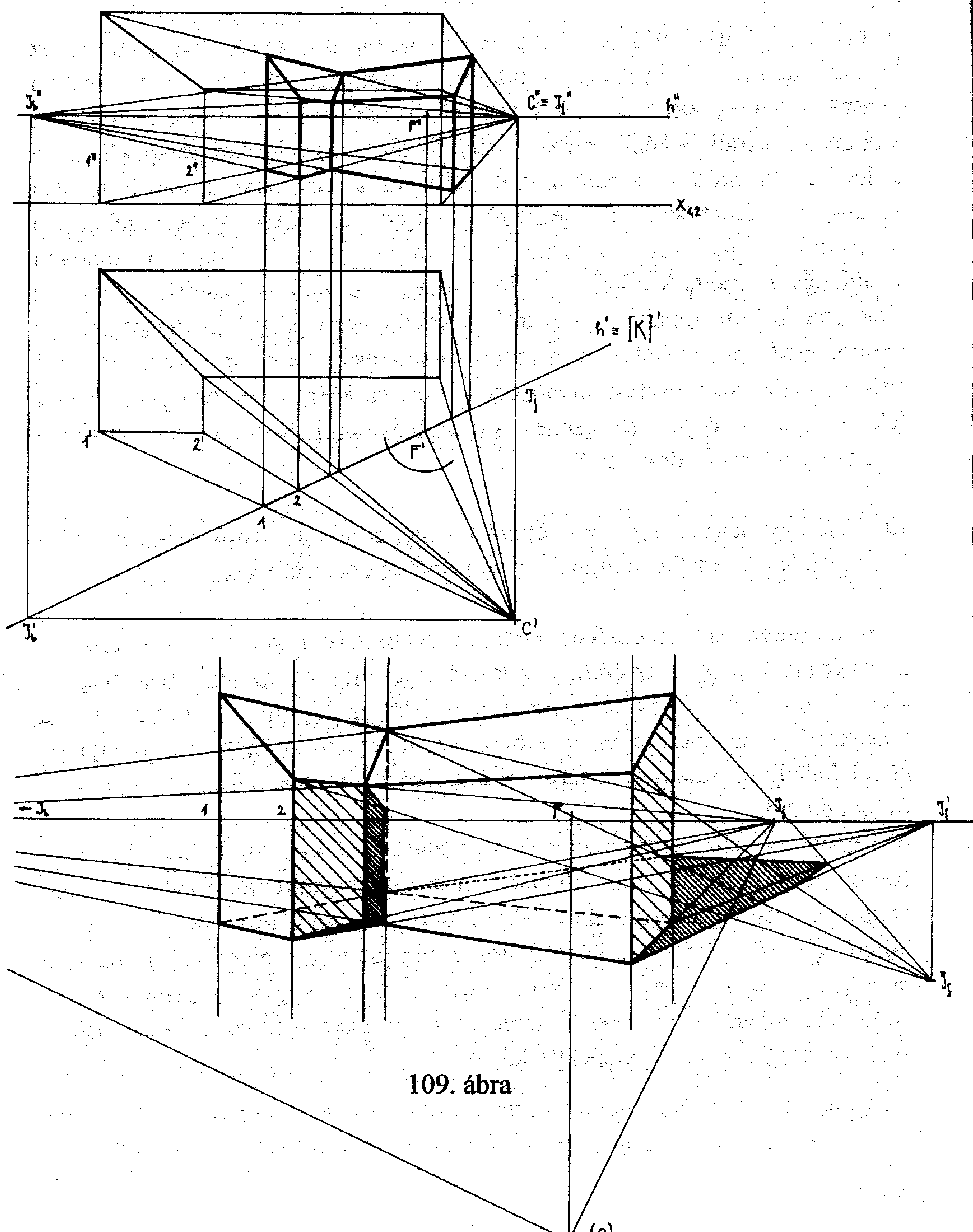
Az emberi szem centrálisan képezi le a világot, a tárgyakat másképp látjuk, mint azt az eddigi párhuzamos vetítések során szerkesztettük. Ha a tárgy alakját, formáját kívánjuk megmutatni, s kevésbé fontosak a méretei, centrális vetítést alkalmazunk.Ez az ábrázolási mód évszázadokkal korábbi, mint az eddig ismertetettek, de elméleti alapjai, valamint szerkesztési technikája lényegesen bonyolultabb.

Az ábrázolás geometriai alapjait „Az euklideszi tér kibővítése" c. fejezetben ismertettük. Egyetlen síkon, a rajz síkján kívánjuk létrehozni a képet. Ha a tetszőlegesen kijelölt vetítési középpontot (a vetítés centrumát) összekötjük az ábrázolni kívánt tárgy jellemző pontjaival, az így kapott egyenesek (vetítősugarak) kijelölik a képsíkon a tárgy perspektív képét. Ahhoz,hogy a képből az eredeti alakzatot visszaállíthassuk, további - a tárgy centrumhoz és képsíkhoz viszonyított helyzetét jellemző - információkra van szükség.

A perspektív ábrázolás, a Monge-féle ábrázoláshoz és az axonometriához hasonlóan, önálló ábrázolási rendszer. A műszaki életben ennek csak a praktikus szerkesztések során jól alkalmazható változatait használják. Az általános centrális leképezés ezen speciális esete a gyakorlati perspektíva. Ez a leképezési mód egy centrumból vetíti rá a tárgyakat a képsíkra. (Ha szemléletes képet akarunk, célszerű a tárgyat a képsík egyik oldalán , a centrumot a másikon választani.) A tárgy jellemző pontjain áthaladó vetítősugarak metszik a képsíkot, létrehozva rajta a tárgy centrális képét. Az alakzattal együtt annak alaprajzáról is készül perspektív kép (hasonlóan az axonometriában tanultakhoz). A rekonstruálhatóságot a perspektív alaprajzból való kiemelés szerkesztési lehetősége biztosítja. Még ennek az egyszerűsített leképezésnek a törvényszerűségei és technikájának ismertetése is meghaladja az e tárgyra kimért időkeretet.

Itt csak egy nagyon egyszerű eljárást ismertetünk, melynek segítségével a Monge-féle kétképsíkos ábrából szerkeszthetünk centrális képet.

Első lépésként a kétképsíkos ábrához perspektív rendszert illesztünk. A perspektíva képsíkját az épülethez közel választjuk (hogy ne legyen nagyon kicsi a kép). A vetítési centrumot úgy jelöljük ki, hogy a centrumból a képsíkra állított merőleges lehetőleg az ábrázolandó tárgy súlypontjához közel haladjon, valamint a tárgy látókúpjának félnyílásszöge ne legyen 30 foknál nagyobb.
A képsík és centrum helyzetének változtatásával kiválaszthatjuk, hogy az épület (tárgy) melyik (két) oldalát szeretnénk megmutatni. Ezután minden pontot a vetítés centrumából leképezünk a függőleges síkra. Végül a függőleges síkon létrejövő képet külön ábrán (általában nagyítva) a rajzlapra rajzoljuk. Szokás az elkészült Monge-féle képekre (alaprajz és homlokzat/metszet) skiccpauszt helyezni, majd a centrális vetítés után erről a vázlatról megrajzolni a perspektív képet.



109. ábra

Az 109. ábrán kijelöltük a feltételeknek megfelelően a képsíkot és a centrumot. Minden pont perspektív képét egyenként megszerkeszthetjük az alábbiak szerint. Az 1 számú függőleges él perspektív képsíkra eső vetületét a Monge-féle rendszerben megkapjuk, ha az él alsó és felső pontját összekötjük a centrummal (első és második képen is). Az 1 él pontjain áthaladó centrális vetítősugarak metszik a képsíkot (K'-t) az 1 pontban. Az itt emelt függőleges egyenes második képén kijelölhetjük az él legalsó és legfelső (ha szükséges, bármely közbülső) pontjának képét. Ha ezt minden élre elvégezzük, második képen a házról egy perspektív képet kapunk. Ez a kép a K képsíkon létrejövő perspektív képnek csak vetülete (a K képsík nem párhuzamos a második képsíkkal.) Ahhoz, hogy a perspektíva képsíkján létrejövő képet ábrázolhassuk, célszerű még néhány, az ábrázolás törvényszerűségeit jól rögzítő, ellenőrzésre is használható pontot és vonalat megrajzolnunk.

Jelöljük a centrum merőleges vetületét a képsíkon F-fel(főpont). Húzzunk a centrumon át párhuzamost az alaprajz éleinek irányával. A jobboldali pontot jelöljük I_j-vel, a baloldali iránypontot I_b-vel. Ezek a horizontvonal pontjai. A függőleges képszakaszok viszonyításához szükséges a horizontvonal (a képsík és a centrumra illeszkedő, vízszintes horizontsík metszésvonala) második képének berajzolása. Ezek után hozzákezdhetünk a perspektív kép fölrajzolásához. Tulajdonképpen a függőleges K képsíkon létrejövő képet ábrázoljuk második képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatva (esetleg fölnagyítva), de egy külön ábrán. Először megrajzoljuk a vízszintes horizontvonal képét, majd kijelöljük rajta az F, I_j és I_b pontokat, valamint az összes (1, 2 ... stb.) függőleges él helyét. Célszerű az egyenkénti méregetés helyett K'-ra papírcsíkot ("suszterlépték"-et) illeszteni, bejelölni rajta az összes pontot, majd a perspektív kép horizontvonalára másolni. A függőleges éleken a végpontokat a második képről, a horizontvonaltól mért távolságuk segítségével vihetjük át. Ellenőrzés: a függőleges szakaszok végpontjait összekötő, valóságban vízszintes egyenesek a megfelelő iránypontban metszik egymást. A képsíkokhoz képest ferde (tető)élek végpontjait a rajtuk átmenő vetítősugarak segítségével szerkeszthetjük meg. Az ábra láthatósága szemléletből vagy az első kép segítségével is eldönthető.

Árnyékszerkesztés perspektívában

Az axonometriához hasonlóan itt is *a fénysugarat két képével, alaprajzával és perspektív képével* adjuk meg. A pontok árnyékát az alaprajzukra illesztett alaprajzi fénysugár és a perspektív képre illesztett perspektív fénysugár metsződése adja. A rávetett árnyék szerkesztése az árnyékszerkesztés általános elveit követi.

