1. előadás

Definíció: (sorozat)

A természetes számokon értelmezett $N \mapsto R$ valós értékű függvényeket sorozatoknak nevezzük.

Példák:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ azaz $a_n = \frac{1}{n}$

b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$ azaz $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

c) $-1, 1, -1, 1, \ldots$ azaz $a_n = (-1)^n$

d) $1, 4, 9, 16, \ldots$ azaz $a_n = n^2$

e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ azaz $a_n = \frac{n}{n+1}$

f) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \cdots$ azaz $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

g) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ azaz $a_n = \frac{1}{2^n}$

Definíció: (monoton sorozat)

Az a_n sorozat növekedő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.

szigorúan növekedő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n < a_{n+1}$.

csökkenő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

szigorúan csökkenő, ha minden $n \in N$ esetén $a_n > a_{n+1}$.

(Megjegyzés: A fenti példákban az a) és g) szigorúan csökkenő, d) és e) szigorúan növő, b), c) és f) sorozat nem monoton.)

Definíció: korlátosság

Az a_n sorozat korlátos, ha létezik olyan *A* és *B* szám amelyekkel minden $n \in N$ esetén teljesül az $A \leq a_n \leq B$ egyenlőtlenség.

(Megjegyzés: A fenti példákban a d) sorozat nem korlátos, a többi igen.)

Definíció: határérték

A $h \in R$ számot az a_n sorozat határértékének nevezzük, ha tetszőleges pozitív ε -hoz található $n_0 \in N$ természetes szám úgy, hogy **minden** $n > n_0$ esetén $|a_n - h| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül.

Megjegyzés: A határérték fenti definíciója úgy is megfogalmazható, hogy $n > n_0$ indexek esetén a sorozat tagjainak a $(h-\varepsilon; h+\varepsilon)$ nyílt intervallumba kell esni. Ez egyben azt is jelenti, hogy ezen az intervallumon kívül legfeljebb n_0 darab, azaz véges sok sorozatelem lehet.

A határérték jelölésére az alábbi kifejezést használjuk:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = h$$

Szokás ilyenkor azt mondani, hogy a_n tart *h*-hoz, vagy a_n konvergál *h*-hoz.

Megjegyzés: Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor azt mondjuk, hogy **konvergens**, ha nincs, akkor **divergens**nek nevezzük.

Hangsúlyozzuk, hogy a végtelen nem valós szám, tehát a fenti definíció értelmében nem lehet egy sorozat határértéke. Ennek ellenére szoktak arról beszélni, hogy egy sorozat végtelenhez tart. Ezt a következő képpen kell érteni:

Definíció:

Az a_n sorozat végtelenhez tart, (avagy minden határon túl növő) ha bármely valós *k* számhoz található $n_0 \in N$ természetes szám úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén az $a_n > k$ egyenlőtlenség fennáll.

Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Hasonlóan definiálható a minden határon túl csökkenő sorozat.

Definíció: torlódási pont

A *t* számot a sorozat torlódási pontjának nevezzük, ha van a sorozatnak a *t* számhoz konvergáló részsorozata. A $+\infty$ és $-\infty$-t is a sorozat torlódási pontjának tekintjük, ha van a sorozatnak minden határon túl növő illetve csökkenő részsorozata.
Következmények:
1. Minden határérték egyben torlódási pont is.
2. Ha egy *t* szám torlódási pontja az a_n sorozatnak, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén a $(t-\varepsilon; t+\varepsilon)$ intervallumban végtelen sok sorozatelem van.
3. Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor egyetlen egy van.
4. Minden konvergens sorozat korlátos.
5. Ha egy korlátos sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, akkor konvergens.
6. Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Tétel: összeg, szorzat, hányados határértéke

Ha az a_n sorozat konvergens és határértéke *a*, valamint a b_n sorozat konvergens és határértéke *b*, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=a+b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=a-b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\cdot b$$

