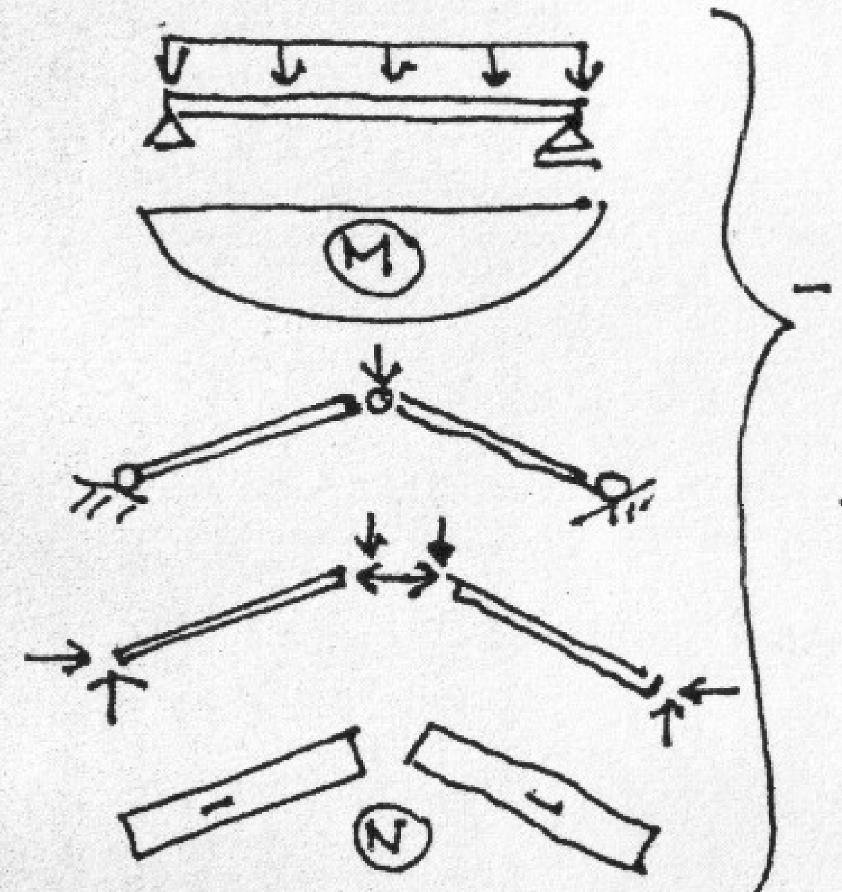
SZILÁRDSÁGTAN I.

1. Célkitűzések és alapfogalmak

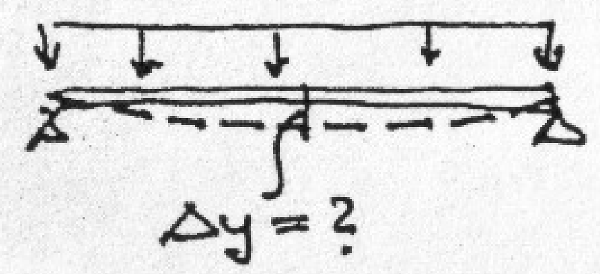
1.1. Szerkezetek modellezése

Statika → merev testekből álló szerkezetek
↳ közelítés, mely bizonyos esetekben elfogadható:

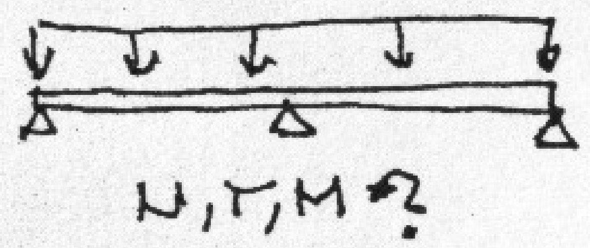


– Statikailag határozott szerkezetek kapcsolati- és belsőerőinek számítása (A)

Más feladatok megoldására alkalmatlan:

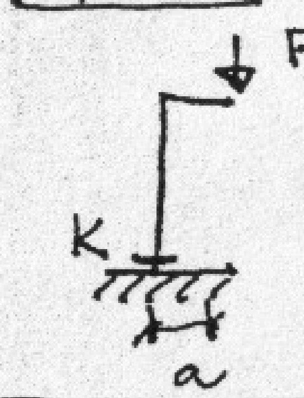


– stat. hat. szerk. elmozdulásainak számítása (B)

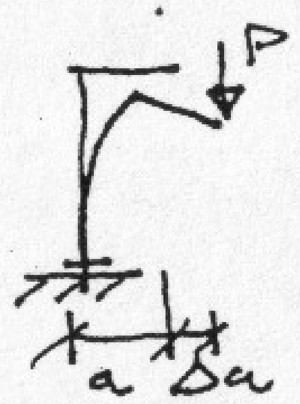


– Stat. határozatlan szerkezetek kapcsolati- és belsőerőinek számítása (C)

Előfordulhat, hogy (A) típusú feladat esetén a biztonság rovására közelít a modell:



$M_{K(STATIKA)} = P a$



$M_{K(VALÓSÁG)} = P(a+\Delta a) > M_{K(STAT)}$ (A*)

Célunk a modell finomítása annak érdekében, hogy (B) és (C) típusú feladatokat is meg tudjuk oldani, és az (A*) típusú feladatnál korrigálni tudjuk az elemi statikai számítást.

1.2. Alapfogalmak intuitív bevezetése

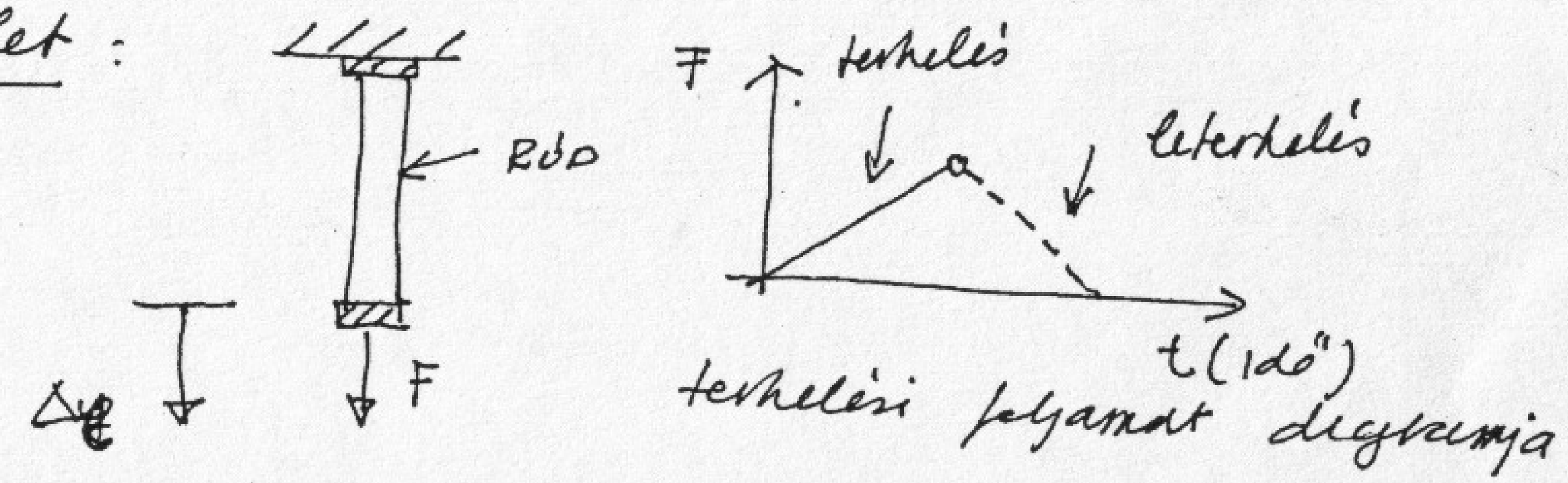
→ (matematikailag nem precíz, intuícióra hagyatkozó)

Merev test helyett → Szilárd test

Merev: alakját erő hatására nem változtatja

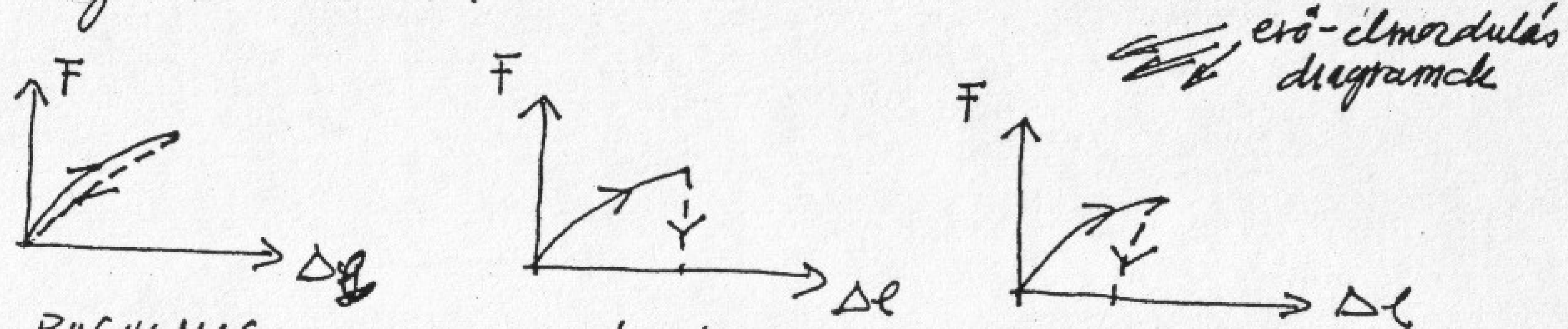
Szilárd: van alakja, de az erő hatására megváltozik ⟷ nem szilárd: folyékony, gáznemű