MÉRŐSZÁMOS ÁBRÁZOLÁS VAGY KÓTÁS PROJEKCIÓ

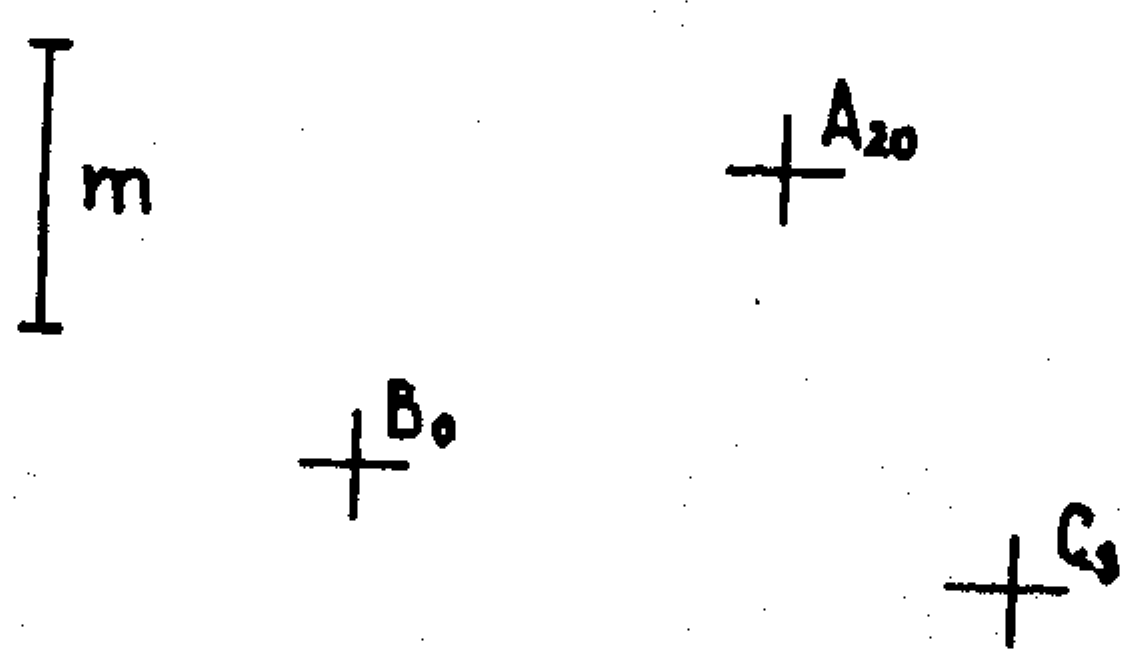
A műszaki gyakorlatban az épületek, kertek, utak, csatornák, egyéb földmunkák ábrázolásakor a terepről úgynevezett *helyszínrajz*ot készítenek. Ez rendszerint egy, vízszintes síkra merőlegesen vetített, *felülnézeti kép*. Ahhoz, hogy az ábráról a tárgyak térbeli helyzete is leolvasható legyen, ezt az egy képet ki kell egészíteni. Ha a magassági méreteket a vetületek mellé írjuk, már egy képből is tudunk következtetni a tárgyak valóságos elhelyezkedésére. *A mérőszámos vagy kótás ábrázolás során egyetlen (tetszőleges magasságban választott) vízszintes síkra vetítünk, merőlegesen. Minden pont vetülete mellé odaírjuk a képsíktól mért (előjeles) távolságát (kótáját).* A visszaállítás azonban csak akkor végezhető el egyértelműen, ha rögzítjük, hogy a pont képe mellé írt számok milyen (mérték)*egység*et jelölnek. A kóták métereket jelentenek, s az ábrákhoz tartozik egy méretarány, pl. M 1:100, M 1:500, ami megmutatja, hogy a rajzi méretek az eredetinek 100-ad, 500-ad része. A méretarány helyett szokás léptéket megadni, amely kifejezi, hogy a valóságban 1 méteres szakasz a rajzon mekkorának felel meg (Az előbbi méretarányoknak megfelelő lépték, ahol 1m=1000mm rajzi hossza 1000:100=10 mm, illetve 1000:500=2 mm.)

Ha nem valóságos tereptárgyakról vagy építendő objektumokról van szó, hanem csak térgeometriai elemekről, a lépték helyett megadott rajzi egység tetszőleges szakasz lehet.

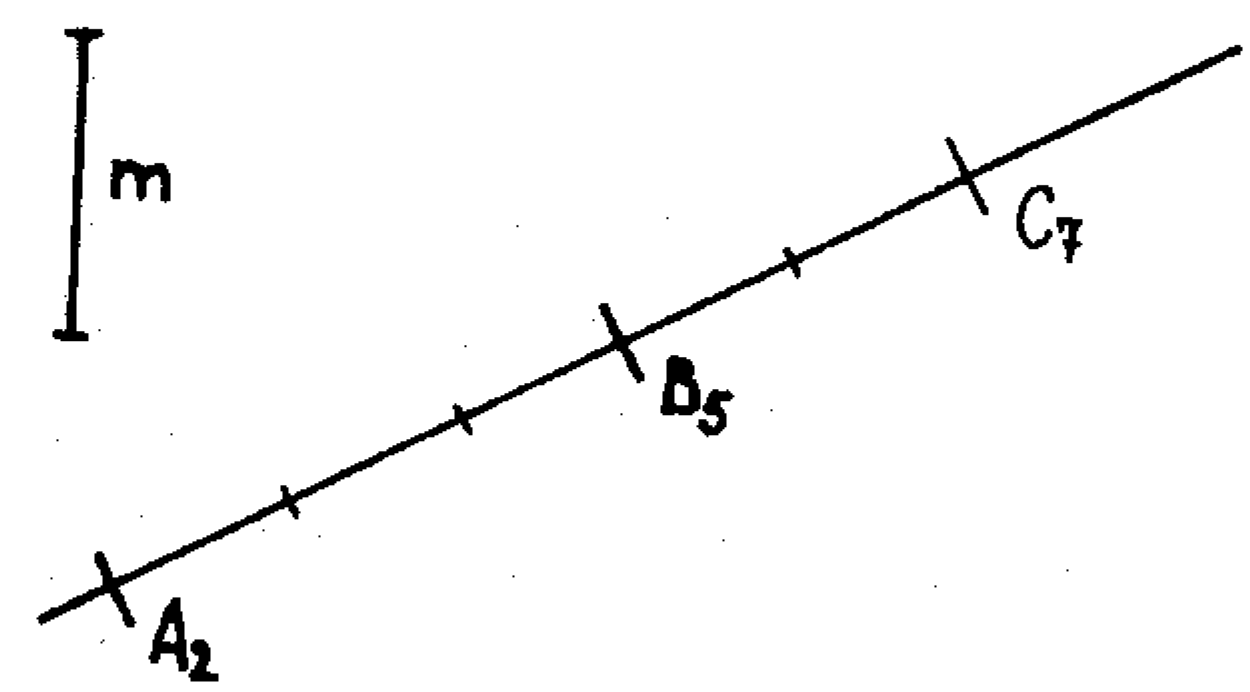
Térelemek ábrázolása

Pont ábrázolása

Az A pont képe mellé odaírjuk a választott vízszintes képsíktól való távolságát is. A rekonstruálhatósághoz meg kell adnunk a rajzi egységet is (pl. a méter rajzi hossza). Az A_{20} pont a vízszintes sík fölött 20 egységnyire, a B_0 a képsíkon, a C_{-3} a C-ben emelt merőlegesen, 3 egységgel a képsík alatt helyezkedik el (110. ábra).



110. ábra

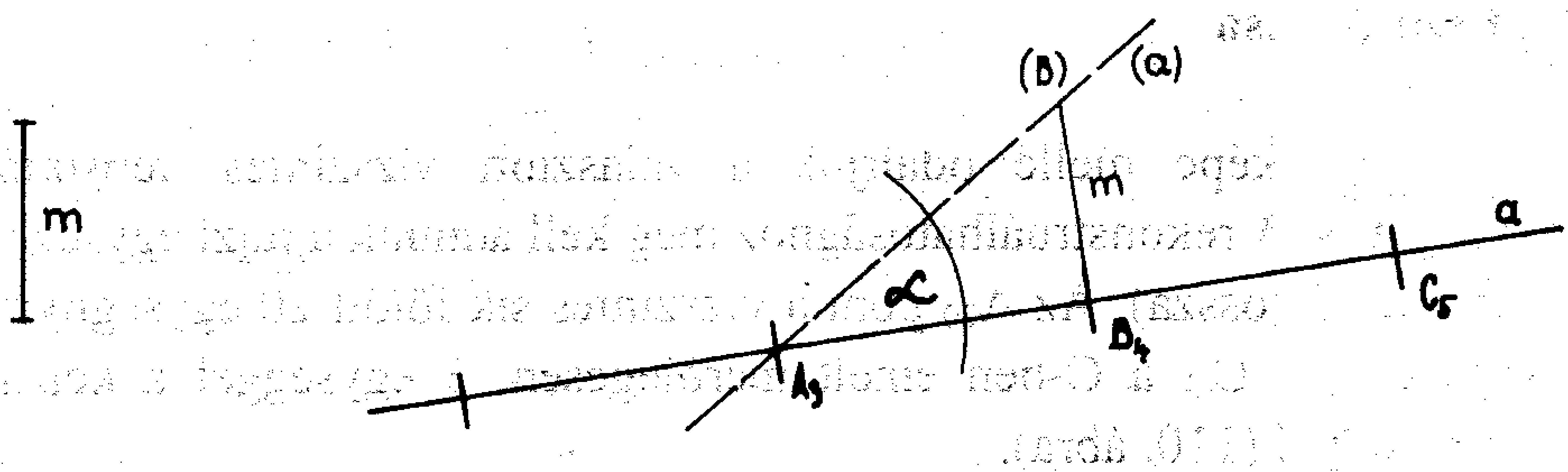


111. ábra

Egyenes ábrázolása

Az egyenest ráilleszthető két pontjával adhatjuk meg. Az egyenes vetületén megjelöljük a pontok képét és melléírjuk a magasságukat. A választott képsíkkal párhuzamos síkokat *szintsíkok*nak nevezzük. Ha a képsíktól egységnyi távolságonként szintsíkokat tekintünk, ezek kijelölik az egyenes egész kótájú pontjait. Az egyenes ábrázolásakor, ha a vetületén megjelöljük az egész kótájú pontok vetületeit, *az egyenest graduáljuk* (lépcsőzzük). Az egyenes graduált képén két szomszédos egész kótájú pont vetületének távolságát *osztóköz*nek nevezzük. Két pontjának ismeretében az egyenes képe graduálható. Az 111. ábrán az A_2 és B_5 pontok által meghatározott egyenesen az osztóköz az A_2B_5 szakasz harmada. Ezzel az osztóközzel graduálható az egyenes, így vehető föl a C_7 pontja is.

A rajzi egység ismeretében az egyenes rekonstruálható. Határozzuk meg az egyenes vízszintes síkkal bezárt szögét (112. ábra).



