4. előadás **Differenciálszámítás alkalmazásai**

Rolle tétel:

Ha az *f(x)* függvény az [*a,b*] intervallumon folytonos és az (*a,b*) intervallumon differenciálható, valamint *f(a) = f(b),* akkor létezik olyan x_0 szám, amelyre teljesül, hogy $a < x_0 < b$ és $f`(x_0) = 0$.
(Michel Rolle 1652-1719. francia matematikus)

Lagrange középértéktétel:

Ha az *f(x)* függvény az [*a,b*] intervallumon folytonos és az (*a,b*) intervallumon differenciálható, akkor létezik olyan x_0 szám, amelyre teljesül, hogy $a < x_0 < b$ és $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
(Josepf Luis Lagrange 1736-1813. francia-olasz természettudós)

Cauchy középértéktétel:

Ha az *f(x)* és *g(x)* függvények az [*a,b*] intervallumon folytonosak és az (*a,b*) intervallumon differenciálhatóak, továbbá $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan x_0 szám, amelyre teljesül, hogy

$a < x_0 < b$ és $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

(Augustin Cauchy 1789-1857. francia matematikus)

L`Hospital szabály:

Legyenek az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatóak az α hely egy környezetében és legyen itt $g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0$. Legyen továbbá

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to\alpha} |f(x)| = \lim_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty .$$

Ha $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$, ahol α és β lehet valós szám vagy $\pm\infty$.

(Megjegyzés: A tétel akkor is igaz, ha a határérték helyett mindenütt csak jobb vagy csak bal oldali határértéket írunk.)
(Guillaume Francois Antoine De L`Hospital 1661-1704. francia matematikus)

Tétel.
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy
$f'(x_0) > 0$, akkor *f(x)* lokálisan növő az x_0 pontban.
Tétel.
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy
$f'(x_0) < 0$, akkor *f(x)* lokálisan csökkenő az x_0 pontban.

Fordítva:

Tétel.
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy *f(x)* lokálisan növő az x_0 pontban, akkor
$f'(x_0) \geq 0$.
Tétel.
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy *f(x)* lokálisan csökkenő az x_0 pontban, akkor
$f'(x_0) \leq 0$.

Tétel:
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá az *f(x)* függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor
$f'(x_0) = 0$.

Tétel.
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy
$f'(x_0) = 0 \text{ és } f'(x)$ lokálisan növő az x_0 pontban, akkor az *f(x)* függvénynek lokális minimuma van ebben a pontban.
Tétel.
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy
$f'(x_0) = 0 \text{ és } f'(x)$ lokálisan csökkenő az x_0 pontban, akkor az *f(x)* függvénynek lokális maximuma van ebben a pontban.

Tétel.
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt kétszer differenciálható is, továbbá teljesül, hogy
$f'(x_0) = 0 \text{ és } f''(x_0) > 0$, akkor az *f(x)* függvénynek lokális minimuma van ebben a pontban.
Tétel.
Ha az *f(x)* függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy
$f'(x_0) = 0 \text{ és } f''(x_0) < 0$, akkor az *f(x)* függvénynek lokális maximuma van ebben a pontban.

Tétel:
Az $[a,b]$ intervallumon differenciálható *f(x)* függvény akkor és csak akkor konvex, ha *f '(x)* monoton növő.

Tétel:
Az [*a*,*b*] intervallumon differenciálható *f(x)* függvény akkor és csak akkor konkáv, ha *f '(x)* monoton csökkenő.

Tétel:
Ha az *f(x)* függvény az [*a*,*b*] intervallumon kétszer differenciálható és
ha $f''(x) > 0$, akkor az *f(x)* függvény konvex
ha $f''(x) < 0$, akkor az *f(x)* függvény konkáv.

Tétel:
Ha az *f(x)* függvény az [*a*,*b*] intervallumon kétszer differenciálható és
az *f(x)* függvény konvex, akkor $f''(x) \geq 0$
az *f(x)* függvény konkáv, akkor $f''(x) \leq 0$.

Tétel:
Az [*a*,*b*] intervallumon differenciálható *f(x)* függvény akkor és csak akkor konvex, ha a függvény grafikonja az érintő fölött halad.

Tétel:
Az [*a*,*b*] intervallumon differenciálható *f(x)* függvény akkor és csak akkor konkáv, ha a függvény grafikonja az érintő alatt halad.

Definíció:
Az x_0 pontban és annak egy környezetében differenciálható *f(x)* függvény lokálisan konvex, ha $f(x) \geq f'(x_0)\left(x - x_0\right) + f(x_0)$.

Definíció:
Az x_0 pontban és annak egy környezetében differenciálható *f(x)* függvény lokálisan konkáv, ha $f(x) \leq f'(x_0)\left(x - x_0\right) + f(x_0)$.

Definíció:
Egy függvény konvex és konkáv részeinek csatlakozási pontját inflexiós pontnak nevezzük.

Tétel:
Ha az x_0 pontban és annak egy környezetében kétszer differenciálható *f(x)* függvénynek inflexiós pontja van, akkor $f''(x_0) = 0$.