Kísérlet:



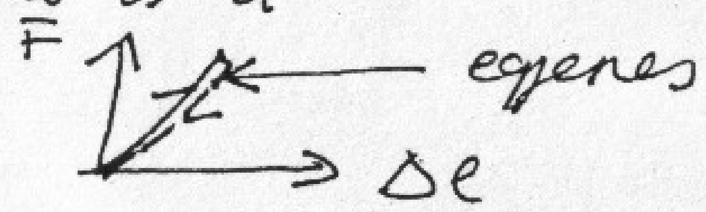
terhelési folyamat diagramja

A szilárd testet típusokba soroljuk az F – Δℓ diagram szerint:



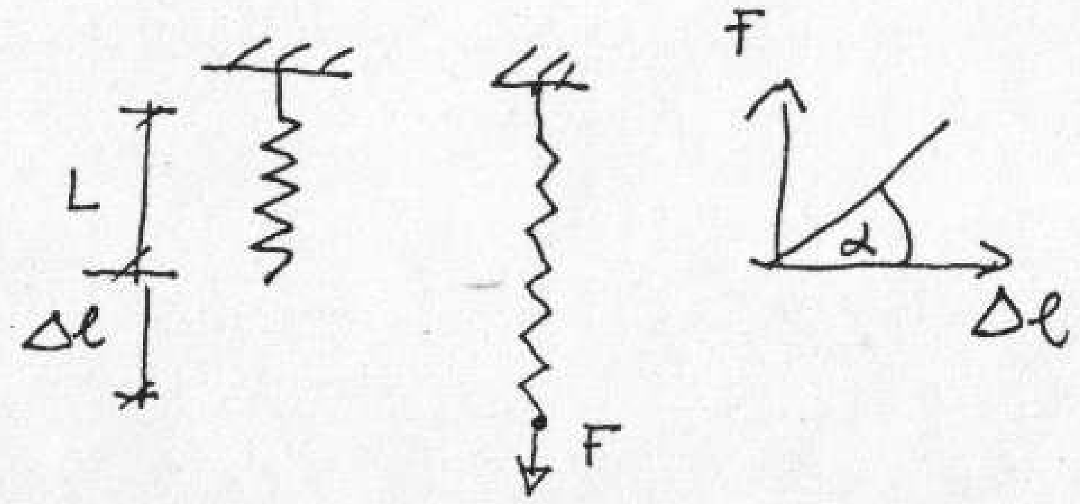
RUGALMAS: az erőhatás megszűntével a deformáció megszűnik — KÉPLÉKENY: megmarad — RUG-KÉPL.: részben megmarad

Egyelőre ezzel foglalkozunk, ezen belül is a LINEÁRISAN RUGALMAS testekkel:



Probléma: Az F – Δℓ diagram nem az anyagra, hanem a testre jellemző. Célunk a rúd hosszának és keresztmetszeti területének kiküszöbölése.

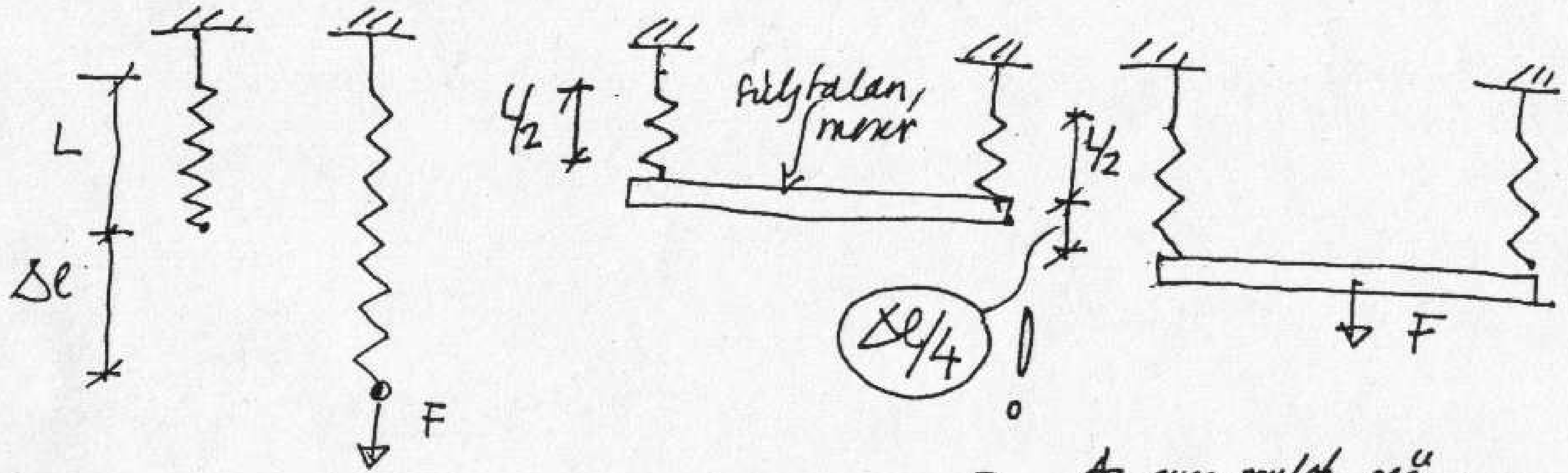
Modell ⇒ lineáris rugó (átmenetileg)



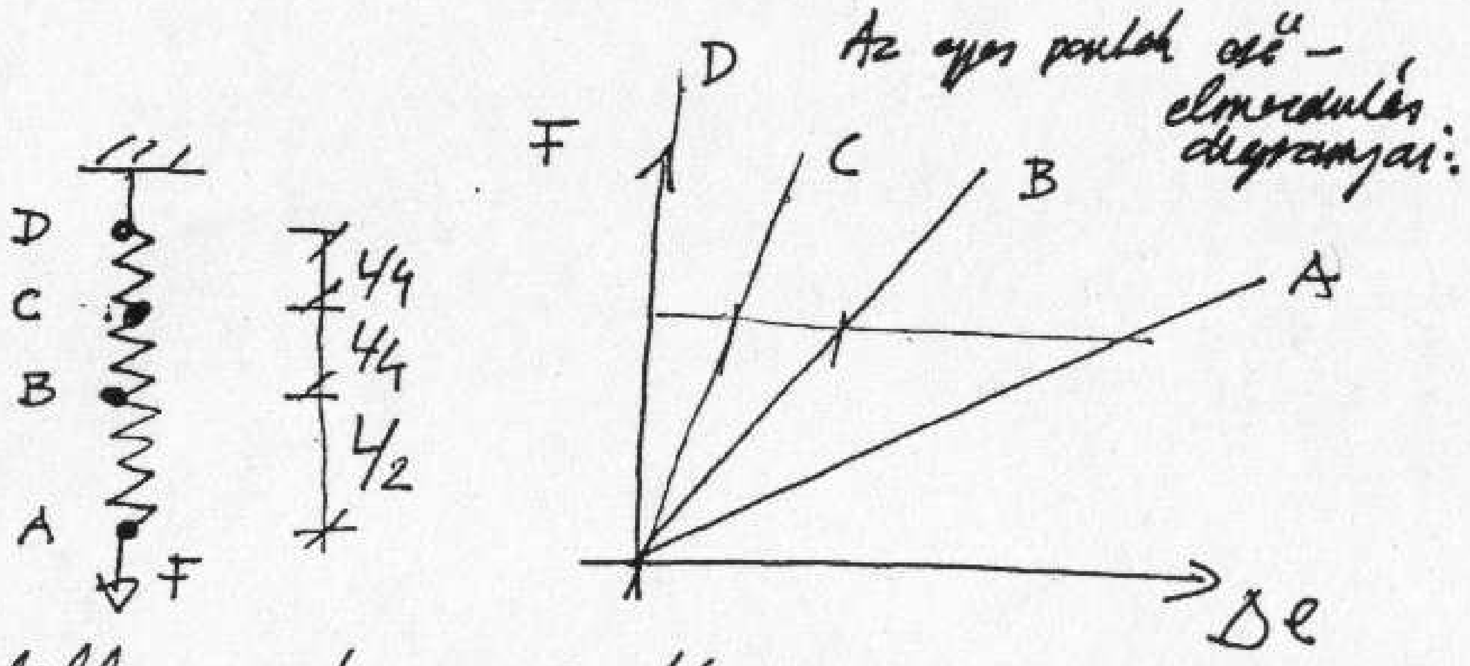
$c = \operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{\Delta l}$ $F = c\Delta l$ $\Delta l = \frac{F}{c}$

rugómerevség → az az „erő", amelynek hatására 1 cm-rel nyúlik meg a rugó $[c] = [kN/cm]$

Hogyan függ „c" a rugó hosszától?