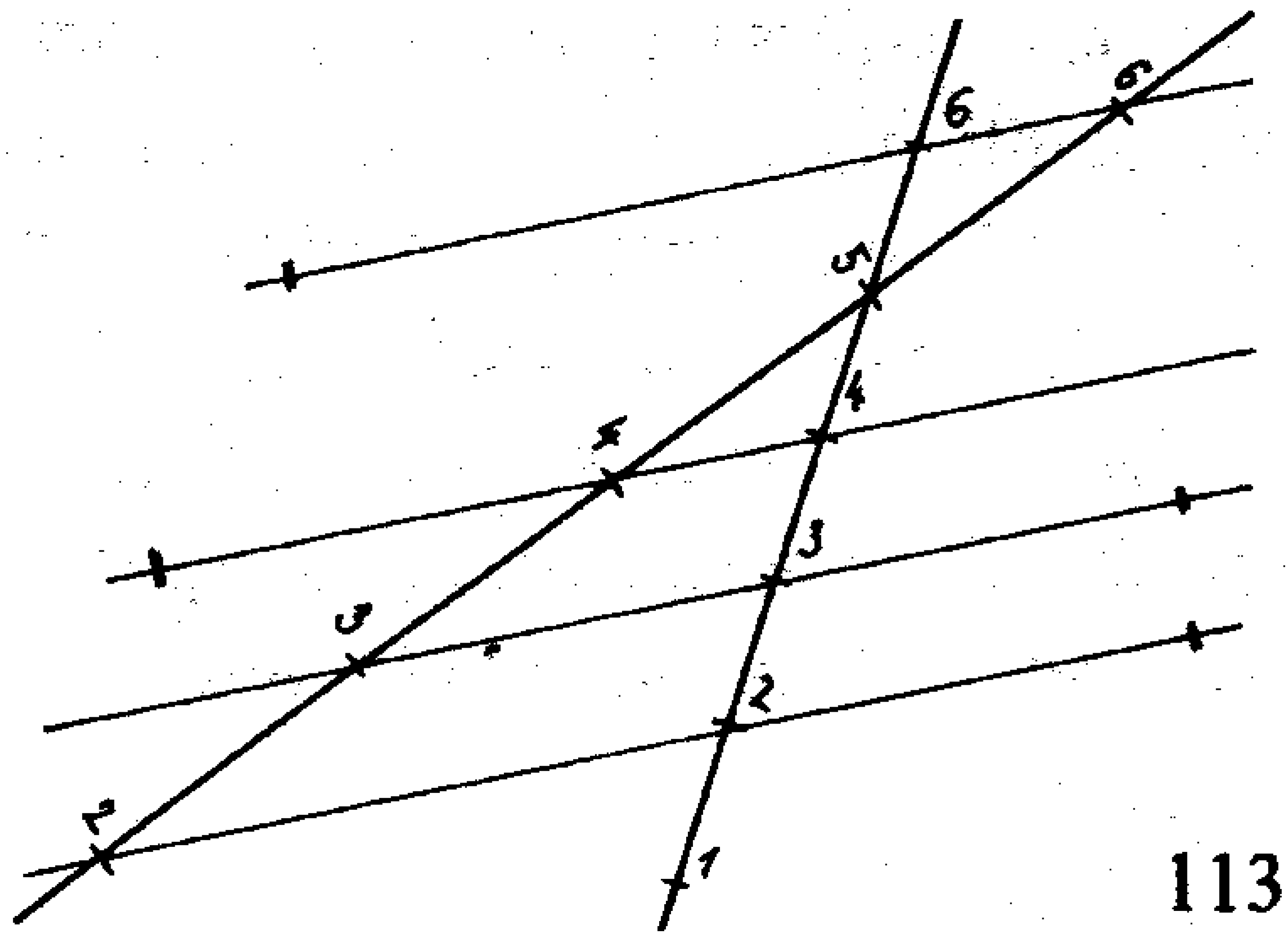
112.ábra

Ha az A_3B_4 egyenes vetítősíkját vízszintes síkba fordítjuk (a B_4 egy rajzi egységgel magasabban helyezkedik el A_3-nál), nemcsak a keresett α szög, de az AB egyenes szakasz is valódi méretben látszik. Szokás az α szöget *dőlésszögnek* is nevezni. *A dőlésszög tangense az egyenes lejtése.* Az egyenes megadható egy pontjával, lejtési vagy emelkedési irányával és dőlésszögével.

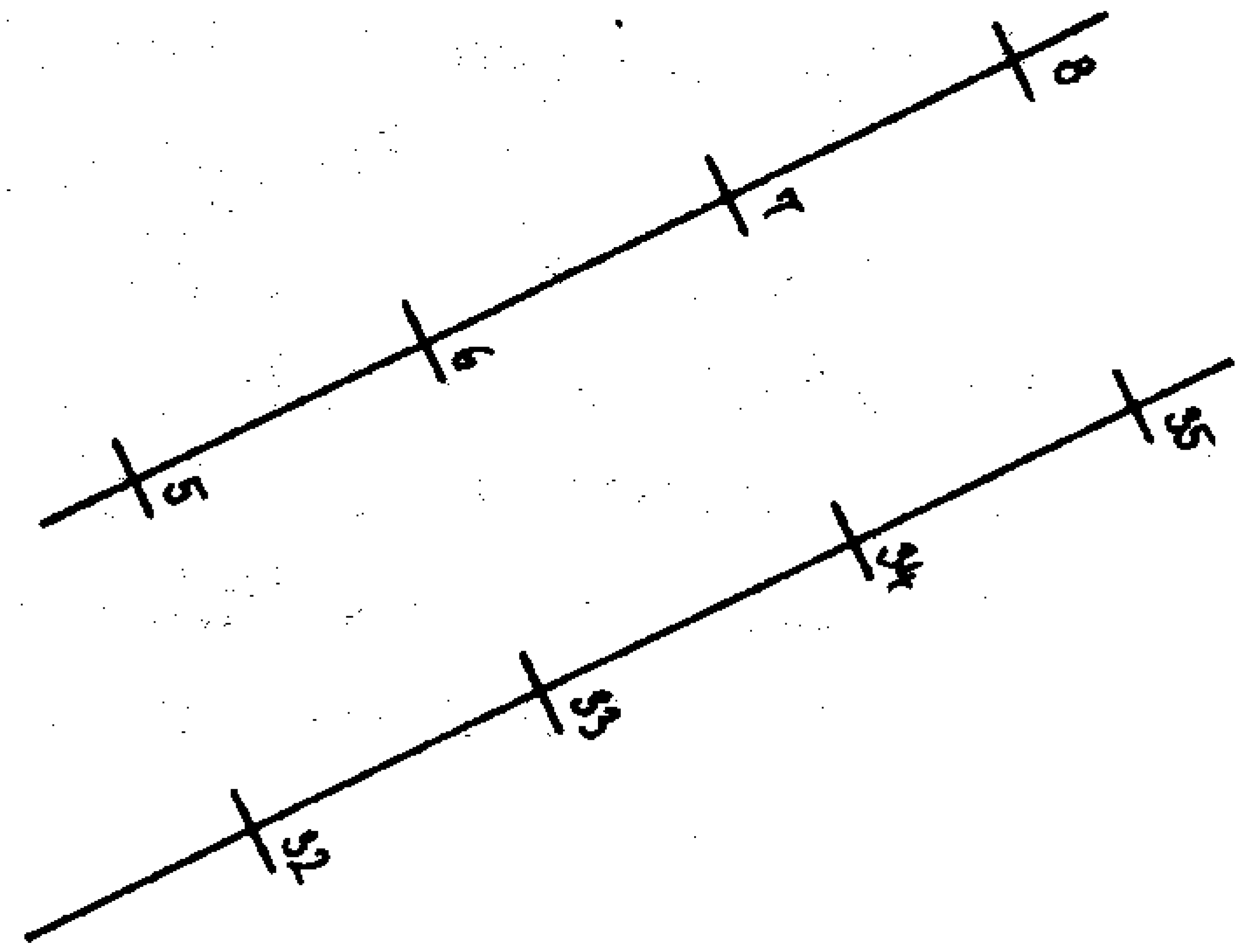
Mesterséges terepfelületek dőlését a gyakorlatban *rézsűvel jellemezzük. A rézsű az esésvonal (sík) vízszintes síkkal bezárt szögének kotangense.* A lejtési szöget fokban, a lejtés mértékét százalékban, a rézsűt hányadossal (földmunkáknál gyakran negyedekben) adjuk meg.

Két egyenes kölcsönös helyzete

Metsző egyenespár képeinek metszéspontja mindkét egyenesen azonos kótájú. Azonos magasságú pontjaikat összekötő egyenesek párhuzamosak. (113. ábra) Párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak, lejtési irányuk és osztóközük megegyezik. Ha két egyenes képei az előbbieknek nem felelnek meg, kitérő egyenesekről van szó.

