7. ea. **Határozott integrál**

Jelölése: $\int_a^b f(x)dx$

Legyen *f(x)* korlátos az [a, b] intervallumon.
Osszuk fel az [a, b] intervallumot *n* (nem feltétlenül egyenlő) részre. Jelölje az osztópontokat növekvő sorrendben $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Legyen továbbá $a = x_0$ és $b = x_n$.

Definíció: A $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, ahol $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ összeget integrál közelítő összegnek nevezzük.

Definíció: Az $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, ahol $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ összeget alsó közelítő összegnek nevezzük.

Definíció: A $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, ahol $m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ összeget felső közelítő összegnek nevezzük.

Lemma 1. Ha az [a, b] intervallum egy meglévő felosztásához új osztópontokat veszünk, akkor az alsó közelítő összeg monoton nő (nem csökken).
Lemma 2. Ha az [a, b] intervallum egy meglévő felosztásához új osztópontokat veszünk, akkor a felső közelítő összeg monoton csökken (nem nő).
Lemma 3. Nincs olyan alsó közelítő összeg, amelyik nagyobb lenne mint egy felső közelítő összeg, azaz tetszőleges *m* és *n* esetén $s_m \le S_n$.
Következmény: $\sup s_m \le \inf S_n$.
Két eset lehetséges tehát: vagy $\sup s_m < \inf S_n$, vagy $\sup s_m = \inf S_n$.
Az első esetben, azaz ha $\sup s_m < \inf S_n$ az f(x) függvény nem integrálható az [a, b] intervallumon.
A második esetben, azaz ha $\sup s_m = \inf S_n$ az f(x) függvény integrálható az [a, b] intervallumon és ekkor **definíció** szerint $\int_a^b f(x)dx = \sup s_m = \inf S_n$.
Példa integrálható függvényre: konstans az [a, b] intervallumon.
Példa nem integrálható függvényre: $d(x) = \begin{cases} 0 \ ha \ x \ irracionális \\ 1 \ ha \ x \ racionális \end{cases}$ a [0, 1] intervallumon.

Tétel. Az [a, b] intervallumon monoton és korlátos függvény integrálható.
Egyenletes felosztás és monoton növő függvény esetén:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} \quad \text{és} \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{b-a}{n}.$$

Tehát $S_n - s_n = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.

Tétel. Ha az *f(x)* függvény integrálható az [a, b] és [b, c] intervallumokon, akkor integrálható az [a, c] intervallumon is, és

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx\,.$$

Newton - Leibniz tétel:

Ha *f(x)* folytonos az [a, b] intervallumon és *F(x)* az egyik primitív függvénye, azaz

$F'(x) = f(x)$, akkor $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$

Sir Isaac Newton (1643-1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Bizonyítás:

A tétel állításánál többet is bizonyítunk, nevezetesen azt, hogy az $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ úgynevezett integrálfüggvény x-szerint (azaz a felső határ szerint) differenciálható és deriváltja éppen az integrandus *f(x)* függvény.

$$\frac{d}{dx} I_a(x) = \lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Ez utóbbi tört az integrál definíciója alapján becsülhető:

$\min\limits_{[x,x+h]} f(t) \le \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \le \max\limits_{[x,x+h]} f(t)\,.$ Mivel $h \to 0$ esetén az *f(x)* függvény folytonossága miatt $\lim \min\limits_{[x,x+h]} f(t) = \lim \max\limits_{[x,x+h]} f(t) = f(x)$, ezért $\dfrac{d}{dx} I_a(x) = f(x).$

Tehát $I_a(x)$ az *f(x)* egyik primitív függvénye, mégpedig az, amelyik az *a* helyen zérus, mivel $I_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. Felhasználva, hogy a primitív függvények csak konstansban különbözhetnek, legyen *F(x)* egy tetszőleges primitív függvénye *f(x)*-nek, ekkor $I_a(x) = F(x) - F(a)$. Következés képpen

$$\int_a^b f(t)dt = I_a(b) = F(b) - F(a)\,.$$

Improprius integrál

A határozott integrál definíciójában felhasználtuk, hogy egy véges [a, b] intervallum fölött korlátos az *f(x)* függvény. Most azokra az esetekre térünk rá, ahol ezen a feltételek valamelyike nem teljesül.

Definíció:

a) eset: az intervallum nem véges

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\omega f(x)dx$$

b) eset: A függvény nem korlátos.

Tegyük fel pl., hogy az *f(x)* függvény *a*-ban nem korlátos. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\,.$$

Ha pedig az *f(x)* függvény *b*-ben nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,.$$