Mátrixok

Definíció: Az **F:** $R^n \to R^m$ leképezés lineáris, ha
1. **F**($\underline{a}$ + $\underline{b}$) = **F**($\underline{a}$) + **F**($\underline{b}$)
2. **F**(x$\underline{a}$) = x**F**($\underline{a}$)
vagy ami az előzővel ekvivalens: **F**(x$\underline{a}$ + y$\underline{b}$) = x**F**($\underline{a}$) + y**F**($\underline{b}$)

Az n-dimenziós tér **T:** $R^n \to R^n$ **lineáris transzformációja** a tér önmagára való lineáris leképezése.

Lineáris leképezés megadása:
Legyen az R^n tér egy bázisa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ és az R^m tér egy bázisa: $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_m$.

Egy tetszőleges $\underline{a} \in R^n$ vektor $\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + \cdots + a_n\underline{e}_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ képe:

$\boldsymbol{F}(\underline{a}) = a_1 F(\underline{e}_1) + \cdots + a_n F(\underline{e}_n)$, tehát csak a bázisvektorok képét kell megadni.

Ha $F(\underline{e}_1) = a_{11}\underline{f}_1 + a_{21}\underline{f}_2 + \cdots + a_{m1}\underline{f}_m = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ és így tovább

$\vdots$

$$F(\underline{e}_n) = a_{1n}\underline{f}_1 + a_{2n}\underline{f}_2 + \cdots + a_{mn}\underline{f}_m = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

akkor az $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ számtáblázat minden információt tartalmaz.

Mátrix

Műveletek mátrixokon:

a) **Összeadás:**
Legyen $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ azonos típusú (m x n) mátrix. Jelölés vagy így: $\boldsymbol{A}$, vagy így: $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

akkor $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$

A mátrix-összeadás tulajdonságai:
1. m x n típusú mátrixok összege m x n típusú mátrix.
2. kommutatív
3. asszociatív
4. zérus mátrix: minden $a_{ij} = 0$
5. Ellentett.

b) **Skalárral való szorzás**

$$x\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} xa_{11} & xa_{12} & \cdots & xa_{1n} \\ xa_{21} & xa_{22} & \cdots & xa_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ xa_{m1} & xa_{m2} & \cdots & xa_{mn} \end{bmatrix}$$

A skalárral való szorzás tulajdonságai:
1. Skalár és mátrix szorzata mátrix
2. kommutatív
3. $(xy)\underline{\underline{A}} = x(y\underline{\underline{A}})$
4. $1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$
5. $0 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$ *és* $x \cdot \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{0}}$

Disztributív tulajdonság:
$(x+y)\underline{\underline{A}} = x\underline{\underline{A}} + y\underline{\underline{A}}$ *és* $x(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = x\underline{\underline{A}} + x\underline{\underline{B}}$

Következmény: Vektortér

c) **Mátrixok szorzása**

Legyen $\underline{\underline{A}}$ m x n típusú, azaz $\underline{\underline{A}} = \lfloor a_{ij} \rfloor\ i = 1,2,\cdots,m \quad j = 1,2,\ldots,n$ és
legyen $\underline{\underline{B}}$ n x k típusú, azaz $B = \lfloor b_{ij} \rfloor\ i = 1,2,\cdots,n \quad j = 1,2,\ldots,k$
akkor definíció szerint $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \lfloor c_{ij} \rfloor$ egy m x k típusú mátrix, ahol
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

Tulajdonságok:
1. Zártság csak kvadratikus mátrixok esetén.
2. Nem kommutatív.
3. Asszociatív
4. Kvadratikus mátrixok körében van egység: $\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

5. Inverz?

$\boldsymbol{A}\underline{x} = \underline{b}$

- Melyik $\underline{x}$ vektor transzformálódik a $\underline{b}$ vektorba?
- Az $\boldsymbol{A}$ mátrix oszlopvektorainak milyen lineáris kombinációja a $\underline{b}$ vektor?
- Bontsuk fel a $\underline{b}$ vektort az $\boldsymbol{A}$ mátrix oszlopvektoraival párhuzamos komponensekre!
- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$