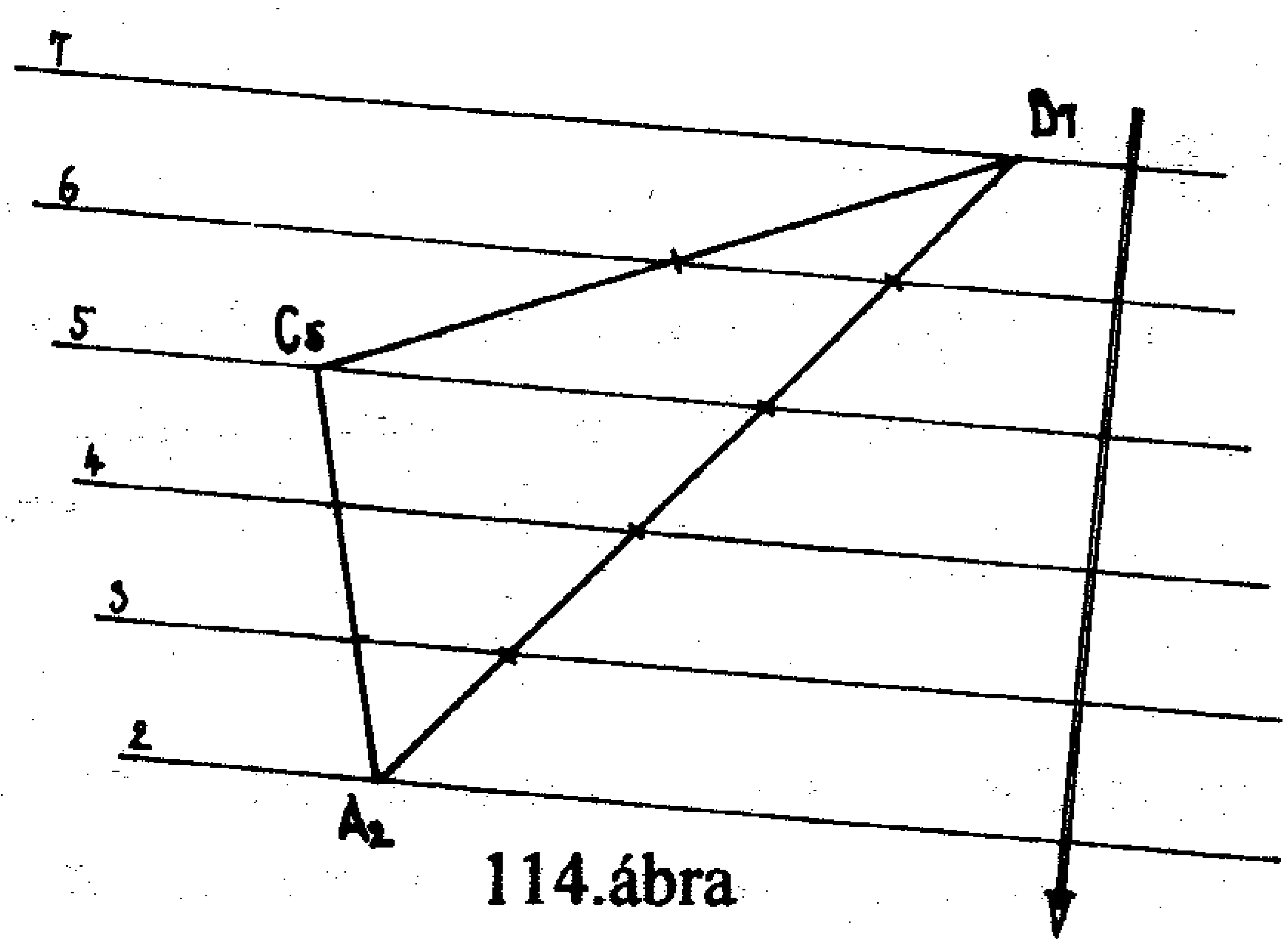


113.ábra



Sík ábrázolása

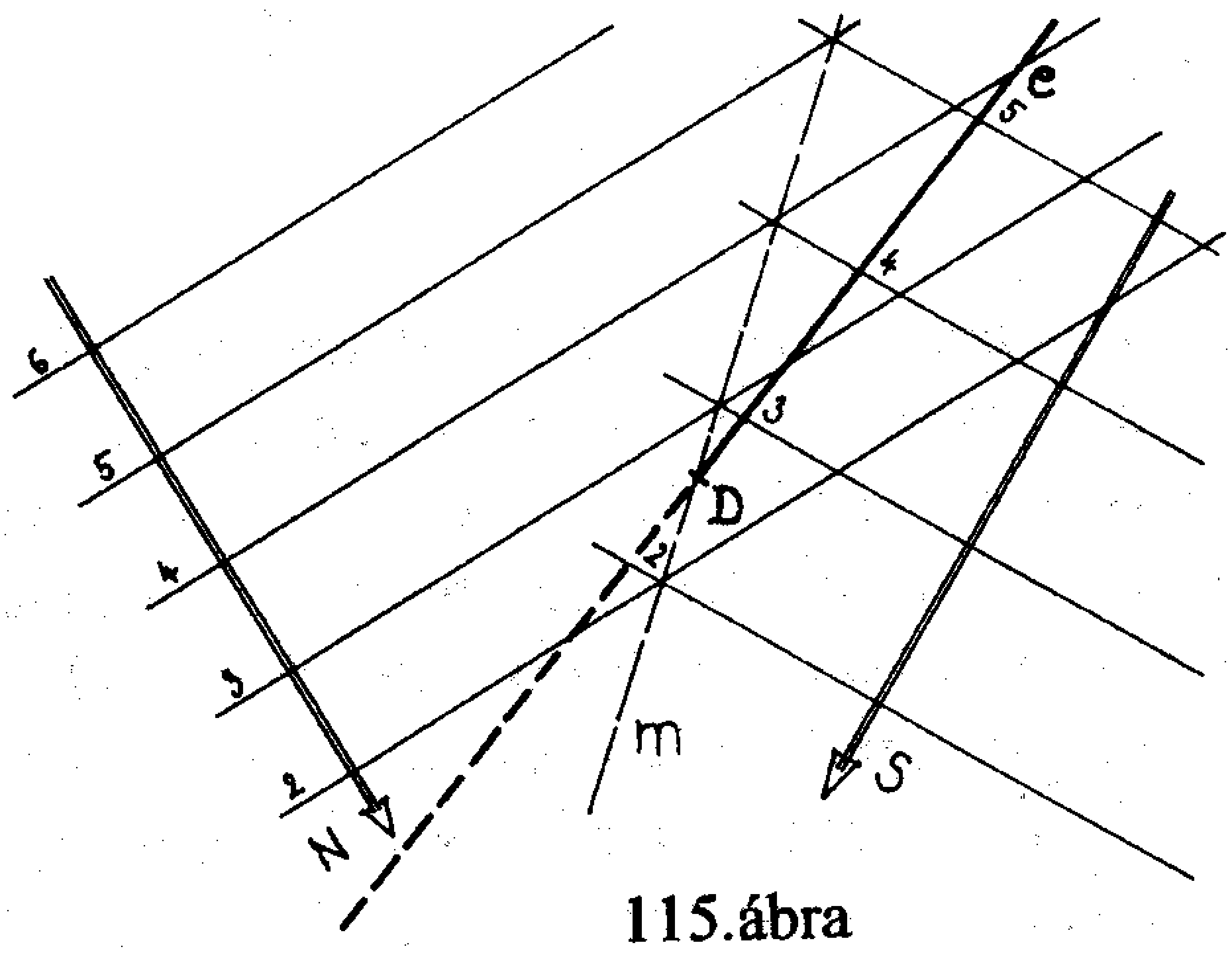
Két metsző vagy párhuzamos egyenes síkot határoz meg. Ezt a síkot a szintsíkok párhuzamos egyenesekben, szintvonalakban metszik. A sík megadható mérőszámos ábrázolásban is a geometriailag szokásos összes módon. Ebben az ábrázolási módban leggyakrabban *a síkot szintvonalaival, vagy az ezekre merőleges esésvonalával jellemezzük.* Rajzoljuk meg az A_2, B_7, C_5 pontokra illeszkedő sík szintvonalait (114.ábra)! Először a háromszög oldalait graduáljuk, majd összekötjük az azonos magasságú pontokat. Az esésvonalat a szintsíkok graduálják. Az esésvonalat - hogy a többi egyenestől megkülönböztessük - két egymás mellett haladó párhuzamos vonallal jelöljük és a lejtés irányába mutató nyíllal látjuk el. A sík *dőlésszöge* megegyezik esésvonalának a vízszintes síkkal bezárt szögével.



114.ábra

Illeszkedési és metszési feladatok

A pont illeszkedik a síkra, ha képe az azonos magasságú szintvonal képére esik. A síkra illeszkedő egyenest a sík szintvonalai graduálják. Két sík metszésvonalát az azonos magasságban levő egyeneseik (szintvonalak) metszésével szerkeszthetjük. Sík és egyenes döféspontjának szerkesztése itt is az egyenesre illesztett segédsík alkalmazásával történik. Az egyenesre tetszőleges segédsíkot illeszthetünk (a vetítősík nem célszerű). Az S segédsík és az N sík metszésvonala jelöli ki az egyenesen a döféspontot (115. ábra).



115.ábra

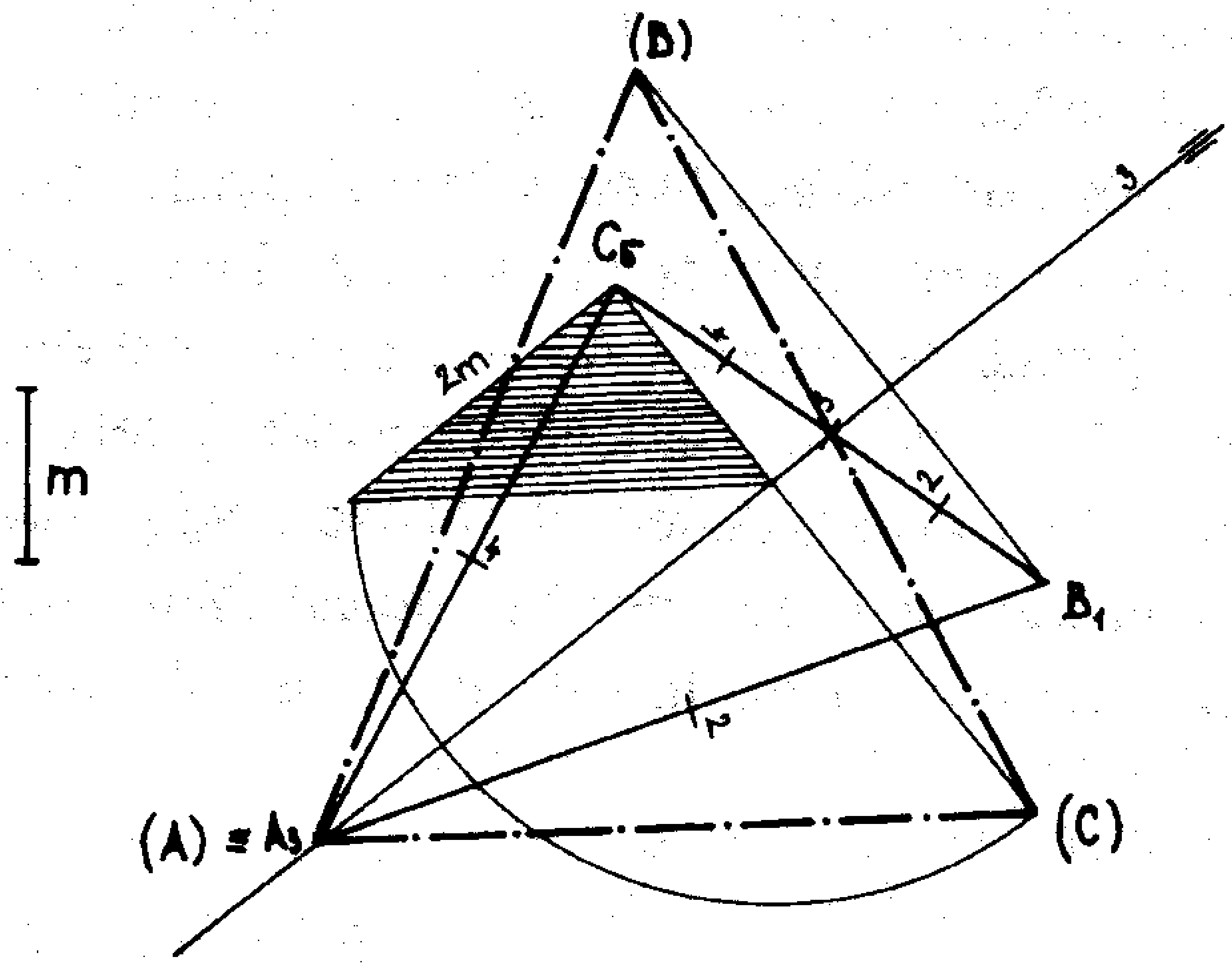
Az eddigi ismereteink alapján kótás ábrázolásban megszerkeszthető két egyenes adott ponton átmenő, illetve adott irányú transzverzálisa.

Sík leforgatása szintsíkba

Szerkesszük meg az $A_3B_1C_5$ háromszög *valódi nagyságát*! A feladat két különböző módon is megoldható. Meghatározzuk a három *szakasz valódi hosszát* (112. ábra alapján), majd ezekből összerakjuk a háromszöget.

A másik megoldás, hogy *a háromszöget* egy szintvonala körül *szintsíkba forgatjuk.* Az 116. ábrán a 3-as szintvonal körül forgatjuk a

C_5 pontot. A C_5 pont a forgástengelyre merőleges síkban, körön fordul. A kör sugarát a vonalkázott háromszög átfogója adja, melynek befogói a C_5 pont és a szintvonal vetületének távolsága, valamint az a két rajzi egység, amennyivel a C_5 pont a harmadik szintsík fölött helyezkedik el.



116. ábra

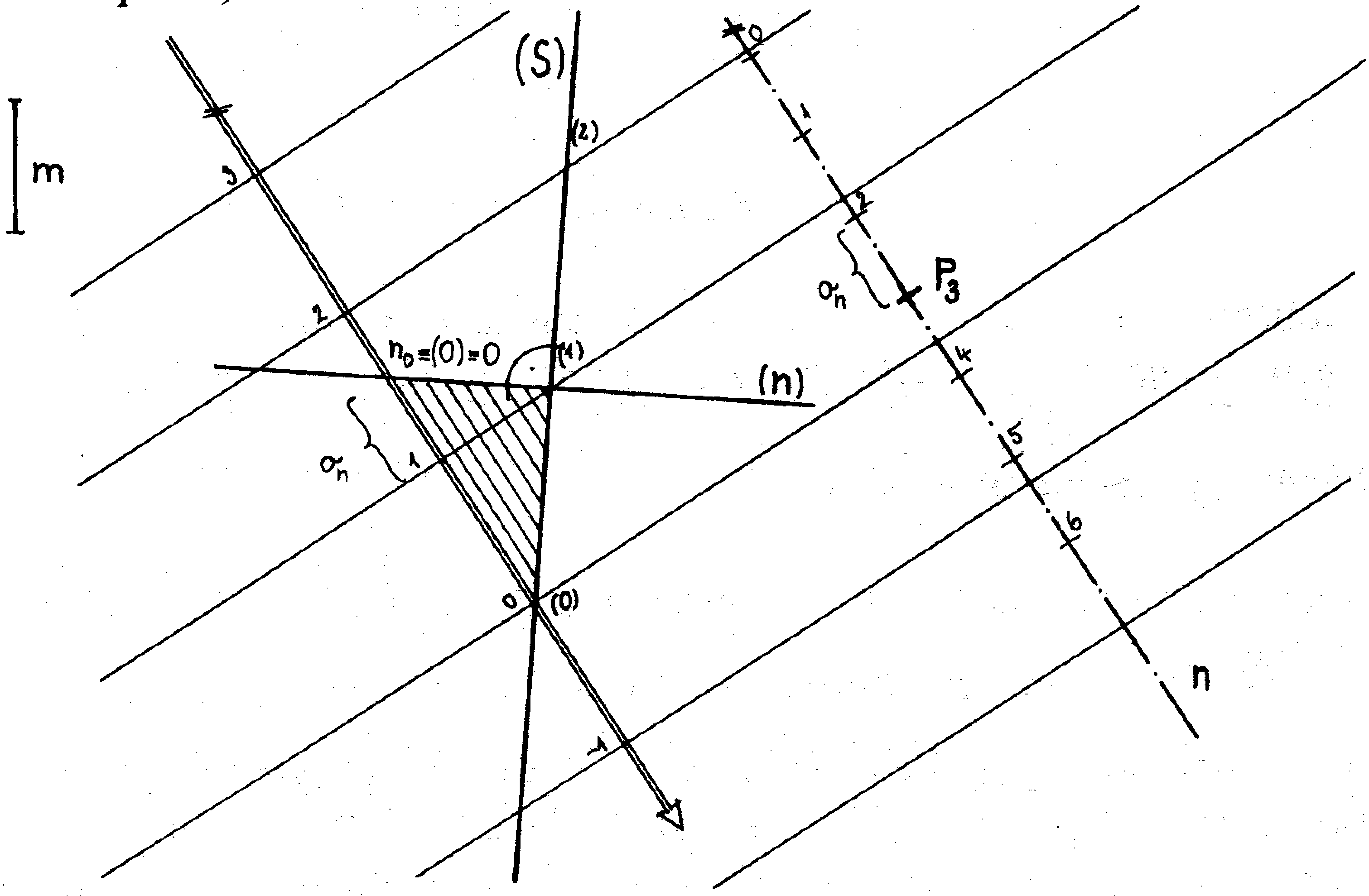
Természetesen a vetület és a forgatott között itt is *merőleges affinitás* van, amely további pontok szerkesztésére, vagy *ellenőrzésre is használható.*

Sík és egyenes merőlegessége

Adott a sík szintvonalaival. Szerkesszünk a P_3 ponton át a síkra merőleges egyenest!

