3. ea. <u>Deriválás</u>. A differenciálhányados fogalma, derivált fv., differenciálási szabályok, elemi fv.-ek deriváltja.

Definíció: (differenciahányados)
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$ intervallumon, akkor $|h|<\delta$ esetén az $F_{x_0}(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ kifejezéssel definiált függvényt differenciahányadosnak nevezzük.

Definíció: (differenciálhányados)
A $\lim\limits_{h\to 0} F_{x_0}(h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ határértéket az *f(x)* függvény x_0 helyhez tartozó differenciálhányadosának nevezzük.
Jelölése: $f'(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}$.

Definíció: (derivált függvény)
Az $f': x \mapsto \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ utasítással definiált függvényt nevezzük derivált függvénynek.

Definíció: (jobb és bal oldali differenciálhányados)

Tétel: Ha egy függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor itt folytonos is.

Definíció: (differenciálható fv. grafikonjának érintője)
Ha az *f(x)* függvény differenciálható az x_0 pontban és ennek környezetében folytonos, akkor a függvény grafikonjának érintője az $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ egyenletű egyenes.

Differenciálási szabályok:
Ha az *f* és *g* függvények differenciálhatók az *x* helyen, akkor
- *f*+*g* is differenciálható és $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$.
- $f\cdot g$ is differenciálható és $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- továbbá, ha $g(x)\neq 0$, akkor $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is differenciálható és $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Láncszabály: Ha a *g* függvények differenciálható az *x* helyen és az *f* függvény differenciálható a $g(x)$ helyen, akkor az $f(g(x))$ összetett függvény differenciálható az *x* helyen és $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Inverz függvény differenciálási szabálya: Ha az *f* függvény a $t \in D_f$ pontban és környezetében szigorúan monoton és differenciálható, valamint $f'(t) \neq 0$, akkor az inverz függvénye f^{-1} differenciálható az $x = f(t)$ helyen és

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad .$$

Elemi fv.-ek deriváltja:

$y = const.$	$y' = 0$	
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$n \in N, \quad x \in R$
$y = x^r$	$y' = rx^{r-1}$	$r \in R, \quad x > 0$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$x \in R, \ a \in R, \quad a > 0$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$x \in R, \ a \in R, \quad a > 0, \ a \neq 1$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in R$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in R$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$
$y = arc\sin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$y = arc\cos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$y = arc\operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
$y = arc\operatorname{ctg} x$	$y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$x \in R$
$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$	$x \in R$
$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$	$x \in R$
$y = \operatorname{th} x$	$y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$x \in R$
$y = \operatorname{cth} x$	$y' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$
$y = ar\operatorname{sh} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in R$
$y = ar\operatorname{ch} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$
$y = ar\operatorname{th} x$	$y' = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert < 1$
$y = ar\operatorname{cth} x$	$y' = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert > 1$