Megvalósítás:



Tehát a rövidebb rugó merevebb.

A rugó anyagára az u.n. fajlagos rugómerevség jellemző:

$\bar{c} = c\ell$ $c = \frac{\bar{c}}{\ell}$ $[\bar{c}] = [kN]$

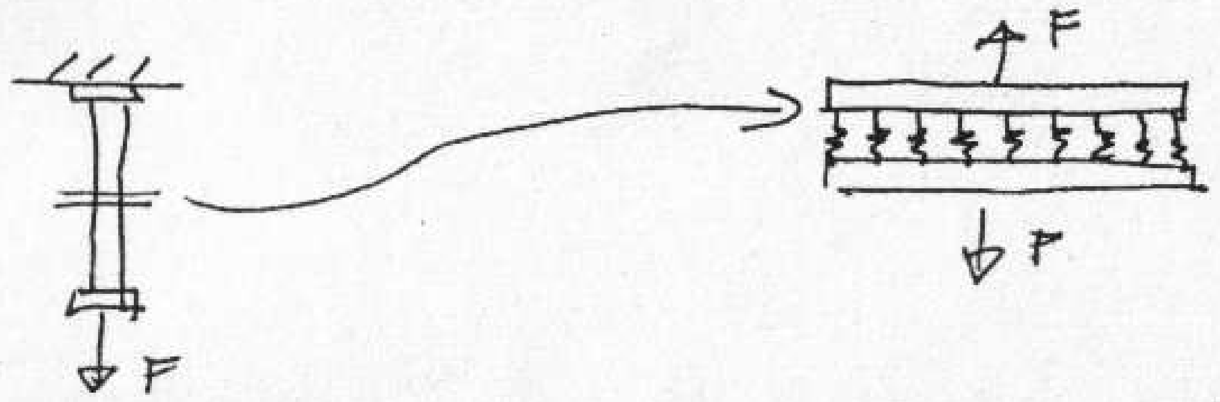
↳ az az erő, melynek hatására a rugó kétszeresére nyúlik. $\bar{c}$-ből tetszőleges konkrét rugó merevsége kiszámítható.

$$F = c\Delta l = \frac{\bar{c}}{\ell}\Delta l = \bar{c}\,\frac{\Delta l}{\ell} = \bar{c}\varepsilon$$

Fajlagos merevség — Fajlagos megnyúlás $[\varepsilon] = [\ ]$

Ezzel a rúd hosszát kiküszöböltük.

Tekintsünk egy véges rudat:



A rudat „elemi szálak" halmazaként képzelhetjük el. Minden szál egy lin. rugó.

$$F = c\Delta l = \bar{c}\varepsilon$$

A keresztmetszet területének kiküszöbölése:

Feltételezzük, hogy az elemi szálak azonos módon nyúlnak meg.

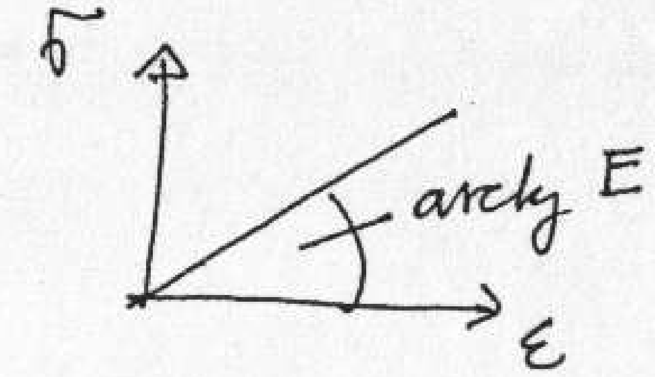
$$F = \bar{c}\varepsilon$$

$$\frac{F}{A} = \frac{\bar{c}}{A}\varepsilon$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

FESZÜLTSÉG $[\sigma] = [kN/cm^2]$

RUGALMASSÁGI MODULUS (Young-modulus, Navier (1785-1836)) $[E] = [kN/cm^2]$

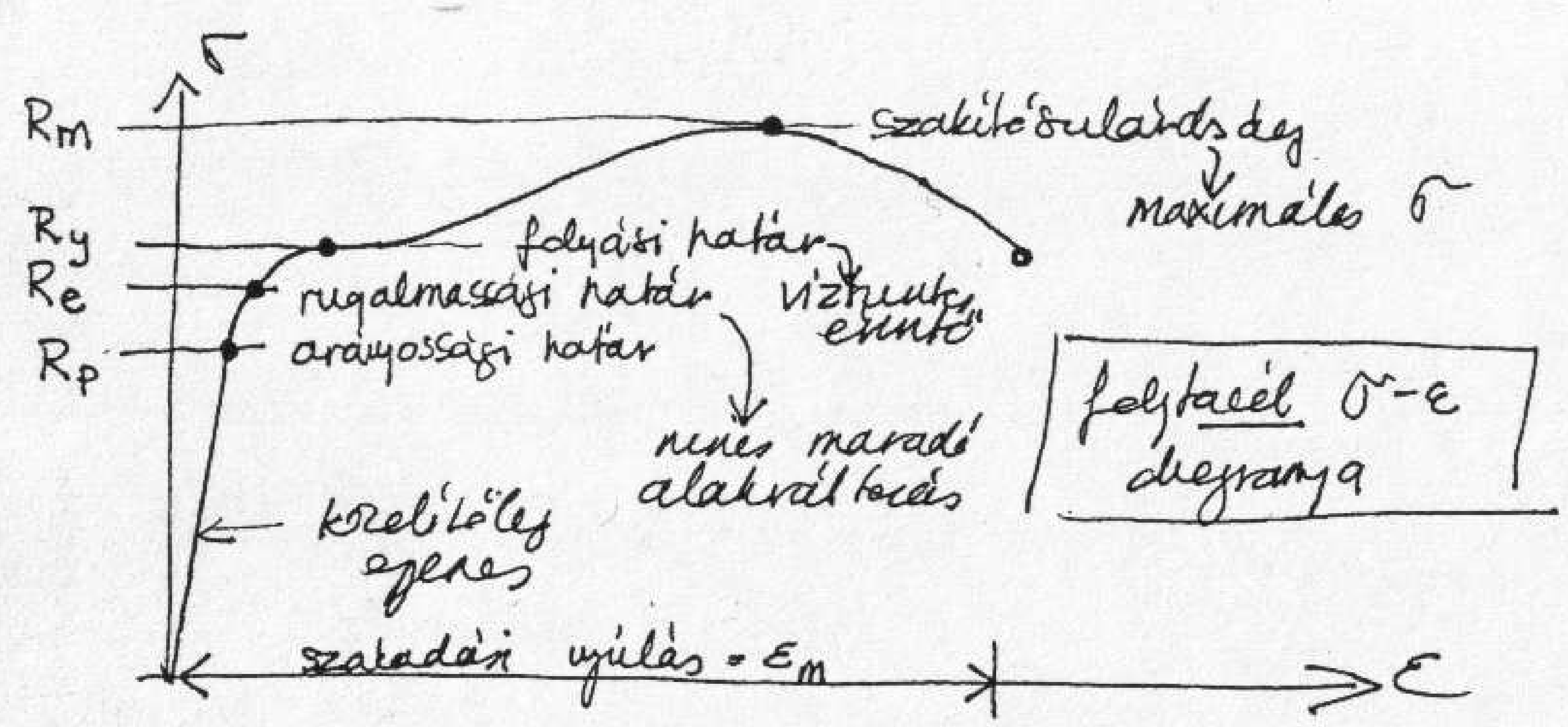


Ez már anyagra jellemző diagram! Egyetlen számadattal (E) jellemezhetünk egy (lin. rug.) anyagot. (pl. $E_{acél} = 20600\ kN/cm^2$)

13. Az anyagegyenlet és a σ-ε diagram

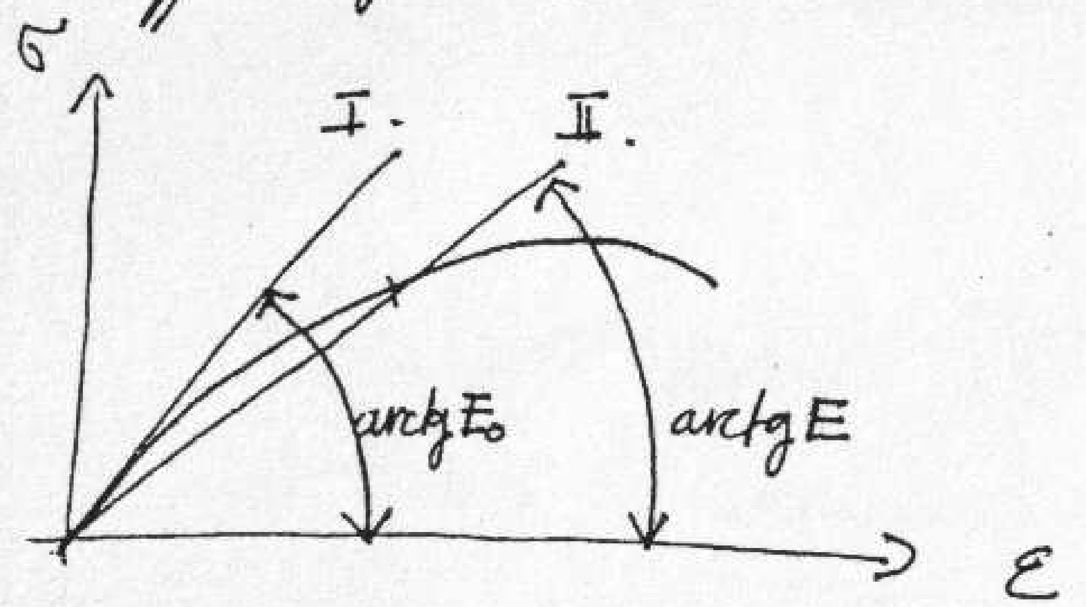
A $\sigma = E\varepsilon$ összefüggést nevezzük Hooke-törvénynek (Robert Hooke, 1653–1703, geometria professzor, Anglia). Nevével ellentétben ez egy axióma, amely valós anyagokra csak korlátozott tartományban és közelítőleg teljesül. A $\sigma-\varepsilon$ összefüggést más axiómával is leírhatjuk. (pl. képlékeny viselkedés → később) A $\sigma-\varepsilon$ összefüggést leíró axiómát anyagegyenletnek vagy anyagtörvénynek szokták nevezni.