A síkra merőleges egyenesek (a sík normálisai) valamennyien párhuzamosak egymással. Elegendő egyet szerkeszteni, majd a P_3 ponton át ezzel párhuzamos egyenest rajzolni. Sík és egyenes merőlegessége közvetlenül látszik ott, ahol a sík élben jelenik meg.

Állítsunk vetítősíkot az adott sík esésvonalára és ezt forgassuk a nullás szintsíkba (117.ábra). Az **e** esésvonal 1-es pontja egy, a 2-es két egységnyire van a 0-ás szintsík fölött. Az esésvonal forgatottja egyúttal a sík élben látszó képének forgatottja is. Állítsunk az 1-es pontban merőlegest a síkra! A szerkesztést leforgatásban tudjuk elvégezni: (**n**) merőleges a sík élben látszó leforgatottjára (1)-ben. Visszaállítva az **n** és **e** képe egymással fedésben van. Az egyenesek emelkedési iránya ellentétes, 1-es pontjuk képe közös. Az **n** egyenes 0-ás (nullás) szintsíkba eső pontja az **e** egyenes képére esik. Ezzel megszerkesztettük a síkra merőleges egyenes osztóközét. A P_3-as ponton átmenő normális képe párhuzamos a sík esésvonalával, emelkedési iránya ellentétes a sík emelkedésével, az előbb kiszerkesztett osztóköze pedig a vonalkázott háromszög átfogójának egy szelete (a derékszögű háromszögre vonatkozó magaságtétellel bizonyítható, hogy a sík osztóközének reciproka).



117. ábra

Ezzel a mérőszámos ábrázolás alapszerkesztéseit áttekintettük. Ezek segítségével minden olyan feladat, amely kétképsíkos ábrázolásban megoldható, itt is megszerkeszthető. A távolság- és szögfeladatok szerkesztése, valamint a transzverzális-szerkesztések gyakran egyszerűbbek, mint a Monge-féle rendszerben.

Terepfelületen végzett szerkesztések

A mérőszámos ábrázolás alkalmazása a gyakorlati életben leginkább a földmunkák szerkesztésére használatos. Bár a földfelszín a legritkább esetben helyettesíthető geometriai idomokkal, mégis az előzőekben elsajátított elvek igen hasznos segítséget nyújtanak.

A földfelszín ugyan egyenetlen, de a szintsíkok által kimetszett rétegvonalakat a térképekről valamennyien ismerjük. Magasságuk akár kótával, akár színezéssel is jelölhető.

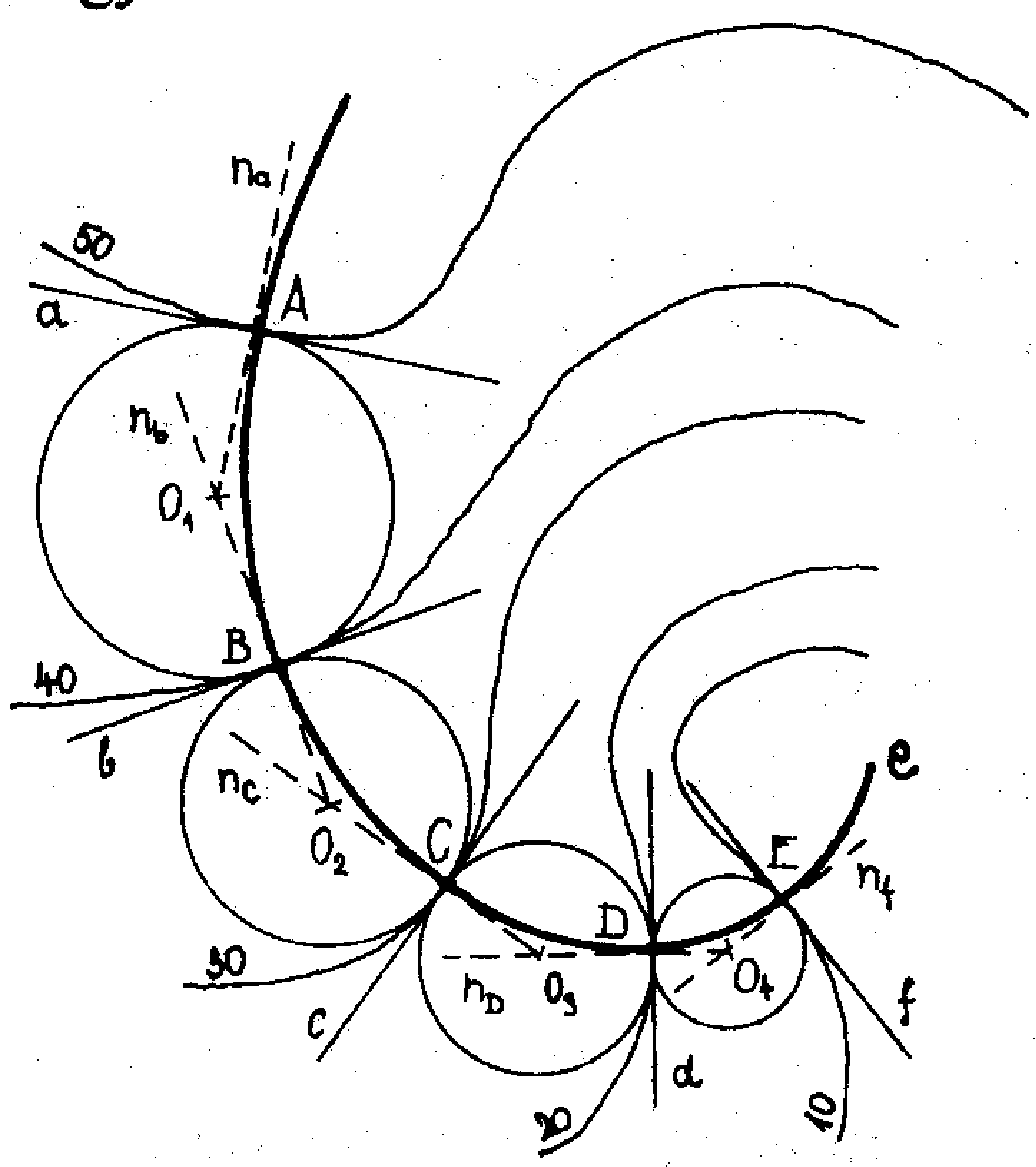
Alapsíknak a tengerszint magasságát szokás választani, pl. az Adriai-tenger szintjét, melynél a trieszti vízmércén mért átlagos vízszintmagasságot tekintik nullának. A tengerszint feletti magasságokat az ehhez viszonyított mérési pontok segítségével határozzák meg.

A kis helyi térképvázlatokon, helyszínrajzokon általában nem fontos a tengerszint feletti abszolút magasság, elegendő a telken, terepen való legalacsonyabb szinthez viszonyított relatív magasság ismerete is.

A terepen végezhető (közelítő) szerkesztések részletes tárgyalása nem az ábrázoló geometria feladata, így itt csak a mérőszámos ábrázolás néhány alkalmazási lehetőségére szeretnénk fölhívni a figyelmet.

Esésvonal rajzolása terepen

Az esésvonal a szintvonalakra merőleges – a víz lefolyási irányát jelzi. Az A pontból induló esésvonal következő B pontja ott van, ahol a szintvonalat az A pontban érintő kör a szomszédos szintvonalat is érinti (középpontja az A-ban "szemre" húzott érintőre merőleges egyenesen van, sugara próbálgatással adódik – egyáltalán nem szerkesztés - 118. ábra).

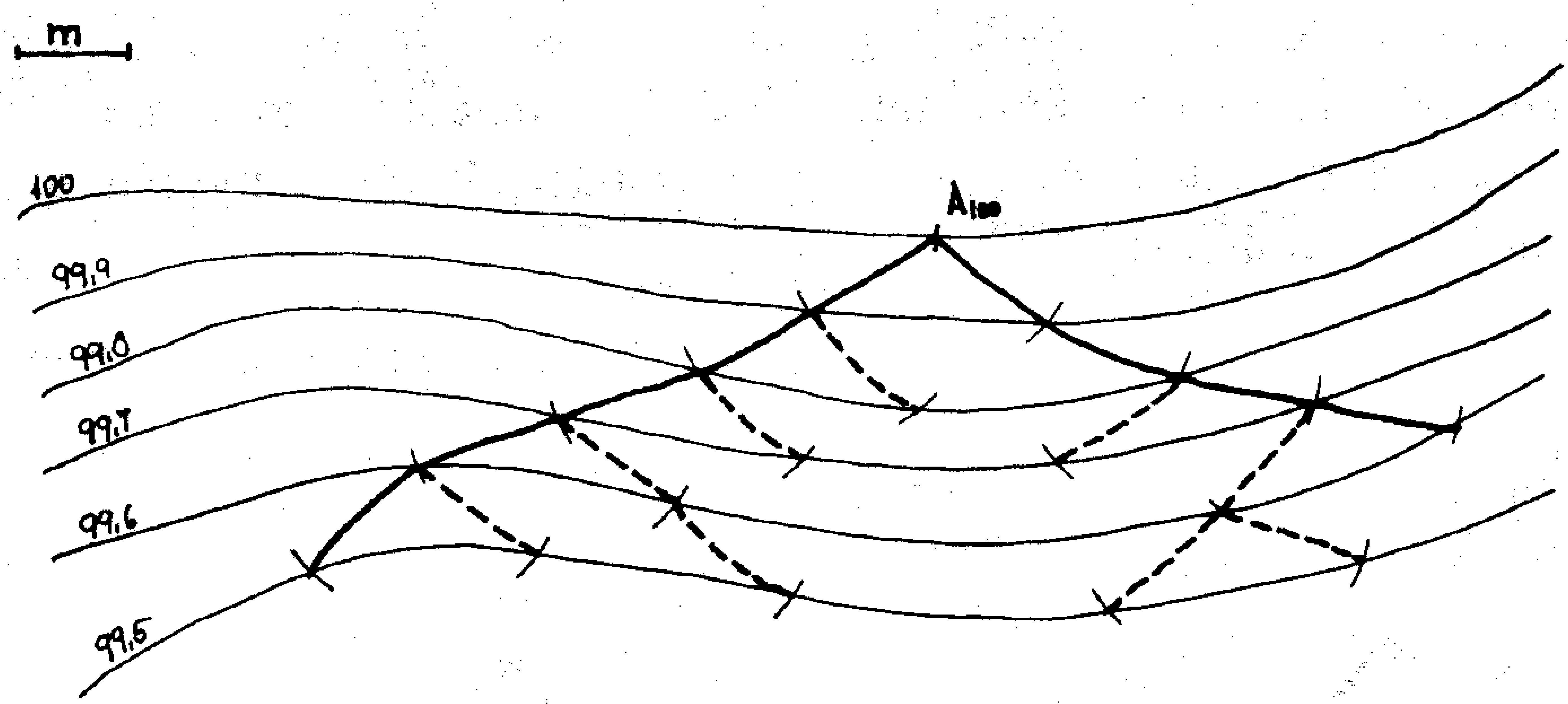


118. ábra

Adott pontból induló rézsűvonal szerkesztése

Szerkesszünk a 119. ábrán adott terepen az A_{100} pontból induló *adott*, 2,5%-os *lejtésű rézsűvonalat* (pl. az A házból lejárati utat, adott lejtéssel)! A méretarányból 1000:400=2,5 mm a méter rajzi hossza, a 2,5%-os lejtés 100 méteren 2,5 m-t emelkedik az út, 1 méter emelkedéshez 100:2,5=40 m vízszintes rész tartozik, ennek rajzi hossza 40 x 2,5 mm=100 mm.

