Az integrálszámítás néhány alkalmazása

1. Területszámítás

1/a Ha $f(x)>0$ az [a, b] intervallumon, akkor a függvénygörbe alatti terület:

$$T=\int_a^b f(x)dx$$

Ha a görbe $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $t_1\le t\le t_2$ paraméteres alakban adott, akkor $T=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt$.

1/b Szektorterület:

$$T=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left|y(t)\dot{x}(t)-x(t)\dot{y}(t)\right|dt$$

Ha a görbe $r=r(\varphi)$ polárkoordinátás alakban adott, akkor

$$T=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$$

2. Ívhossz

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \qquad s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt \qquad s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+\dot{r}^2}d\varphi$$

3. Forgástest térfogata

Ha az x-tengelyre merőleges síkmetszetek területe *T(x)*, akkor

$$V=\int_a^b T(x)dx$$

Speciálisan, az *f(x)* függvénygörbe x-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogata:

$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$. Paraméteresen adott görbe esetén: $V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)dt$.

4. Forgástest felszíne:

$$F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \qquad F=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$$

5. Súlypont

Ha egy egyenletes tömegeloszlású síklemezt az x-tengely az *f(x)>0* függvény görbéje és az x=a, x=b egyenesek határolnak, akkor a súlypontjának koordinátái:

$$x_s=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \qquad y_s=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

Az *f(x)* görbe x-tengely körüli forgatásával keletkezett testet egyenletes tömegsűrűségűnek gondolva, a test súlypontja az x-tengelyen van, tehát $Y_s=0$ és

$$X_s = \frac{\int_a^b x f^2(x)\,dx}{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$