

- 1) Egy síkban vannak-e a következő vektorok:  $\underline{a}(5,-4,-1)$   $\underline{b}(-2,3,7)$   $\underline{c}(3,-1,6)$  ?
- 2) Függetlenek-e a következő vektorok:  $\underline{a}(1,0,0)$   $\underline{b}(1,1,0)$   $\underline{c}(1,1,1)$  ?
- 3) Adjunk meg olyan vektort, amely felezi az  $\underline{a}(1,2,3)$  és  $\underline{b}(2,3,1)$  vektorok szögét!
- 4) Adjunk meg olyan vektort, amely felezi az  $\underline{a}(3,4)$  és  $\underline{b}(5,12)$  vektorok szögét!
- 5) Adjunk meg olyan vektort, amely az origóból az  $A(3,4)$   $B(5,12)$  szakasz felezőpontjába mutat!
- 6) Adjunk meg olyan vektort, amely az origóból az  $A(3,4,5)$   $B(5,12,-1)$  szakasz felezőpontjába mutat!
- 7) Adjunk meg olyan vektort, amely az origóból az  $A(3,4)$   $B(6,17)$  szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontjába mutat!
- 8) Adjunk meg olyan vektort, amely az origóból az  $A(3,4,0)$   $B(9,8,4)$  szakasz B-hez közelebbi negyedelő pontjába mutat!
- 9) Merőleges-e egymásra a következő két vektor  $\underline{a}(5,-4,-11)$   $\underline{b}(-2,3,-2)$  ?
- 10) Mekkora szöget zár be egymással a következő két vektor  $\underline{a}(3,4)$  és  $\underline{b}(5,12)$ ?
- 11) Mekkora szöget zár be egymással a következő két vektor  $\underline{a}(2,1,3)$  és  $\underline{b}(5,2,1)$ ?
- 12) Határozza meg az  $\underline{a}(-4,12,3)$  vektor irányába mutató egységvektort!
- 13) Mekkora szöget zár be a koordinátatengelyek pozitív felével a  $\underline{v}(4,7,2)$  vektor?
- 14) Határozza meg az  $\underline{a}(4,-3,1)$  vektor vetületét a  $\underline{b}(-6,3,-2)$  vektor egyenesén!
- 15) Bontsa fel az  $\underline{a}(-2,11,-2)$  vektort a  $\underline{b}(-6,3,-2)$  vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre!
- 16) Bontsa fel a  $\underline{b}(-6,3,-2)$  vektort a  $\underline{k}(0,0,1)$  vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre!
- 17) Bontsa fel a  $\underline{k}(0,0,1)$  vektort a  $\underline{b}(-6,3,-2)$  vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre!
- 18) Tükrözze a  $\underline{d}(9,7,-19)$  vektort az  $\underline{e}(-7,11,4)$  vektor egyenesére!
- 19) Mekkora annak a hááromszögnek a területe, kerülete és mekkorák a szögei, amelyet az origóból induló  $\underline{a}(4,3,-7)$  és  $\underline{b}(5,2,6)$  vektorok feszítenek ki?
- 20) Számítsa ki az  $\underline{a}(1,2,3)$   $\underline{b}(4,5,6)$  és  $\underline{c}(7,8,10)$  vektorok által kifeszített tetraéder térfogatát!

21)

Legyen innen kezdve  $\underline{a} = 3\underline{i} + 12\underline{j} - 5\underline{k}$ ,  $\underline{b} = 4\underline{i} - 3\underline{k}$ ,  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ .

1. Határozza meg az  $5\underline{a}$ ,  $2\underline{a} + 3\underline{b}$ ,  $3\underline{a} - 2\underline{b}$ ,  $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ , vektorokat.
2. Számítsa ki az  $\underline{ab}$ ,  $\underline{ac}$ ,  $\underline{a}(\underline{b} + 2\underline{c})$  skaláris szorzatokat.
3. Határozza meg  $x$  értékét úgy, hogy a  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$  vektor merőleges legyen a  $\underline{d} = x\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$  vektorra.
4. Számítsa ki az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  és  $\underline{c}$  vektorok hosszát.
5. Számítsa ki az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$ , valamint az  $\underline{a}$  és  $\underline{c}$  vektorok szögét.
6. Határozza meg az  $\underline{e} = -\underline{i} + 6\underline{j} + 13\underline{k}$  vektornak a  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$  vektorra eső merőleges vetületét.
7. Határozza meg a  $\underline{j}$  vektornak a  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$  vektorra eső merőleges vetületét.
8. Határozza meg a  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$  vektornak az  $\underline{e} = -\underline{i} + 6\underline{j} + 13\underline{k}$  vektorra eső merőleges vetületét.
9. Határozza meg az  $\underline{a} + \underline{b}$  vektornak a  $\underline{k}$  vektorra eső merőleges vetületét.
10. Bontsa fel az  $\underline{f} = 4\underline{i} + 7\underline{j} + 6\underline{k}$  vektort a  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$  vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre.
11. Bontsa fel az  $\underline{g} = \underline{i} - 10\underline{j} - 11\underline{k}$  vektort a  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$  vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre.
12. Bontsa fel a  $\underline{h} = 10\underline{i} + 24\underline{j} - 13\underline{k}$  vektort az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  vektorokkal párhuzamos komponensekre.
13. Bontsa fel a  $\underline{h} = 15\underline{i} + 39\underline{j} - 15\underline{k}$  vektort az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  vektorokkal párhuzamos komponensekre.
14. Számítsa ki az  $\underline{a}_1 = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$  és  $\underline{a}_2 = 4\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$  vektorok vektoriális szorzatát.