Valóságos anyagok σ–ε diagramja zárt alakban ($\sigma = f(\varepsilon)$) nem adható meg, az ilyen kísérleti diagramokat nevezetes pontjaival írjuk le:



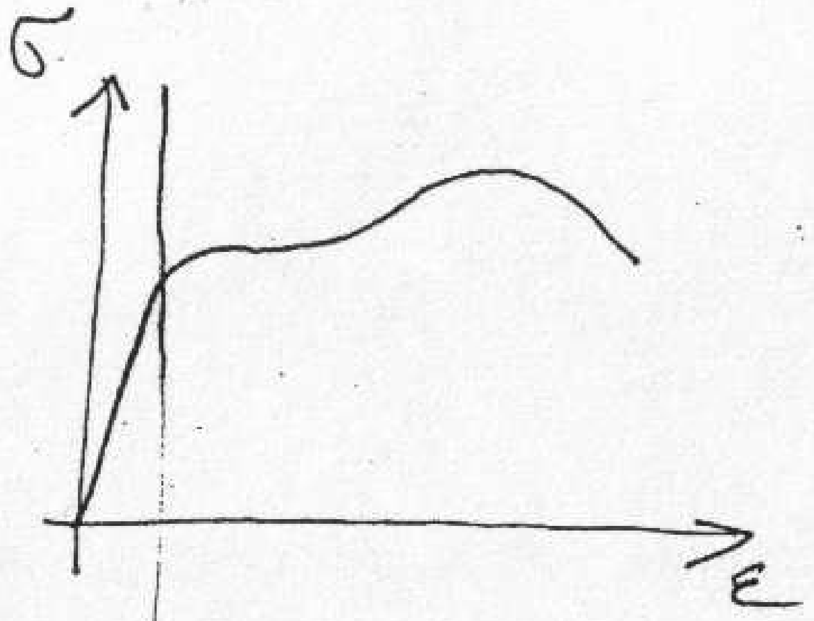
A Hooke-törvényt jó közelítéssel az R_p arányossági határig lehet használni.

Más anyagoknál kevésbé egyértelmű a helyzet.
Pl. egy tömeges beton esetén:

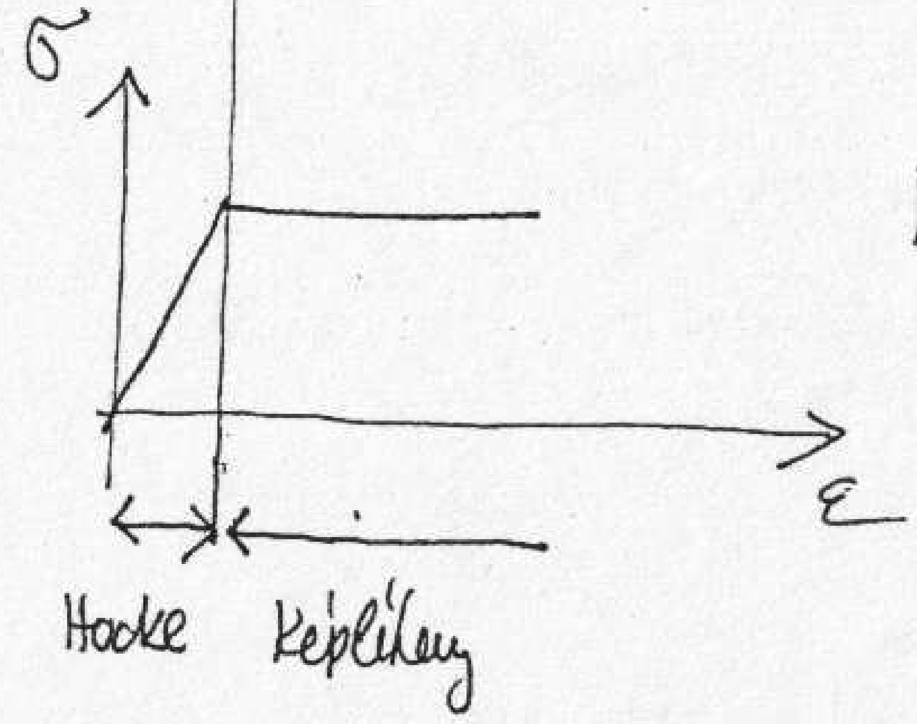


Az 1. egyeneshez tartozó E_0 kezdeti rug. modulus csak nagyon rövid szakaszon közelíti jól az anyag viselkedését. Nagyobb intervallumban kapunk jó közelítést, ha a húrhoz (II. egyenes) tartozó rug. modulust (E) használjuk.

A szerkezeti anyagok σ–ε diagramját más-más tartományban más-más anyagegyenlettel közelíthetjük. Pl: acél



Valóság

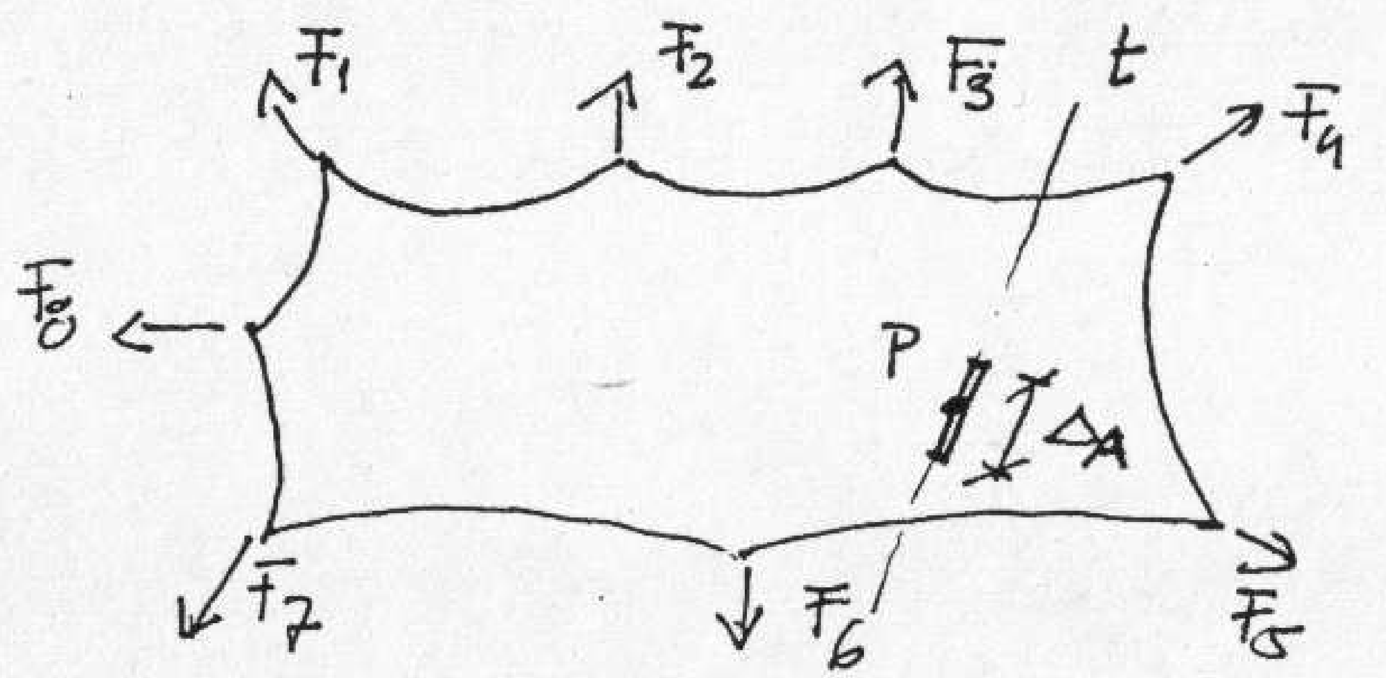


Közelítés (modell)

1.4. A feszültség általános meghatározása

Az eddigiekben használt feszültség-fogalom nem eléggé általános, hiszen feltételeztük, hogy a feszültségek egyenletesen oszlanak el a rúd keresztmetszetében, és más – hallgatólagos – közelítéseket is tettünk.

