Integrálszámítás

Definíció:
Az F(x) függvényt az f(x) függvény primitív függvényének nevezzük, ha F`(x)=f(x).
(Most is és a továbbiakban is egy alkalmasan választott intervallum fölött.)

Példa: Az f(x)=2x függvénynek az F(x)=x^2+1000 primitív függvénye, mert F`(x)=f(x).

Definíció:
Az f(x) függvény primitív függvényeinek összességét az f(x) függvény határozatlan integráljának nevezzük. Jelölése: $\int f(x)dx$

Egy függvény primitív függvényei csak konstansban különbözhetnek, azaz igaz a következő tétel:

Tétel:
Ha *F`(x)=G`(x)=f(x),* akkor *F(x)=G(x)+c*, ahol c egy konstans.
Bizonyítás: (Indirekt) tegyük fel, hogy a *H(x)=F(x)-G(x)* függvény nem konstans. Ekkor van olyan x_1 és x_2, hogy $H(x_1) \neq H(x_2)$. De akkor a Lagrange középérték tétel alapján van olyan x_1 és x_2 közé eső x_0 amelyre $H'(x_0) = \dfrac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$. Ez ellentmond a $H'(x) = 0$ feltételnek.

Ha tehát F(x) az f(x) egyik primitív függvénye, akkor $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Integrálási technikák:

1. **Parciális integrálás módszere**.
$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
Példa: $\int x^4 \ln x dx = \dfrac{x^5}{5}\ln x - \int \dfrac{x^5}{5} \cdot \dfrac{1}{x} dx = \dfrac{x^5}{5}\ln x - \int \dfrac{x^4}{5} dx = \dfrac{x^5}{5}\ln x - \dfrac{x^5}{25} + c$
Mikor javasolt használni?
a) Ha az integrandus polinom és exponenciális vagy trigonometrikus függvény szorzata.
b) Ha az integrandus polinom és exponenciális vagy trigonometrikus függvény inverzének szorzata.
c) Ha az integrandus exponenciális és trigonometrikus függvény szorzata.
Példák:

2. **Helyettesítéses integrálás módszere**.

Ha x a t változó differenciálható függvénye, azaz $x=g(t)$, akkor

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Példák:

1) $\int (1+\sin t)^5 \cos t dt \qquad x = g(t) = 1+\sin t \quad g'(t) = \cos t$ helyettesítéssel:

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c = \frac{(1+\sin t)^6}{6} + c$$

2) $\int \sqrt{1-x^2}dx \qquad 0 \le x \le 1 \qquad x = \sin t$ helyettesítéssel:

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \sqrt{1-\sin^2 t}}{2} + c = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + c$$

Fontos esetek:

$\int f^{\alpha}(x) f'(x) dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$ ha $\alpha \ne -1$.

$\alpha = -1$ eset: $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$.