15. Határozza meg az  $\underline{a}_3 = 2\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$  és  $\underline{a}_4 = 5\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területét.

16. Határozza meg az  $\underline{a}_5 = 2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$  és  $\underline{a}_6 = 4\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$  vektorok által kifeszített háromszög területét.

17. Határozza meg annak a háromszögnek a területét, amelynek az origóból a csúcaiba mutató vektorok  $\underline{A} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ ,  $\underline{B} = 3\underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$ ,  $\underline{C} = 5\underline{i} + 3\underline{k}$ .

18. Egy háromszög csúcaiba mutató vektorok  $\underline{A} = 5\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$ ,  $\underline{B} = 3\underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$ , és  $\underline{C} = 7\underline{i} + 15\underline{j} + 3\underline{k}$ .

Határozza meg az AB oldal felezőpontjába mutató vektort.

Határozza meg a súlypontba mutató vektort.

Határozza meg a C pontból induló magasság talppontját.

Határozza meg az AC oldal merőleges vetületét az AB oldalon.

19. Egy síkban vannak-e az  $\underline{a} = 3\underline{i} + 12\underline{j} - 5\underline{k}$ ,  $\underline{b} = 4\underline{i} - 3\underline{k}$ ,  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$  és  $\underline{d}_1 = -5\underline{i} + 39\underline{j}$  vektorok végpontjai.

20. Egy síkban vannak-e az  $\underline{a} = 3\underline{i} + 12\underline{j} - 5\underline{k}$ ,  $\underline{b} = 4\underline{i} - 3\underline{k}$ ,  $\underline{c} = -2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$  és  $\underline{d}_1 = 5\underline{i} - 39\underline{j} + \underline{k}$  vektorok végpontjai.

21. Legyen  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$  és  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Határozza meg  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ,  $3\mathbf{A}$ ,  $3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$  mátrixokat.

22. Legyen  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$  és  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ .

Határozza meg a  $\mathbf{C} + \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C} - 2\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{CD}$ ,  $\mathbf{DC}$ ,  $\mathbf{CDE}$  mátrixokat.

23. Végezze el az alábbi műveleteket, ha lehet

$\mathbf{AC}$ ,  $\mathbf{AD}$ ,  $\mathbf{EA}$ ,  $\mathbf{BA}$ ,  $\mathbf{C(B+A)}$ ,  $\mathbf{A(B+C)}$ ,  $\mathbf{C}^2$ ,  $\mathbf{CC}^T$ ,  $\mathbf{CA}^T$ ,  $\mathbf{E}^2$ .

ahol  $\mathbf{A}^T$  az  $\mathbf{A}$  mátrix transzponáltja.

24. Legyen  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  és  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Határozza meg az  $\mathbf{FG} - \mathbf{GF}$  mátrixot.

25. Legyen  $\underline{a}^T = [4 \ 1 \ 3]$ , Határozza meg az  $\underline{a}^T \underline{a}$  és  $\underline{a} \underline{a}^T$  szorzatokat.

26. Legyen  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Számítsa ki az  $\underline{a}^T \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \underline{a}$ , valamint  $\underline{a}^T \mathbf{H} \underline{a}$  szorzatokat.

27. Legyen  $\underline{x}^T = [x \ y \ z]$ . Számítsa ki az  $\underline{x}^T \mathbf{H} \underline{x}$  szorzatot.

28. Legyen  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$  és  $\underline{x} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$ .

Kiszámítandó  $\mathbf{T}^2$ ,  $\mathbf{T}^n$ ,  $\mathbf{T} \underline{x}$ ,  $\underline{x}^T \mathbf{T} \underline{x}$ ,  $\mathbf{T}^2 \underline{x}$ ,  $\underline{x}^T \mathbf{T}^2 \underline{x}$  szorzatok.

29. Legyen  $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

Kiszámítandó  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{R} \underline{x}$ ,  $\underline{x}^T \mathbf{R} \underline{x}$ ,  $\mathbf{R}^2 \underline{x}$ ,  $\underline{x}^T \mathbf{R}^2 \underline{x}$ ,  $\underline{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \underline{x}$  szorzatok.

30. Van-e olyan null mátrixtól különböző négyzetes mátrix, amelynek a négyzete null mátrix?

31. Mutassa meg, hogy az  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$  mátrixhoz található olyan  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  másodrendű négyzetes mátrix, hogy  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  null mátrix.

32. Egy  $\mathbf{A}$  mátrix szimmetrikus, ha  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  és antiszimmetrikus, ha  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ . Bizonyítandó, hogy minden négyzetes mátrix előállítható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

33. Igazolja, hogy ha  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  mátrixok összeszorozhatók, akkor  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ .

34. határozza meg az alábbi mátrixok inverzét, ha létezik:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

35) Számítsa ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$