Koordináta geometria

O jelöli az origót.

Pont megadása: Ha az $\overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ akkor $P(x, y, z)$

Egyenes megadása: Adott az egyenes egy $\underline{r}_0$ helyvektorú $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontja és egy irányvektora $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$, akkor az egyenes egy tetszőleges pontjába mutató $\underline{r}(x, y, z)$ vektor

$\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t$, azaz koordinátásan: $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$

Sík megadása: Adott a sík egy $\underline{r}_0$ helyvektorú $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontja és egy normálvektora $\underline{n}(n_1, n_2, n_3)$, akkor a sík egy tetszőleges pontjába mutató $\underline{r}(x, y, z)$ vektor kielégíti a következő egyenletet: $\underline{n}(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$, amely koordinátás alakban $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$.

Illeszkedési feladatok:

A $P(x_1, y_1, z_1) = \underline{r}_1$ pont rajta van az $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t$ egyenesen, ha van olyan *t*, amelyre $\underline{r}_1 = \underline{r}_0 + \underline{v}t$.

A $P(x_1, y_1, z_1) = \underline{r}_1$ pont rajta van az $\underline{n}(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$ egyenletű síkon, ha $\underline{n}(\underline{r}_1 - \underline{r}_0) = 0$.

Az $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t$ egyenes benne van az $\underline{n}(\underline{r} - \underline{r}_1) = 0$ síkban, ha $\underline{n}(\underline{r}_0 + \underline{v}t - \underline{r}_1) = 0$.

Metszési feladatok:

Egyenesek metszéspontja:

Az $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$ metszi az $\begin{cases} x = x_1 + w_1 t \\ y = y_1 + w_2 t \\ z = z_1 + w_3 t \end{cases}$ egyenest, ha van olyan t_1 *és* t_2, hogy

$$\begin{aligned} x_0 + v_1 t_1 &= x_1 + w_1 t_2 \\ y_0 + v_2 t_1 &= y_1 + w_2 t_2 \\ z_0 + v_3 t_1 &= z_1 + w_3 t_2 \end{aligned}$$

ellenkező esetben kitérők.

Egyenes és sík döféspontja:

Az $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t$ egyenes és az $\underline{n}(\underline{r} - \underline{r}_1) = 0$ sík döféspontját az a *t* skalár határozza meg, amely megoldása az $\underline{n}(\underline{r}_0 - \underline{v}t - \underline{r}_1) = 0$ elsőfokú egy ismeretlenes egyenletnek.

Térelemek távolsága:

Két pont távolsága:

A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok távolsága $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Pont és egyenes távolsága:

A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pont és az $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}t$ egyenes távolságának meghatározásához felírjuk a P_1 ponton átmenő és az egyenesre merőleges sík egyenletét, ami $v(\underline{r} - \underline{r}_1) = 0$. Kiszámítjuk a sík és egyenes P_2 döféspontját, majd a P_1 és P_2 pontok távolságát.

Pont és sík távolsága:

A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pont és az $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$ sík előjeles távolsága:

$$d = \frac{n_1(x_1 - x_0) + n_2(y_1 - y_0) + n_3(z_1 - z_0)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Két egyenes távolsága:

Legyen a két egyenes az $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$ és az $\begin{cases} x = x_1 + w_1 t \\ y = y_1 + w_2 t \\ z = z_1 + w_3 t \end{cases}$

Az $\underline{n} = \underline{v} \times \underline{w}$ normál transzverzális irányú vektor.

Az $\underline{n}(\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$ sík tartalmazza az első egyenest és ezzel párhuzamos a második egyenes. Ezért a két egyenes távolsága, azaz a normál transzverzális hossza, egyenlő a második egyenesnek az előbbi síktól való távolságával. A párhuzamosság miatt elég az egyenes egyetlen pontjának a síktól vett távolságát kiszámolni.

Egyenes és sík távolsága:

Csak párhuzamosság esetén érdekes, ekkor az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól vett távolságát számoljuk.

Síkok távolsága:

Csak párhuzamosság esetén érdekes, ekkor az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól vett távolságát számoljuk.

Hajlásszög:

Két egyenes hajlásszöge megegyezik az irányvektoraik szögével.

Egyenes és sík hajlásszöge az irányvektor és normálvektor pótszöge.

Két sík hajlásszöge a normálvektoraik szöge.