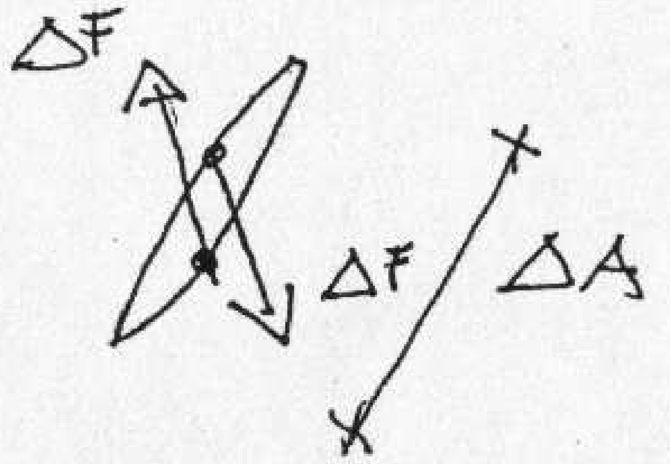
Tekintsünk egy tetszőleges testet, az egyensúly kedvéért legyen 2 dimenziós (pl. gumi lepedő) és terheljük egyensúlyi erőrendszerrel:
(A testet egységnyi vastagságúnak képzeljük)



$\sum F_i = 0$

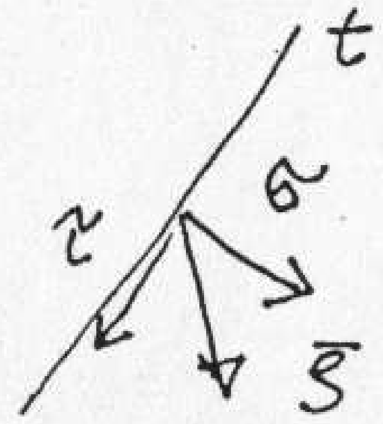
$\sum M = 0$

Messzünk bele a testbe egy választott P pontban egy választott t tengely mentén, ΔA nagyságban. A metszet szélei eltávolodnak egymástól, ennek megszüntetéséhez ΔF erőre van szükség:



A tapasztalat azt mutatja, hogy ha $\Delta A \to 0$, akkor $\Delta F \to 0$, de $\frac{\Delta F}{\Delta A} \to \bar{\rho}$ ("ro"), vagyis a hányados határértéke nem zérus. Ezt a (vektor!) határértéket nevezzük a P pontban, a t vágású metszeten ébredő feszültségnek. $[\rho] = \left[\frac{kN}{cm^2}\right]$

A $\bar{\rho}$ feszültséget – mint vektorokat általában – komponensekre bonthatjuk. Nevezetesen a t-vel ∥ komponenst τ ("tau")-nak, a ⊥ komponenst σ ("szigma")-nak nevezzük:



$\tau \to$ "nyírófeszültség"

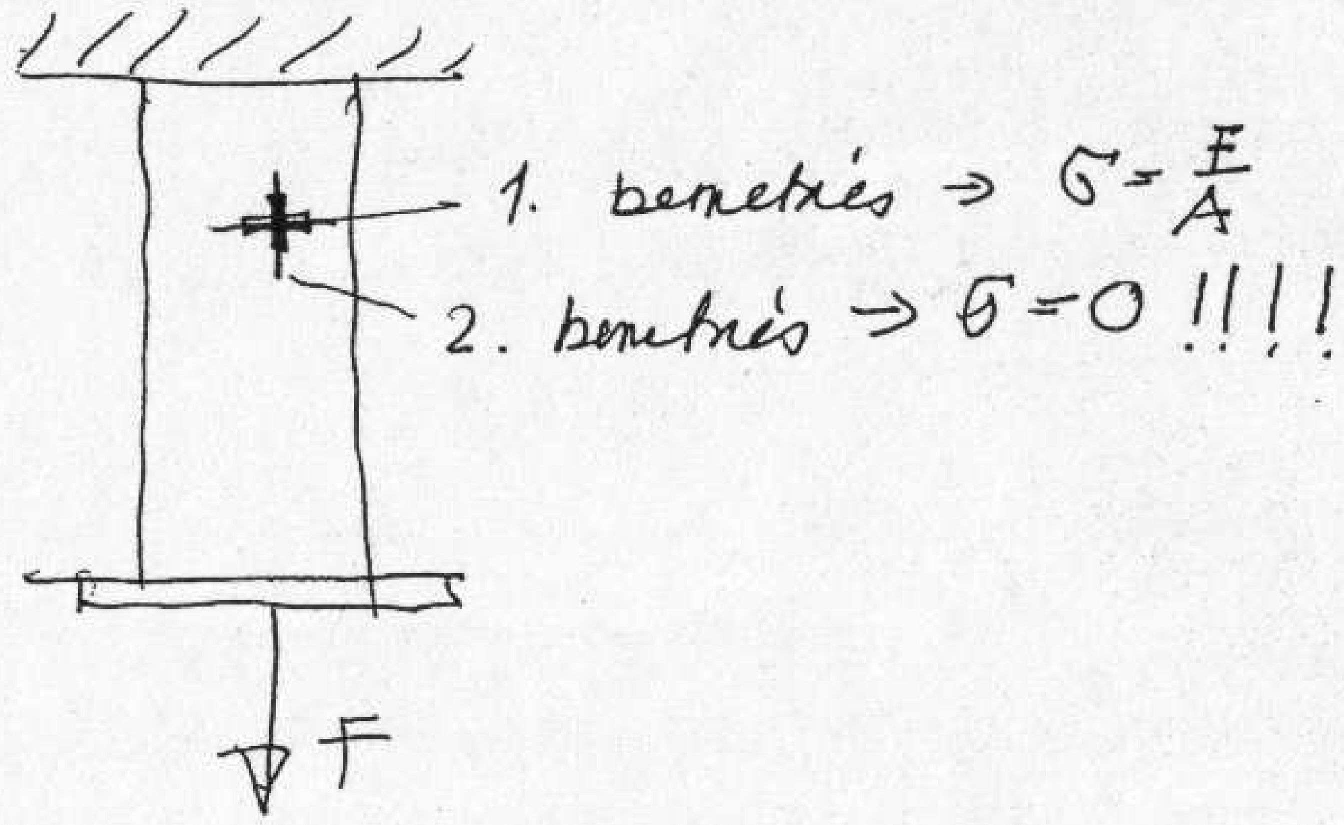
$\sigma \to$ "normálfeszültség"

Megjegyzések a feszültség-definícióhoz:

1) A definíció 3D esetben teljesen analóg, csak nehezebben szemléltethető.

2) Vegyük észre, hogy ρ a P pont helyzetétől és a t vágástól egyaránt függ. Egy pontot az ott áthaladó összes vágáshoz tartozó ρ feszültségek megadásával lehet jellemezni. Ennek legegyszerűbb módja egy $\rho(\underline{n})$ függvény megadása, ahol $\underline{n}$ a t vágást jellemző egységnyi normál-vektor. A későbbiekben részletesen tárgyaljuk ezt a függvényt.

3) A 2) megjegyzést jól illusztrálhatjuk a már vizsgált, központosan húzott rúd példáján:



Kitérő

Síkbeli feszültség-állapot

A 2) megjegyzés szerint a sík egy pontját egy $\underline{\rho}(\underline{n})$ függvénnyel lehet jellemezni, ahol

és $\underline{n} \rightarrow$ a vizsgált vágás (egység) normálisa

$\underline{\rho} \rightarrow$ a vizsgált vágási metszeten ébredő feszültség

A $\underline{\rho}(\underline{n})$ függvény vektor – vektor függvény, ennek legegyszerűbb típusa a homogén lineáris v–v fv.

2 dimenzióban ez így néz ki

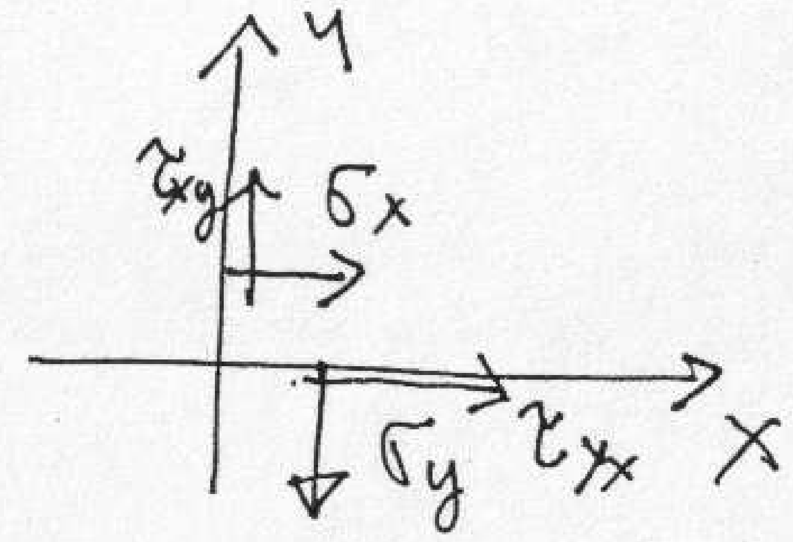
$\underline{a} = \underline{\underline{T}}\,\underline{b}$ → homogén lin. v–v fv. → $\boxed{\text{TENZOR}}$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\text{tenzor mátrixa}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_1 &= t_{11} b_1 + t_{12} b_2 \\ a_2 &= t_{21} b_1 + t_{22} b_2 \end{aligned}$$

Hasonlóan a vektorhoz a tenzor is megadható koordinátákkal, a tenzor koordinátái egy mátrixban írhatók le. Ha megváltoztatjuk a koordináta-rendszert, akkor (a vektor koordinátáihoz hasonlóan) a tenzor mátrixa is változik, a fizikai tartalom azonban ugyanaz marad.