Ha még az is teljesül, hogy $b\neq 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}$$

Tétel: Ha minden $n\in N$ esetén $a_n\le u_n\le b_n$ egyenlőtlenség teljesül és

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=u$$

akkor létezik az u_n sorozat határértéke, és $\lim_{n\to\infty} u_n = u.$ (csendőrszabály)

Néhány nevezetes sorozat határértéke:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & ha\ |q| < 1 \\ 1 & ha\ |q| = 1 \\ divergens & egyébként \end{cases}$

3. $\lim_{n\to\infty} a^n n^k = 0$, ha $|a| < 1\ és\ k \in N$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ tetszőleges $a \in R$ esetén.

5. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Néhány bizonyítás:

Az 1. határérték közvetlenül adódik a határérték definíciójából.

A 2. bizonyításához felhasználjuk a Bernoulli egyenlőtlenséget:

Bernoulli egyenlőtlenség. Ha $n \in N$ tetszőleges természetes szám, és a $h \in R$ valós szám eleget tesz a $h > -1\ és\ h \neq 0$ feltételeknek, akkor

$$(1+h)^n > 1 + nh$$

Bizonyítás:

A $q^n - 1 = (q-1) + (q^2 - q) + (q^3 - q^2) + \cdots + (q^n - q^{n-1})$ azonosságban a jobb oldalon álló n db. zárójeles kifejezés között a $(q-1)$ a legkisebb, akár $q > 1$, akár $0 < q < 1$. Ezért mindkét esetben $q^n - 1 > n(q-1)$. Innen $q = 1 + h$ helyettesítéssel kapjuk a bizonyítandó állítást.

2. <u>bizonyítása</u> $|q| < 1$ esetén. (A többi eset triviális) Vezessük be az $1+h=\frac{1}{|q|}$ jelölést. Nyílván
$|q| < 1$ miatt $h > 0$. Továbbá

$$0 \le |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{h}$$

Most $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ miatt a jobb oldal 0-hoz tart. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

A 3. és 4. határérték igazolásához a következő **segédtétel** kell:

Ha $a_n \ge 0$ és valamely n_0 indextől kezdve, azaz minden $n > n_0$ természetes szám esetén teljesül, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

A segédtétel bizonyítása: A feltétel szerint
$a_{n_0+k} \le q a_{n_0+k-1} \le q^2 a_{n_0+k-2} \le \cdots \le q^k a_{n_0}$.

Tehát $n > n_0$ esetén $0 \le a_n \le q^n \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$. Itt a jobb oldal a 2. eredmény miatt 0-hoz tart.

Az 5. határérték létezésének bizonyítása
3 lépésből áll:

1. lépésben megmutatjuk, hogy az $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan növő.

2. lépésben megmutatjuk, hogy a $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat szigorúan csökkenő.

$u_n < v_n$ egyenlőtlenségből következik, hogy mindkét sorozat korlátos, tehát konvergens.
3. lépésben megmutatjuk, hogy $\lim(v_n - u_n) = 0$, azaz a két sorozatnak közös határértéke van.

Definíció szerint: $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

1. lépés: Igazolni kell, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ azaz $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}<\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$.

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ -gyel. Ekkor kapjuk, hogy

$\frac{n}{n+1}<\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$ ami ugyan az, mint $1-\frac{1}{n+1}<\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$. Ez pedig a Bernoulli egyenlőtlenség miatt igaz.

A 2. lépés igazolása ugyan így történhet: Az állítás a következő $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, azaz $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$. Szorozva $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ -nel, adódik, hogy $\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n}>\frac{n+1}{n}$. Ez pedig azért igaz, mert ha a bal oldalra alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget, akkor

$$\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n}>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{n}{n^2}>\frac{n+1}{n}.$$

Végül 3. lépés:

$$0<v_n-u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{n}<4\cdot\frac{1}{n}.$$

Az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $u_n<v_n\le v_1=4$.