Mivel a terep 0,1 méterenként van graduálva a rézsűvonal osztóköze 10 mm=1 cm. Megkeressük a 99,9 szintvonalon az A_{100}-tól 1 cm-re levő ponto(ka)t, majd lefelé haladva minden szintvonalon kijelöljük az adott lejtésű út lehetséges pontjait. A terep lejtésviszonyaitól függően több út is szerkeszthető, melyek közül a tervező feladata, hogy az optimálisat kiválassza.



119. ábra

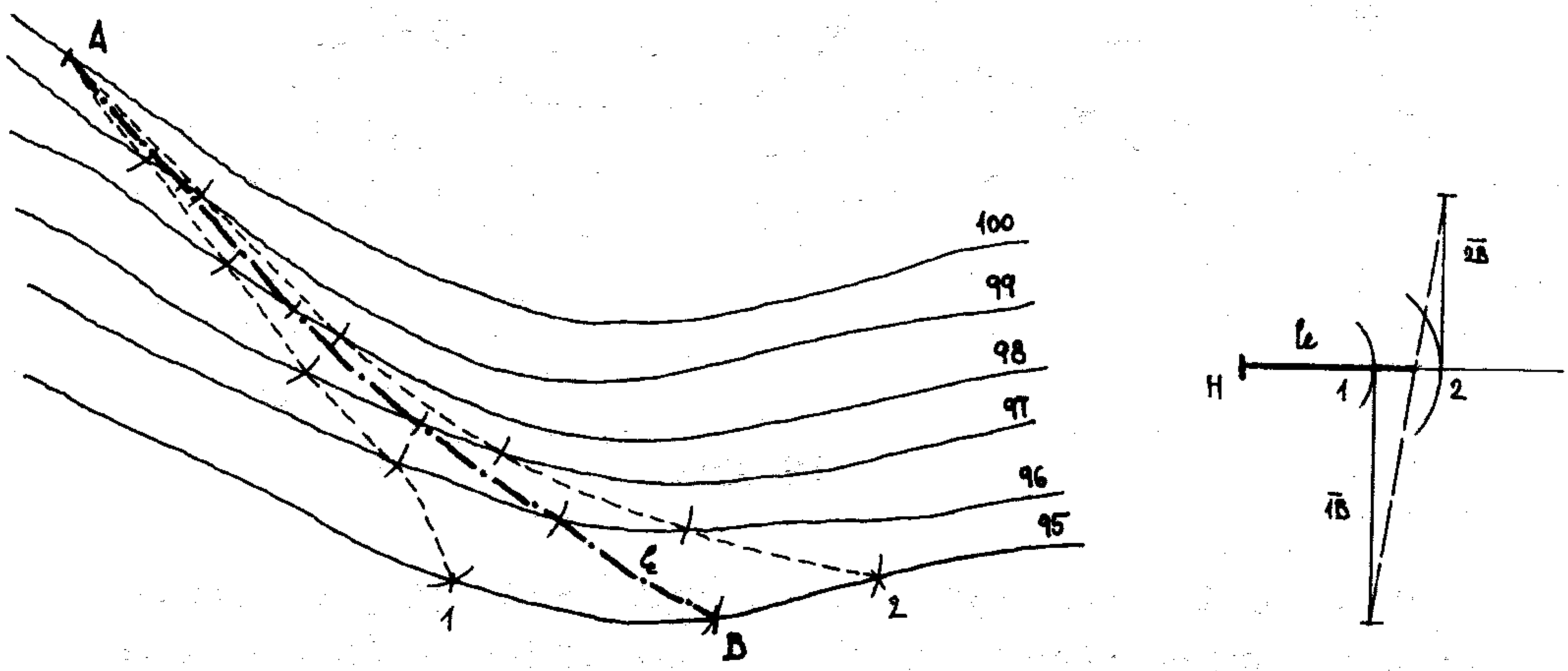
A kerttervezőnek is lehet olyan feladata, hogy két út vagy pont közé bizonyos feltételeknek megfelelően egy újabb utat vagy vízelvezető árkot tervezzen.

Egyenletes lejtésű vonal illesztése a terepre

Az előbbihez hasonló feladat: *adott két pont közé egyenletes lejtésű* vonalat (utat, árkot) fektetni. (A lejtés nagyságát meg kell keresni!) (120. ábra). A feladat megoldása próbálkozással indul. Az előző feladathoz hasonlóan k_1 osztóközzel rézsűvonalat illesztünk az A_{100}-ból kiindulva a B_{95} felé. A 95-ös szintvonalon nem B_{95}-be, hanem az 1-es pontba jutottunk. Válasszunk egy másik, k_2 osztóközt, és próbálkozzunk a B_{95} közelébe jutni a másik oldalon (2-es pont)!

Közelítő szerkesztéssel, úgynevezett hibagörbe rajzolásával kereshetjük meg (közelítőleg) a szükséges osztóközt.

Az osztóköz szerkesztéséhez egy vízszintes egyenes H pontjából vízszintes irányban fölmérjük az előbbi két osztóközt, k_1-et és k_2-t, a végpontjukban állított merőlegesre pedig - ellentétes oldalra - rendre az $1B_{95}$ illetve $2B_{95}$ szakaszokat. Az így kapott végpontokat összekötő egyenes kijelöli a vízszintesen azt a k osztóközt, amellyel az egyenletesen lejtő út graduálható. (A kiválasztott pontok és a terep szintvonalainak függvényében több jó megoldás is elfordulhat.)



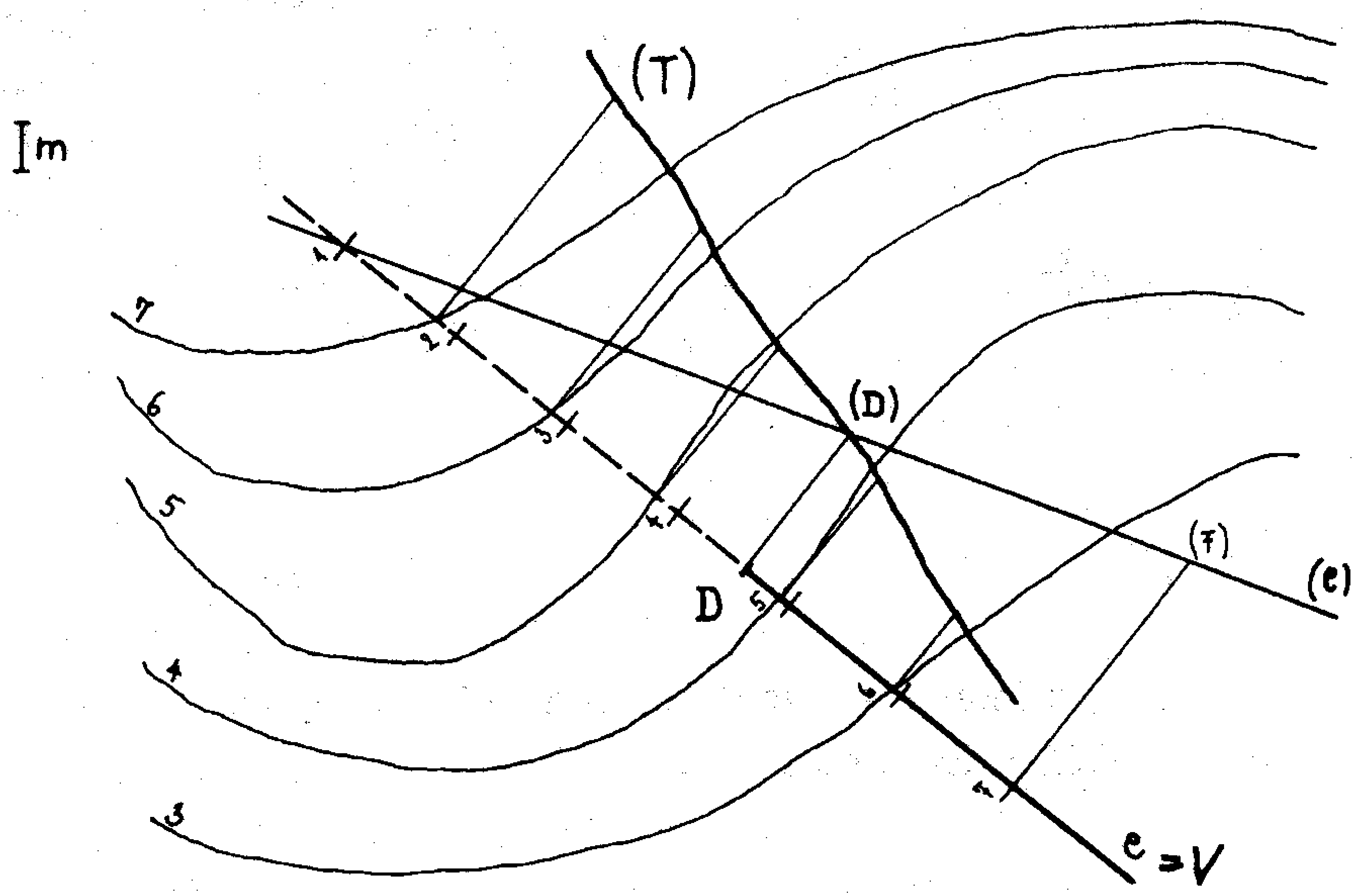
120. ábra

Terep és egyenes metszése

A geometriában szokásos eljárás szerint az egyenesre illesztett segédsík metszi a terepet valamilyen görbében, s ez a görbe kijelöli az egyenesből a döféspontokat.

A mérőszámos ábrázolásban gyakran használnak vetítősíkot (*függőleges metszeteket*). Ezek a függőleges síkok a terepből úgynevezett *terepszelvényeket* metszenek ki. A 121. ábrán az egyenes és a terep metszését az egyenesre illeszkedő terepszelvény segítségével határoztuk meg. Az egyenesre illeszkedő V vetítősík metszi a terep szintvonalait. A vetítősíkban megjelenő metszetet az 1-es szintsíkba forgattuk. (Ha csak a döféspontok helyét keressük és nem kívánunk az ábráról valódi méretet pl. a döféspontok távolságait leolvasni, magassági irányban tetszőleges lépték is alkalmazható.)

Ennek a feladatnak az alkalmazásával eldönthető az is, hogy a terep egyik pontjából látszik-e egy másik, kijelölt tereppont. (Pl. belátnak-e az utcáról a házba vagy az úszómedencére.)