A feszültségi tenzor az [xy] koordináta-rendszerben a következő mátrixszal rendelkezik:

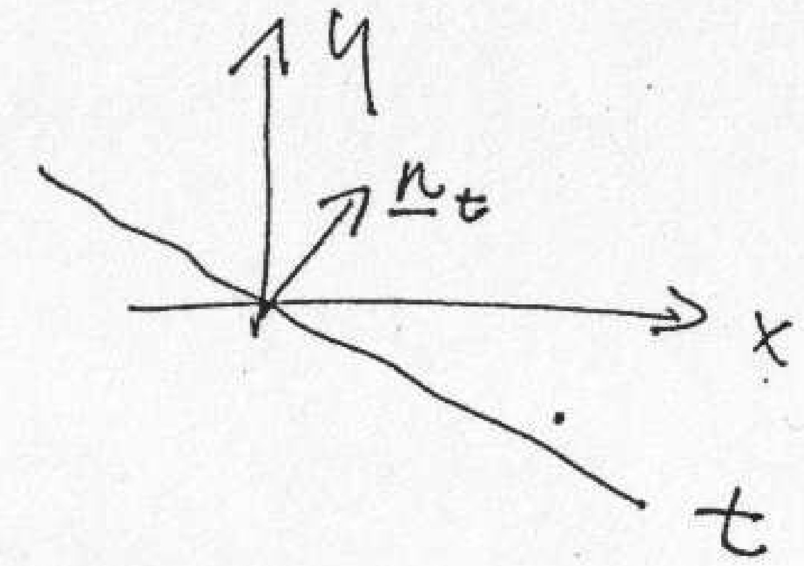
$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$



ahol σ_x, σ_y az x ill. y normálisú metszeten ébredő normálfeszültségek, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ pedig a nyírófeszültség.

Ezek szerint ha bármely, egymásra ⊥ 2 metszeten ismertek a feszültségek, akkor tetszőleges vágásban ki tudom számítani:

$$\underline{\rho}_t = \underline{\underline{T}}\,\underline{n}_t$$



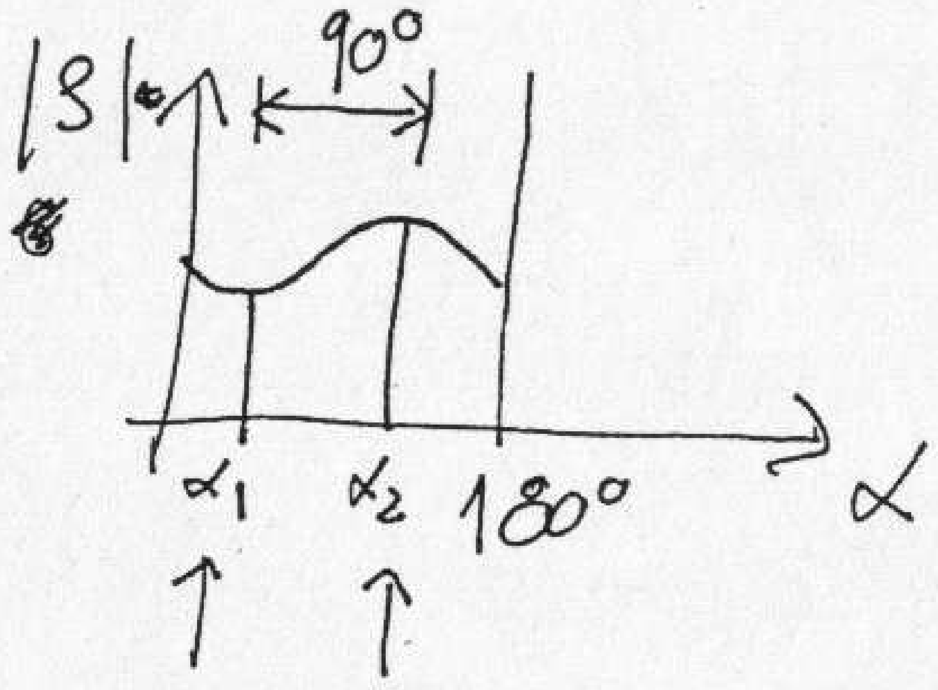
$|\underline{n}_t| = 1$

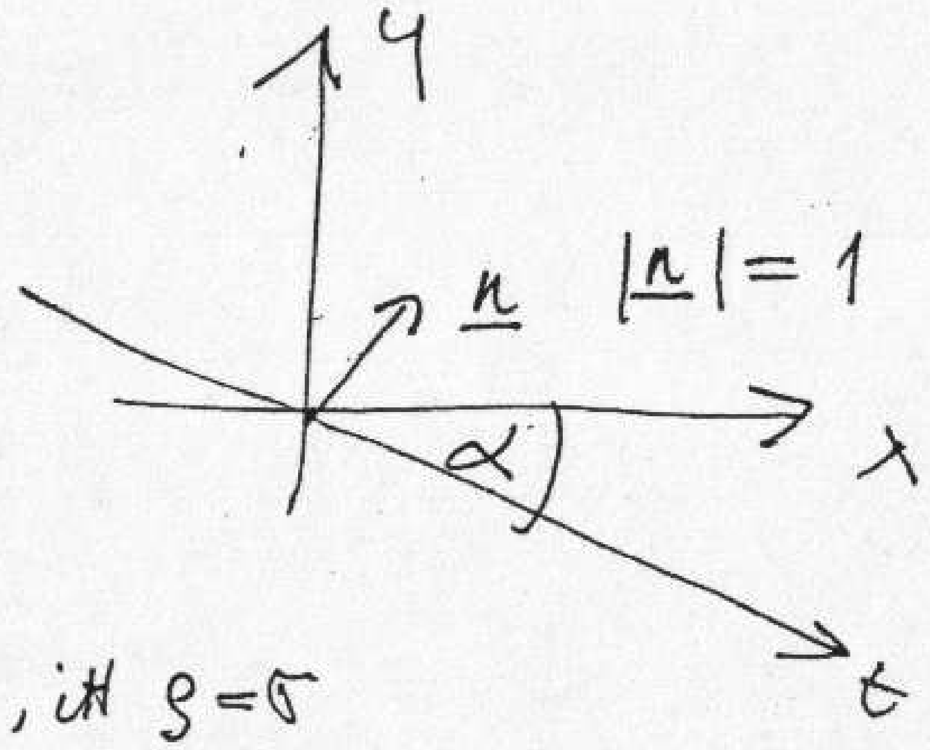
A $\underline{\underline{T}}$ tenzor tulajdonságai

Minden tenzor rendelkezik főirányokkal.

A főirányba eső bemenő ($\underline{n}$) vektorhoz tartozó kimenő ($\underline{\rho}$) vektor egymással párhuzamos, vagyis ezekben az irányokban a tenzor nem forgat csak nyújt/zsugorít.

A főirányba eső kimenő ($\underline{\rho}$) vektorok abszolút értéke a legkisebb ill. legnagyobb.



