Racionális törtfüggvények integrálása

Egyszerű alapesetek:

1) $\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$

2) $\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a(1-n)}(ax+b)^{1-n} + C$ ha $n \neq 1$

3/a $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx$ és $b^2-4ac<0$, akkor visszavezetjük az $\int \frac{1}{1+u^2}du = arc\,\mathrm{tg}\,u + C$ esetre.

Példa: $\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}arc\,\mathrm{tg}\frac{x+2}{3} + C$

3/b Ha $b^2-4ac=0$, akkor 2) eset.

Példa: $\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \int (x+2)^{-2}dx = -\frac{1}{x+2} + C$

3/c Ha $b^2-4ac>0$, akkor vagy $\int \frac{1}{u^2-1}du$ alakra hozzuk, vagy parciális törtekre bontjuk.

Példa: $\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+3)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+3}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+3| + C$

4) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx$

Általános eset:

$\int \frac{P_k(x)}{P_n(x)}dx$ Ha $k \geq n$, akkor első lépés egy polinom osztás:

$\frac{P_k(x)}{P_n(x)} = Q_{k-n}(x) + \frac{R_l(x)}{P_n(x)}$, ahol $l<n$.

$\int \frac{P_k(x)}{P_n(x)}dx$ integrálása $k<n$ esetén: nevezőt szorzattá, majd az integrandust parciális törtekre bontjuk.

Ha a nevezőnek csak egyszeres gyökei vannak:

$$\int \frac{P_k(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \cdots \frac{A_n}{x-x_n}\right)dx$$

Ha a nevezőnek van többszörös valós gyöke:

$$\int \frac{P_k(x)}{(x-x_0)^n} = \int \left(\frac{A_n}{(x-x_0)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-x_0}\right)dx$$

Ha van fel nem bontható másodfokú faktor a nevezőben:

$$\int \frac{P_k(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_i)(ax^2+bx+c)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \cdots \frac{A_i}{x-x_i} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\right)dx$$