Vektoriális szorzás

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ 3D vektorok $\underline{a}\times\underline{b}$ egy 3D vektor

1) $\underline{a}\times\underline{b}\perp\underline{a}$ *és* $\underline{a}\times\underline{b}\perp\underline{b}$

2) $\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{a}\times\underline{b}$ jobbrendszert alkot

3) $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}|\sin\varphi$

Determináns fogalma: Kvadratikus mátrixokon értelmezett függvény.

Másodrendű determináns: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Harmadrendű determináns: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

n-ed rendű determináns: $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \cdots \pm a_{1n}A_{1n}$

Ha $\begin{array}{l} \underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} \\ \underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k} \end{array}$ akkor $\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Az $\begin{array}{l} \underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} \\ \underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} \end{array}$ vektorok által kifeszített paralelogramma (előjeles) területe:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Az $\begin{array}{l} \underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} \\ \underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k} \\ \underline{c} = c_1\underline{i} + c_2\underline{j} + c_3\underline{k} \end{array}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon (előjeles) térfogata:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c})$$

Ez a vegyes szorzat.

Determináns tulajdonságai:

1) Szomszédos sorok felcserélése előjelváltást eredményez.
2) Két sor felcserélése előjelváltást eredményez.
3) Ha van két egyforma sor, akkor a determináns zérus.
4) Ha van csupa 0-t tartalmazó sor, akkor a determináns zérus.

5) Ha egy sor számszorosát egy másik sorhoz hozzáadjuk, a determináns értéke nem változik.
6) Ha a főátló fölött (vagy alatt) csak 0 van, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata.
7) A transzponálás (főátlóra tükrözés) nem változtatja meg a determináns értékét.

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel:
Egy determináns bármely sora vagy oszlopa szerint kifejthető.
Determináns kiszámítása Gauss-Jordan algoritmussal.

Determináns ferde kifejtése:
A ferde kifejtés mindig zérus.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} - a_{i2}A_{j2} + \cdots \pm a_{in}A_{jn} = 0$$

Adjungált mátrix: Minden elem helyére beírjuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékét, majd transzponáljuk.

$$adj(\underline{\underline{A}}) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & \cdots & \pm A_{n1} \\ -A_{12} & A_{22} & & \\ \vdots & & & \\ \pm A_{1n} & \cdots & & \pm A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot adj(\underline{\underline{A}}) = adj(\underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \det(\underline{\underline{A}}) & 0 & 0 \\ 0 & \det(\underline{\underline{A}}) & 0 \\ 0 & 0 & \det(\underline{\underline{A}}) \end{bmatrix}$$

Következmény:
Ha $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0,\ akkor\ \underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{adj(\underline{\underline{A}})}{\det(\underline{\underline{A}})}$

Ha pedig $\det(\underline{\underline{A}}) = 0$, akkor nincs inverz.

Cramer szabály
Gabriel Cramer (1704-1752) svájci matematikus