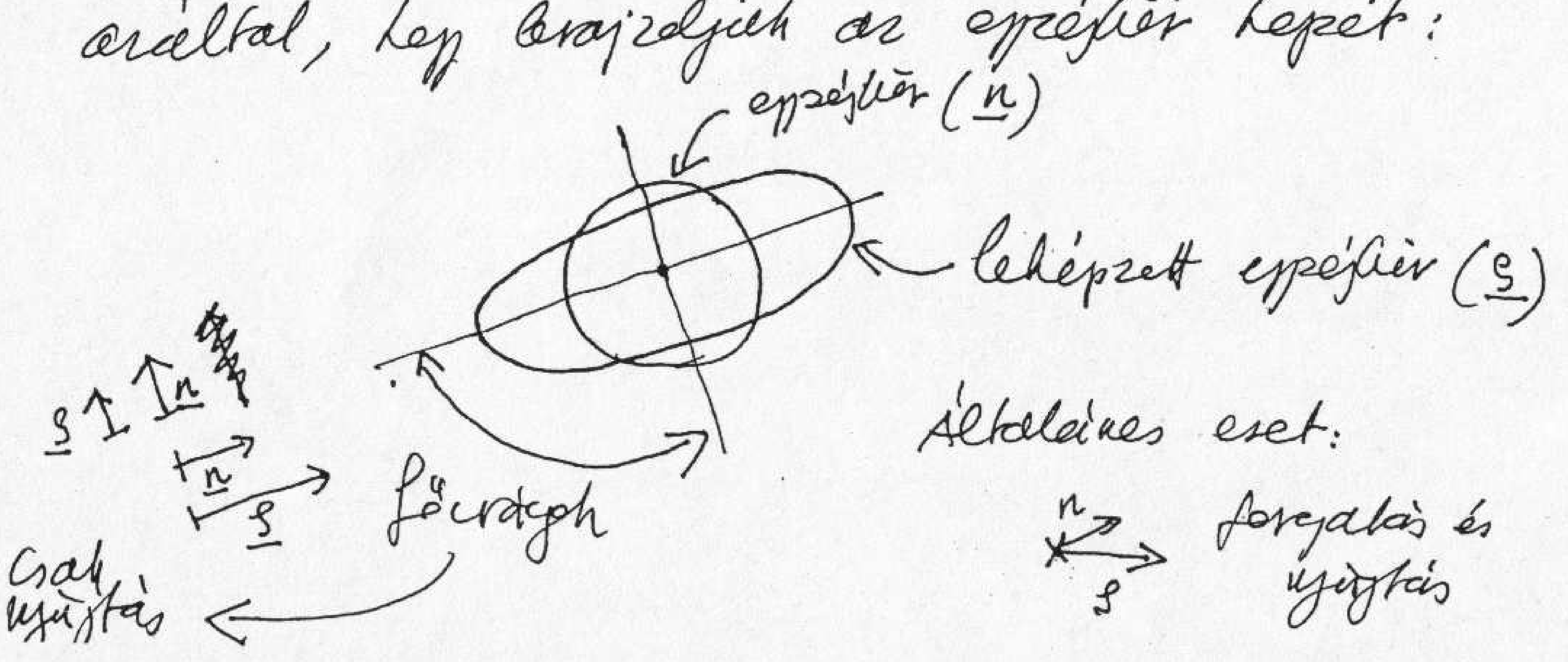


FŐIRÁNYOKAT kijelölő szögek, itt $\rho = \sigma$

A korábbiak szerint a főirányokban $\tau_{xy} = 0$ és $|\sigma|$ a szélső értékeket veszi fel.

A szélsőértékek közül a nagyobbat σ_1-nek, a kisebbet σ_2-nek nevezzük.

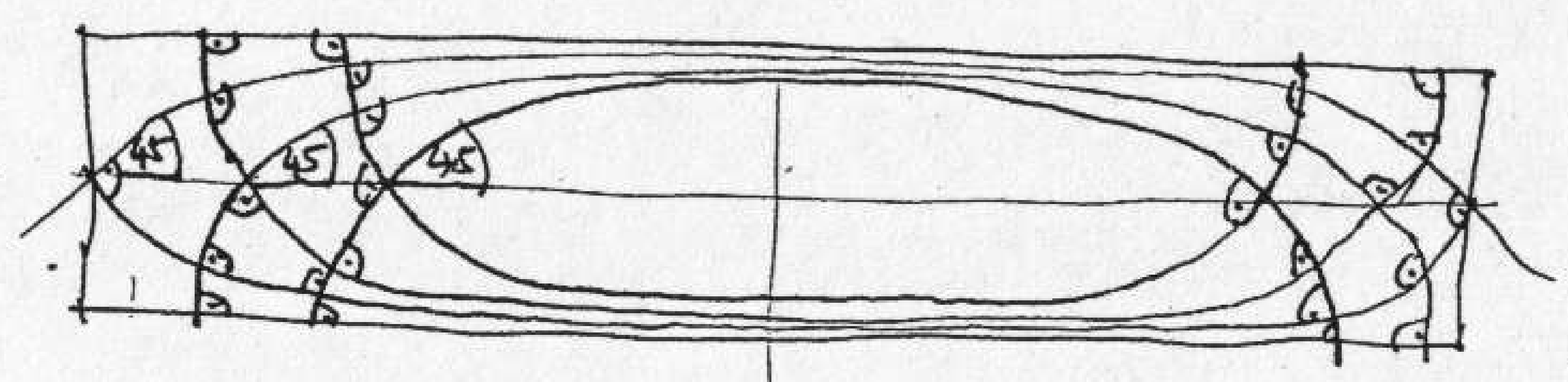
A tenzor működése szemléltethető azáltal, hogy berajzoljuk az egységkör képét:



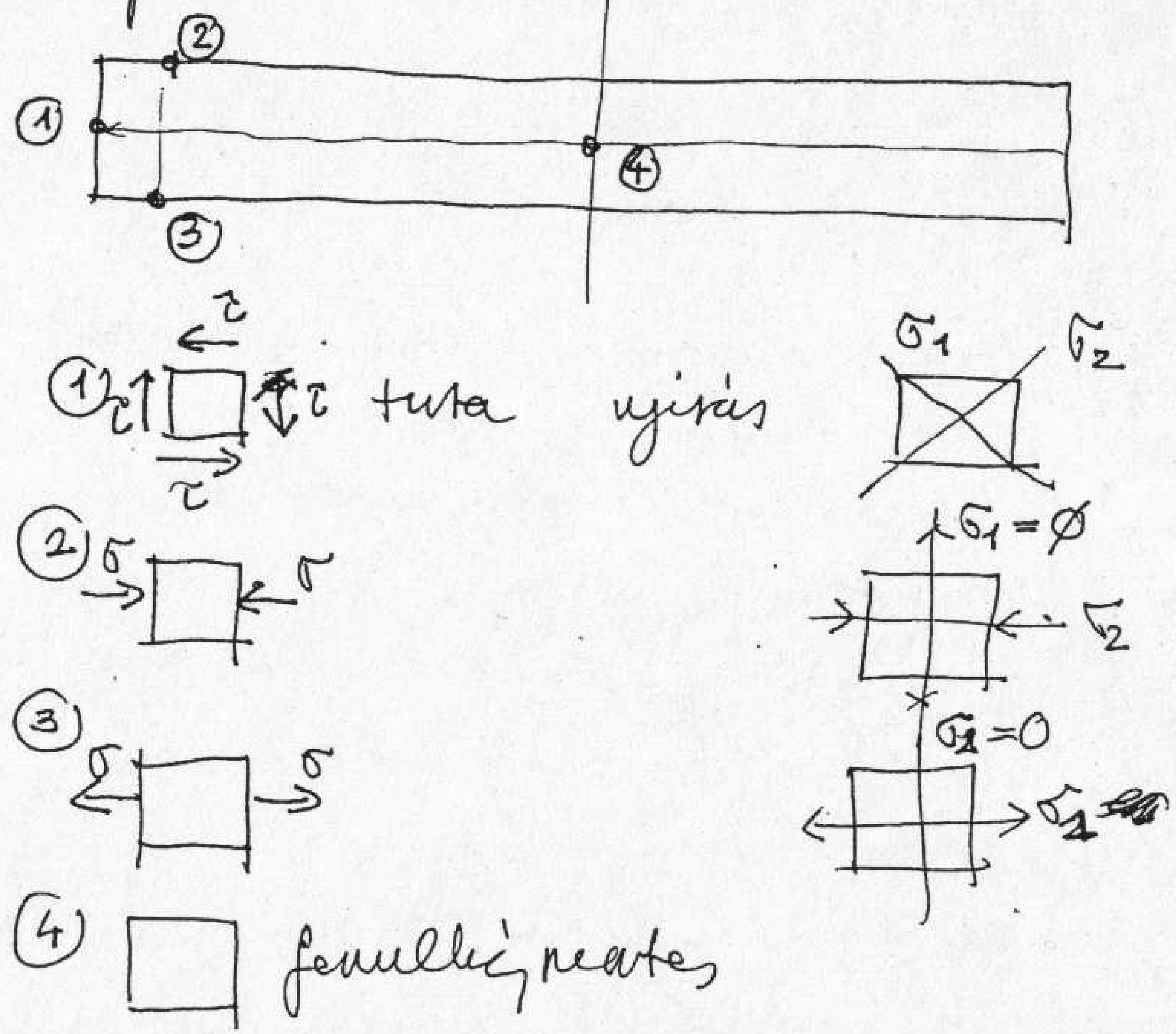
A főfeszültségek segítségével szemléltethető az anyagban keletkező legnagyobb igénybevétel.

Azokat a görbéket, melyeknek a főirányok az érintői, főfeszültségi trajektóriáknak nevezzük.

Egyenletes teherrel terhelt gerendatartó esetén pl. így néznek ki:



Spec. pontok:



2. Feszültségek számítása a rúdmodellben

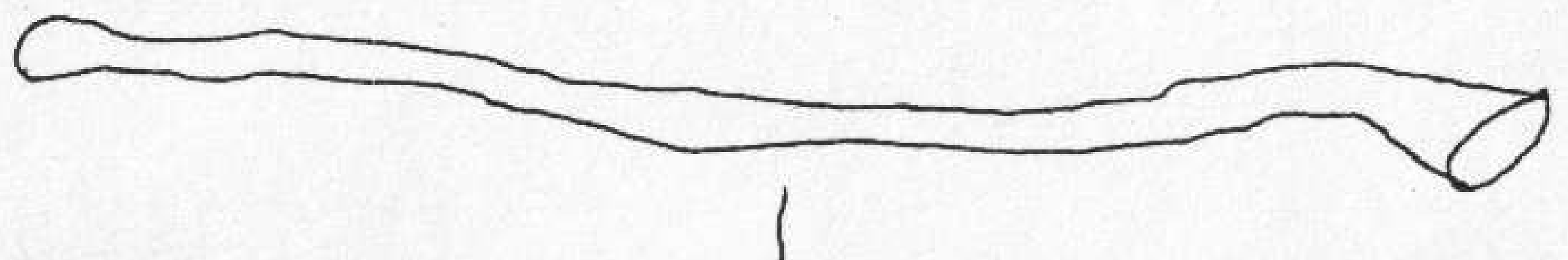
2.1. A rúdmodell

A feszültségek meghatározása egy általános test belsejében igen nehéz feladat, ezzel a kontinuummechanika foglalkozik.