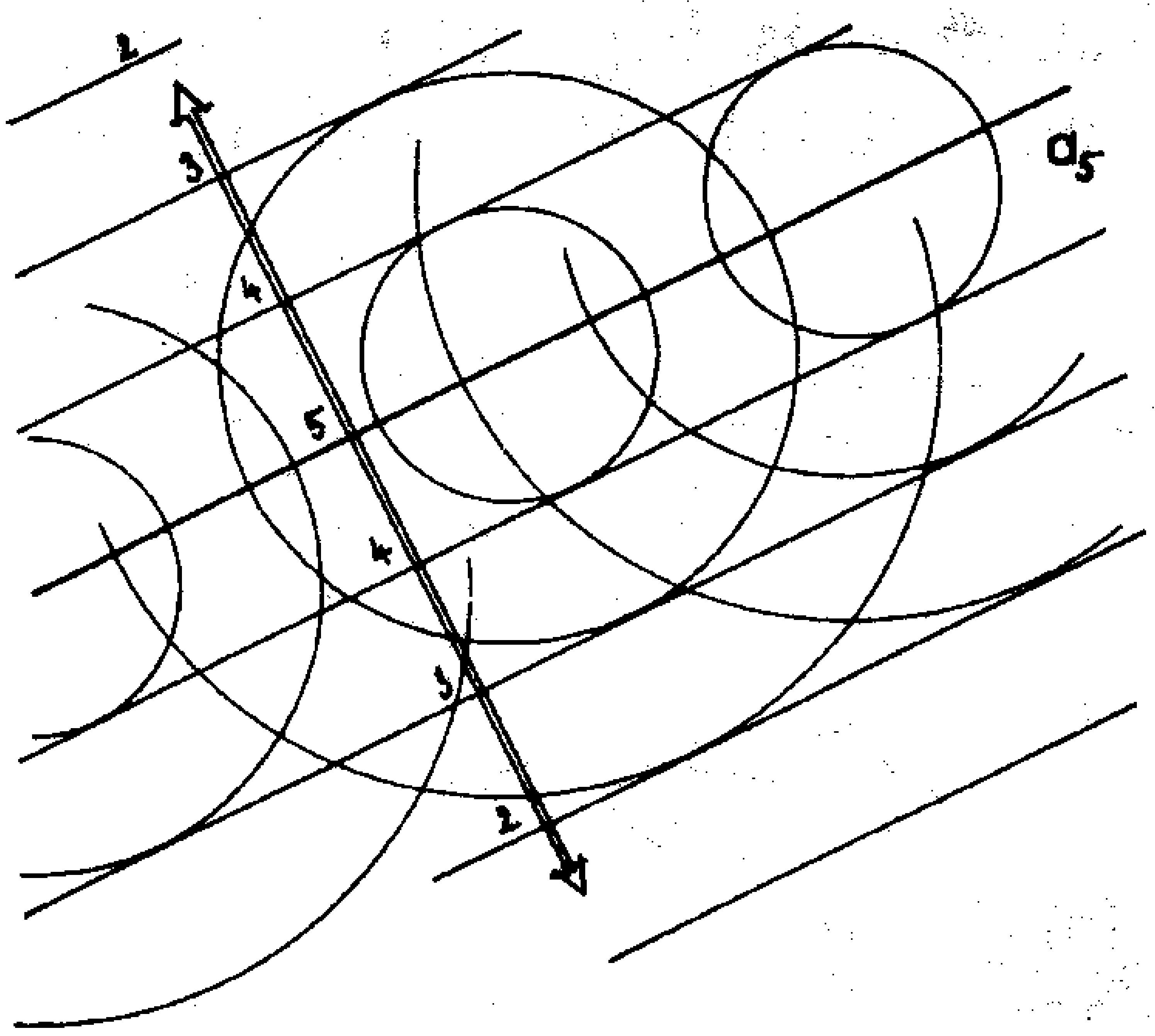


121. ábra

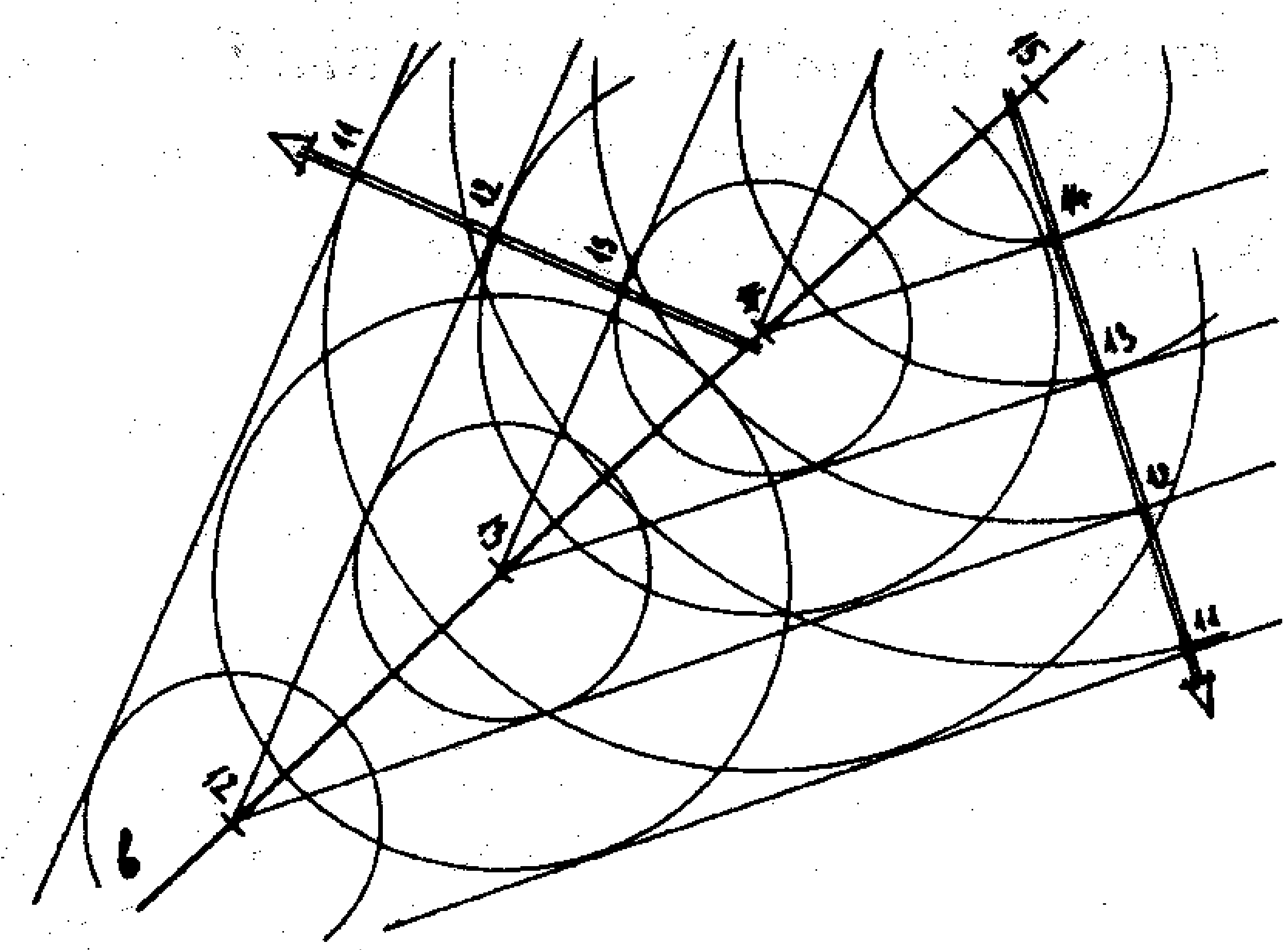
Rézsűfelület illesztése térgörbére

Adott ponton átmenő adott rézsűjű egyenesek egy kúpfelület, a *dőléskúp* alkotói. A dőléskúp szintvonalai a kúp csúcsával koncentrikus körök.

Rézsűfelületeket rézsűkúpok segítségével szerkeszthetünk. A *rézsűfelületek származtatása* úgy történhet, hogy az előírásnak megfelelő dőléskúp csúcspontját mozgatjuk a felület vezérvonalán. Ha a vezérgörbe vízszintes egyenes, a rézsűfelület két sík, melynek szintvonalai párhuzamosak az adott egyenessel és rendre érintik a dőléskúp szintköreit (122. ábra). Az általános helyzetű egyenes egész kótájú pontjaira illesztve a rézsűkúp csúcsát az azonos magasságú körök közös érintői a rézsűsík szintvonalai (123. ábra)

