9. előadás **Vektorok**

**Vektorok a geometriában**:
Azonos hosszúságú, azonos állású, azonos irányítású irányított szakaszok halmaza.

**Vektor műveletek**:

a) Összeadás

1. Vektorok összege vektor
2. Kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
3. Asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$
4. Van zérusvektor $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$
5. Minden vektornak van ellentetje: $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$

b) Skalárral való szorzás (skalár ebben a félévben = valós számmal)

1. Skalár és vektor szorzata = vektor
2. $x \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot x$
3. $(xy)\underline{a} = x(y \cdot \underline{a})$
4. $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$
5. $0 \cdot \underline{a} = \underline{0}$ és $x \cdot \underline{0} = \underline{0}$

c) Disztributív tulajdonság:

1. $(x + y) \cdot \underline{a} = x \cdot \underline{a} + y \cdot \underline{a}$
2. $x(\underline{a} + \underline{b}) = x \cdot \underline{a} + x \cdot \underline{b}$

**Lineáris vektortér:** Minden olyan halmaz, amely rendelkezik a fenti 12 tulajdonsággal.

**Vektorok lineáris kombinációja**: $x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \underline{a}_n$

**Független vektorok, összefüggő vektorok**
Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorrendszer független, ha az $x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{0}$ egyenletből következik, hogy $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$,
azaz ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorrendszernek <u>csak</u> a triviális lineáris kombinációja egyenlő a zérusvektorral.
Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorrendszer összefüggő, ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorrendszernek van olyan lineáris kombinációja, amelyik egyenlő a zérusvektorral, de nem minden együttható zérus, azaz az $x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{0}$ egyenletben van olyan $x_i$ amelyik $x_i \neq 0$.

Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorrendszer összefüggő, akkor van olyan vektora, amelyik előállítható a többi lineáris kombinációjaként.

**Altér fogalma**
Az $L$ vektortér egy $L'$ részhalmazát altérnek nevezzük, ha $L'$ maga is vektortér az eredeti műveletekkel.

Ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ egy $L$ vektortér vektorai, akkor ezen vektorok összes lehetséges lineáris kombinációi az $L$ vektortér egy alterét alkotják. Ez az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok által generált altér. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorokat az altér **generáló rendszerének** nevezzük.

Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ generáló rendszer összefüggő, akkor az általuk generált tér kevesebb vektorral is generálható.

Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ generáló rendszer független vektorrendszer, akkor a tér kevesebb vektorral nem generálható. (Ez a legszűkebb generáló rendszer) Egy ilyen generáló rendszert nevezünk **bázisnak**.
A vektortér **dimenziója** a bázisvektorok száma.

Tétel: A tér minden vektora egyértelműen áll elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.
Bizonyítás: Indirekt.

Rögzítsük a tér egy bázisát! Minden vektor egyértelműen áll elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. A bázisvektorok együtthatói a vektor **koordinátái.**

**Rendezett szám n-esek tere.**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

**Skaláris szorzás**
Geometriában: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$ .
Tulajdonságai:
1. Két vektor szorzata nem vektor, hanem skalár.
2. Kommutatív $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
3. Disztributív $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$

**Euklideszi tér:** Olyan vektortér, amelyben van skaláris szorzás.

**Skaláris szorzás** az n-dimenziós térben:
Ha az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ bázisvektorok **ortonormált** rendszert alkotnak, azaz a bázisvektorok páronként ortogonálisak $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0,\ ha\ i \neq j$ és normáltak, azaz $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = 1$, akkor

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + \cdots + a_n \underline{e}_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ és } \underline{b} = b_1 \underline{e}_1 + \cdots + b_n \underline{e}_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ esetén}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^T \underline{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

**Vektor felbontása** adott vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre

Az $\underline{a}$ vektor $\underline{b}$-vel párhuzamos komponense: $\underline{a}_p = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{b}^2} \underline{b}$

Az $\underline{a}$ vektor $\underline{b}$-re merőleges komponense: $\underline{a}_m = \underline{a} - \underline{a}_p$