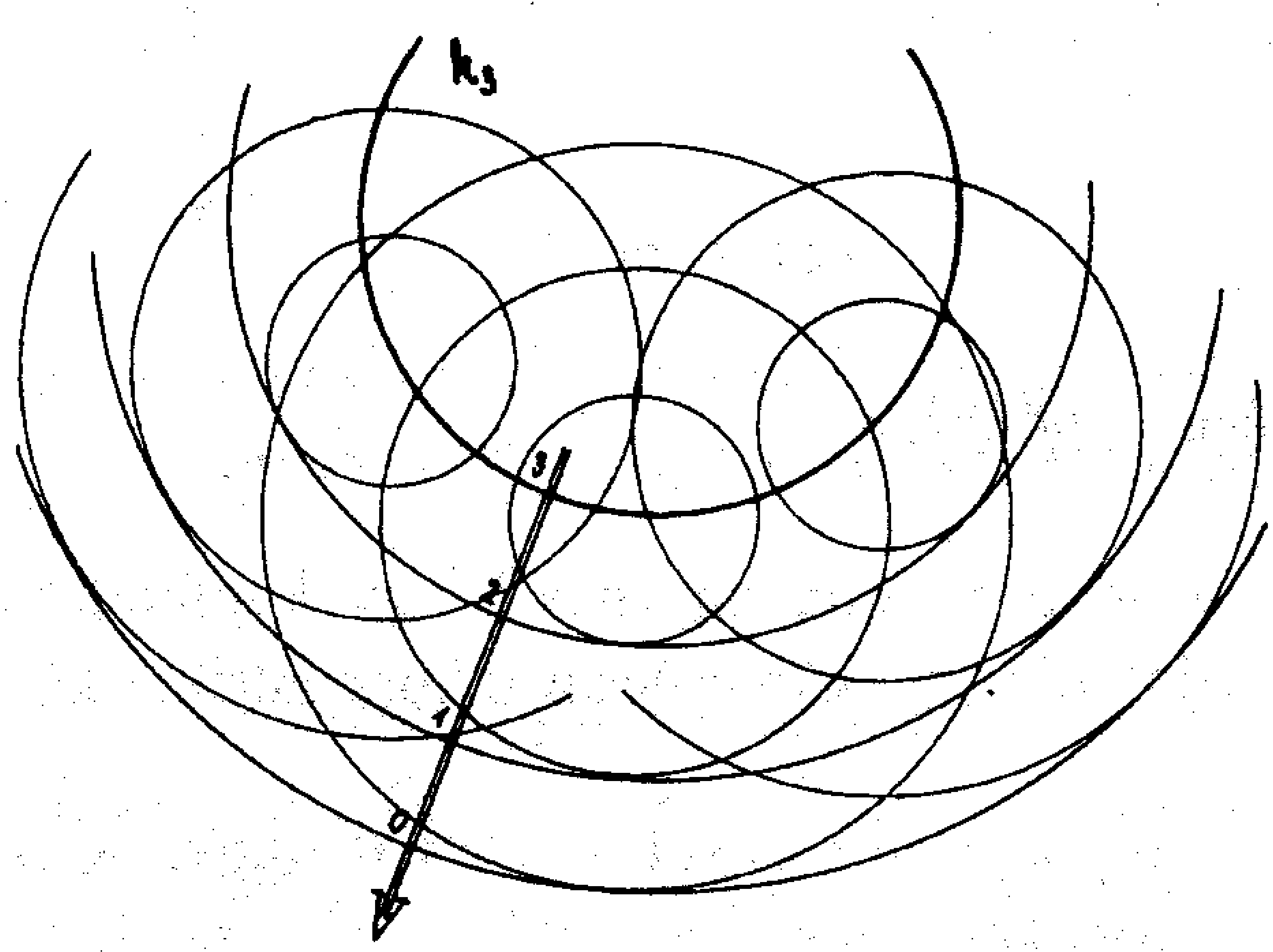


122. ábra



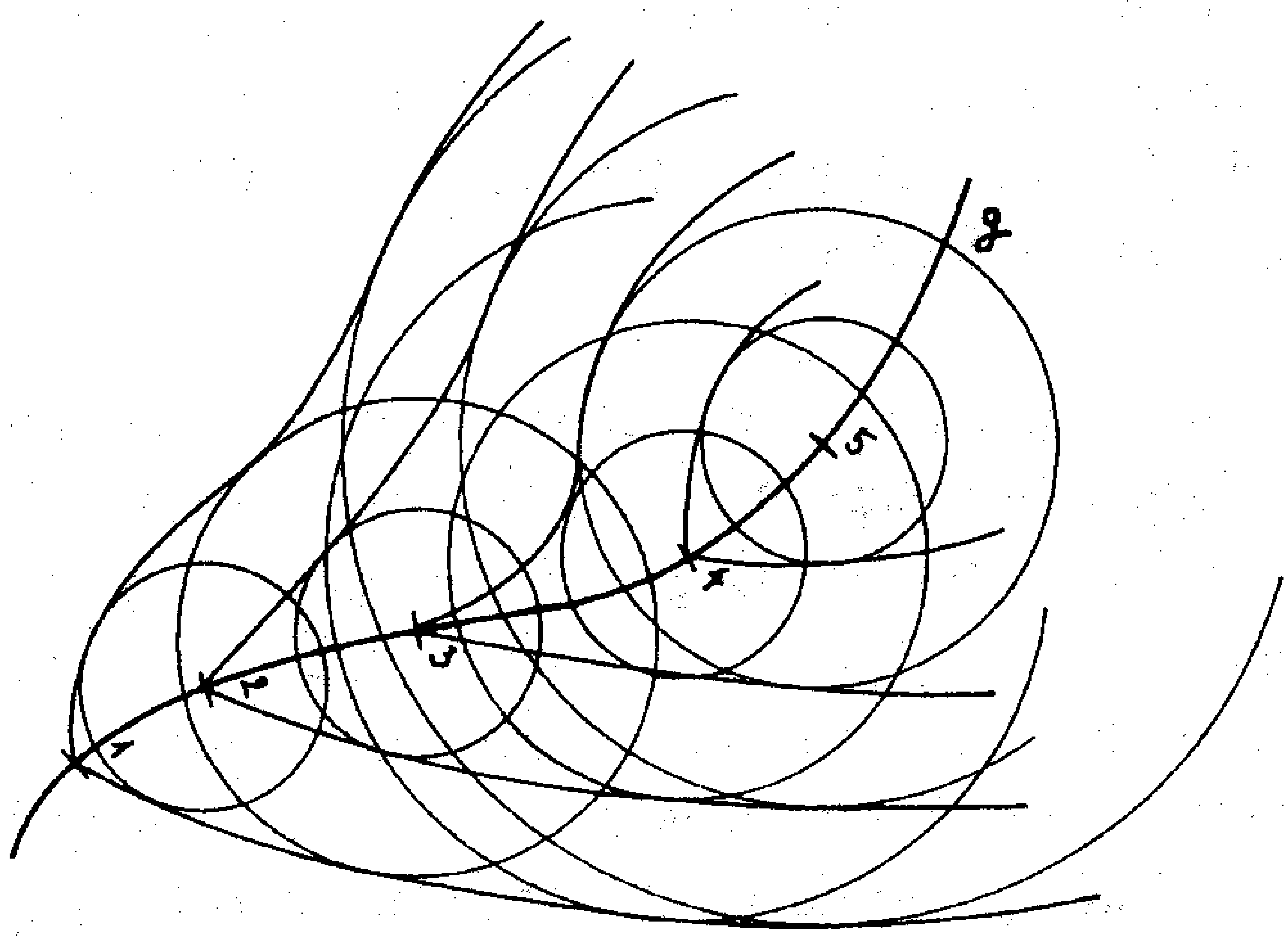
123. ábra

Körívre illesztett rézsűfelület az adott rézsűjű kúp, melynek szintkörei a körívvel koncentrikusak (124. ábra.)



124. ábra

Tetszőleges térgörbére egész kótájú pontjaiban illesztünk rézsűkúpokat. Az azonos szintsíkba eső körökhöz érintő görbéket rajzolunk. (Nem szerkesztés, csak közelítő rajzolás!) Ezek alkotják a felület szintvonalait (125. ábra.)



125. ábra

Földmunkák a terepen

A leggyakrabban előforduló feladatok a terepen az *utak, vagy közel vízszintes platók* (parkolók, pihenők, teraszok) *kialakítása*. A platók szintjét praktikus úgy megválasztani, hogy az egyik oldalon kitermelt föld a feltöltés földszükségletét fedezze – megtakarítva a szállítási költségek nagy részét.

A terepen végzett földmunkák szerkesztése *mindig közelítő jellegű*. A terepgörbék nem szerkeszthető, hanem közelítően rajzolt görbék – és ezek metszéspontját keressük szerkeszthető rézsűfelületi vonalakkal, vagy a közelítést már a terepgörbék ábrázolásakor beiktatjuk, ha a földfelületet geometriailag jól szerkeszthető felülettel (síkkal, kúppal) helyettesítjük. Az eredményül kapott *bevágást illetve töltést határoló vonalak* pontos helyét még a kivitelezési technikák is módosíthatják.

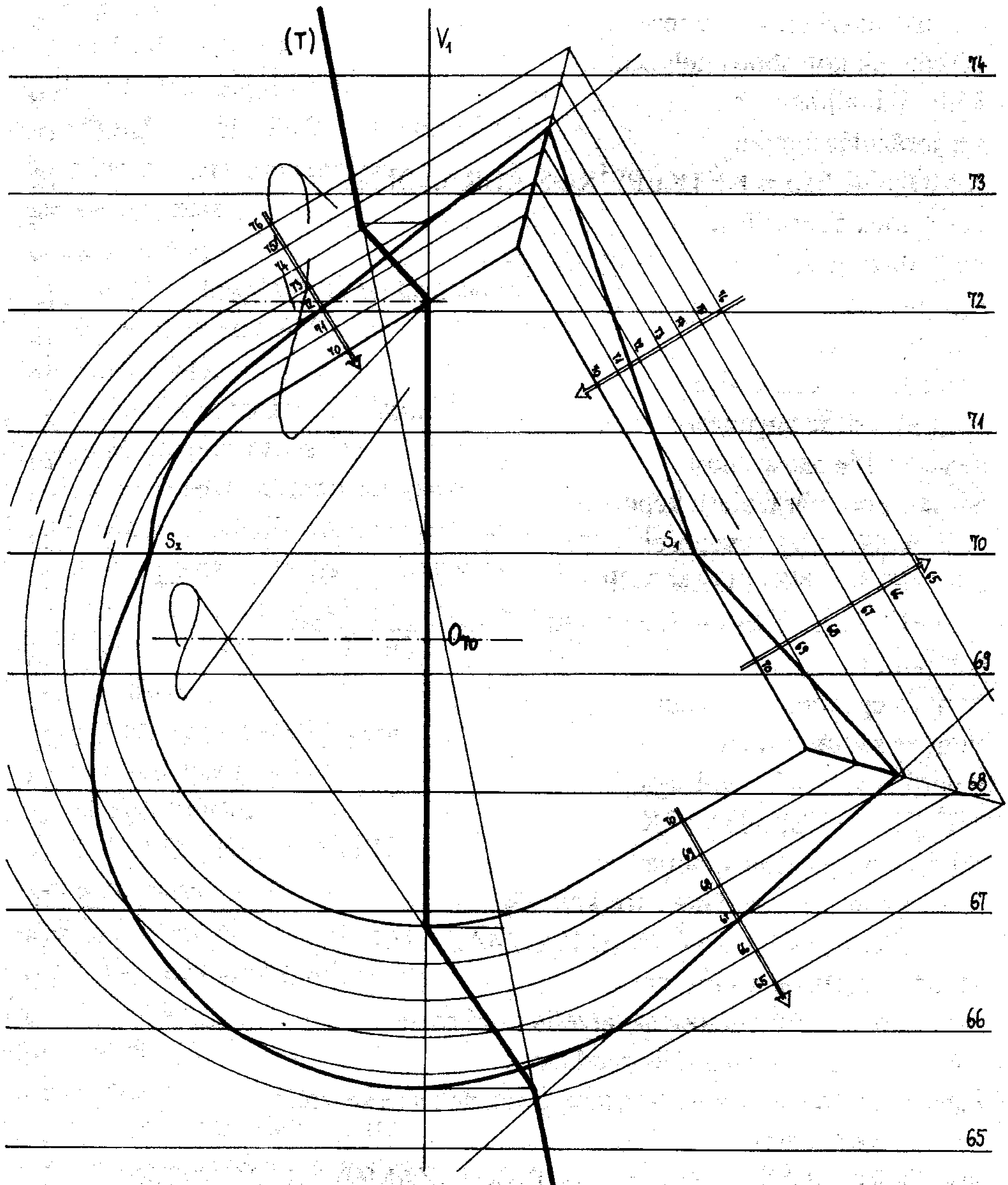
Az 126. ábrán szintvonalaival adott (közelítőleg) sík terepen alakítsunk ki egy vízszintes parkolót. A plató a terepet metszi. A metszésgörbe neve *semleges vonal*, ennek mentén a terep és a plató pontjainak magassága megegyezik. A plató határára eső *semleges pontok* elválasztják a *bevágás* és *töltés* helyét. A plató határvonalán kialakítandó rézsűfelületek meredeksége a talaj minőségétől függő, szabványban rögzített előírásoktól függ. A bevágás szokásos rézsűje 4/4, a töltésé 6/4.

A semleges pontok kijelölése után illesszünk 4/4-es bevágáskúpot a plató terepszintnél mélyebb vonalára. Az egyenes oldalak mentén 45 fokos dőlésű rézsűsíkok - a rajzi egységnek megfelelő távolságra haladó szintvonalai - metszik a terepet a bevágás „szélében", körömvonalában. A körívvel határolt részen a rézsűfelület kúp, melynek szintkörei metszik a terep azonos magasságú szintvonalait. A semleges pontokon túl a rézsűkúpok ellentétes nyílásúak, és dőlésük az előírásoknak megfelelően 6/4, vagyis szintköreik távolsága a méter rajzi hosszának 1,5-szerese. A töltés széle, *lábvonala* a rézsűkúp és a sík terep metszete. A metszésgörbe (kúpszelet) típusa az O_{70} ponton átmenő függőleges metszetről leolvasható – ellipszis. (Ezen a metszeten bejelöltük a plató széléhez csatlakozó rézsűfelületeket is.) Amennyiben a terep nem sík, a szintvonalak görbék, akkor a rézsűfelületekkel való metszés csak közelítőleg szerkeszthető.

Ha út földmunkáit kívánjuk szerkeszteni, az eljárás ugyanez lehet, csak a rézsűkúpokat az út koronavonala mentén kell mozgatni.

Ha az elkészült földmunkákról szemléletes képet szeretnénk kapni, ezt érdemes a mérőszámos képre, mint alaprajzra illesztett madárvetületben (axonometria) megrajzolni.

Terepfelület földmunkái megszerkeszthetők ábrázoló geometriai szempontból lényegesen kevesebb ismeretet feltételező módon is. Mintakeresztszelvények segítségével is illeszthetők rézsűfelületek a plató széleire (126. ábra, O_{70} ponton átmenő metszet). Ha elég sűrűn és minden szükséges irányból mintakeresztszelvényeket rajzolunk, a bevágás körömvonalának és a töltéslábnak tetszőlegesen sok pontját megszerkeszthetjük. Út földmunkáinál gyakorta ez a gyorsan célravezető módszer, mivel csak keresztirányú metszeteket kell készíteni.



126. ábra

TARTALOMJEGYZÉK