Céljainknak -egyelőre- egy jóval egyszerűbb eset vizsgálata is megfelel.

RÚD → olyan test, melynek 2 mérete elhanyagolható a harmadik mellett

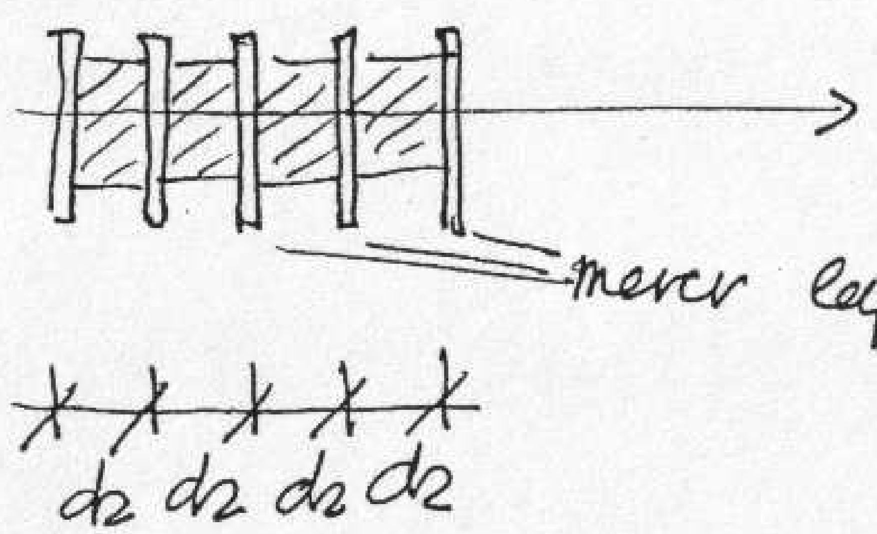
helyett



RÚDMODELL

MEREV lapok sorozata, közöttük "tetszőlegesen vékony" vékony rugalmas anyag

SÍKBELI ESET:

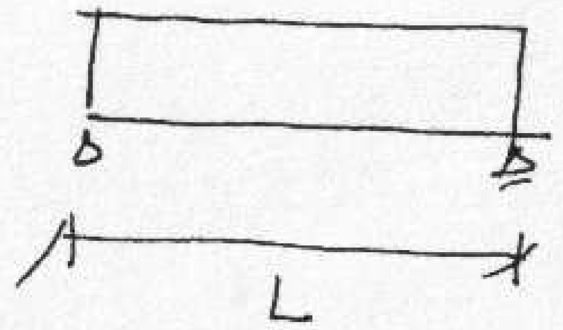


merev lapok → ez a feltételezés azzal egyenértékű, hogy a rúdtengelyre merőleges metszetek síkok maradnak deformáció után is

→ BERNOULLI–NAVIER hipotézis

A B–N hipotézis (a Hooke-törvényhez hasonlóan) axióma, amely bizonyos határok között jól közelíti a kísérleti méréseket

geometria:

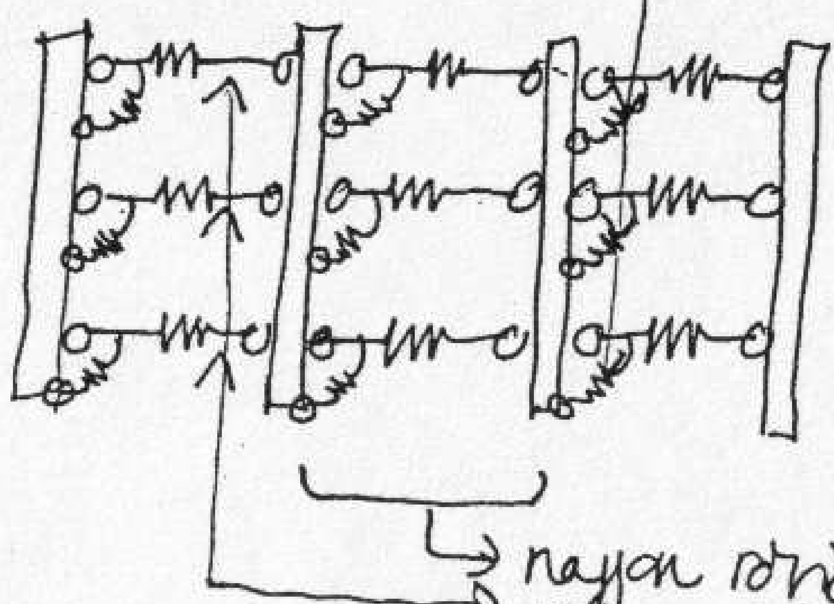


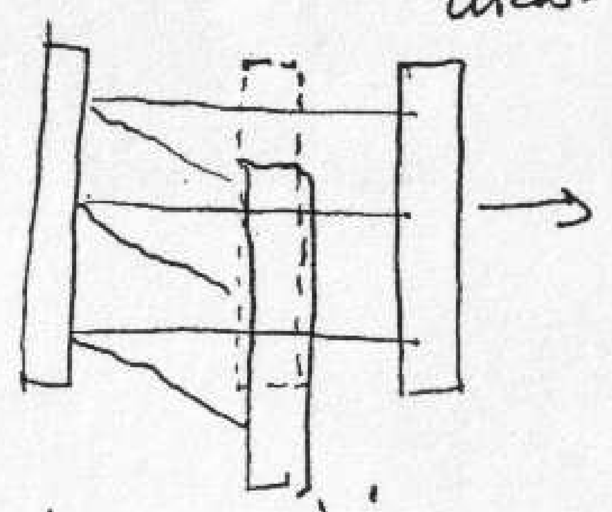
$\frac{L}{h} < 5$ → lásd "RÚD" definíciója

igénybevétel: húzás-nyomás-hajlítás → jó
nyírás-csavarás → problémás

Szemléltetés:

Rugalmas anyag esetén a B-N rúdmodellt így is elképzelhetjük:

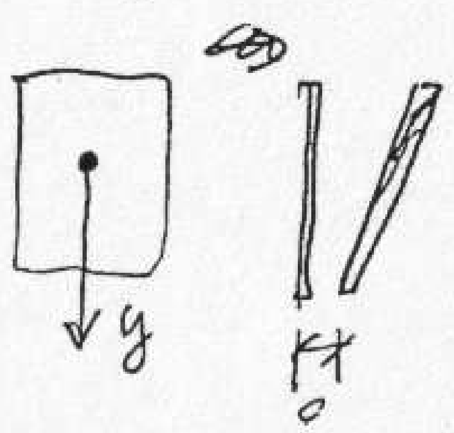




Feszültségek számításakor egy keresztmetszet-párt vizsgálunk. Három típusú egyenletet írhatunk fel:

1) Egyensúly → a feszültségek (elemi kis erők) egyensúlyt tartanak az igénybevételekkel $\int \sigma = ?$ $\int \sigma y = ?$

2) Geometria → B-N hipotézis → keresztmetszet sík →

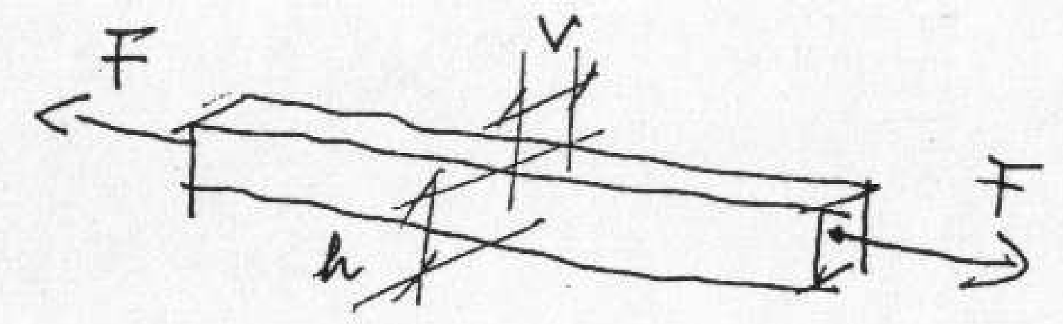


$\varepsilon = ay + b$ (síkbeli eset)

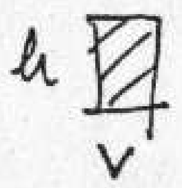
$\varepsilon = ay + bx + c$ (térbeli eset)

3) Anyagegyenlet → Hooke-törvény: $\sigma = E\varepsilon$

2.2. Feszültségek számítása központos húzás esetén (megj.)



Annak érdekében, hogy a felületi integrál helyett egyváltozós integrállal dolgozzunk → ⊓ keresztmetszet



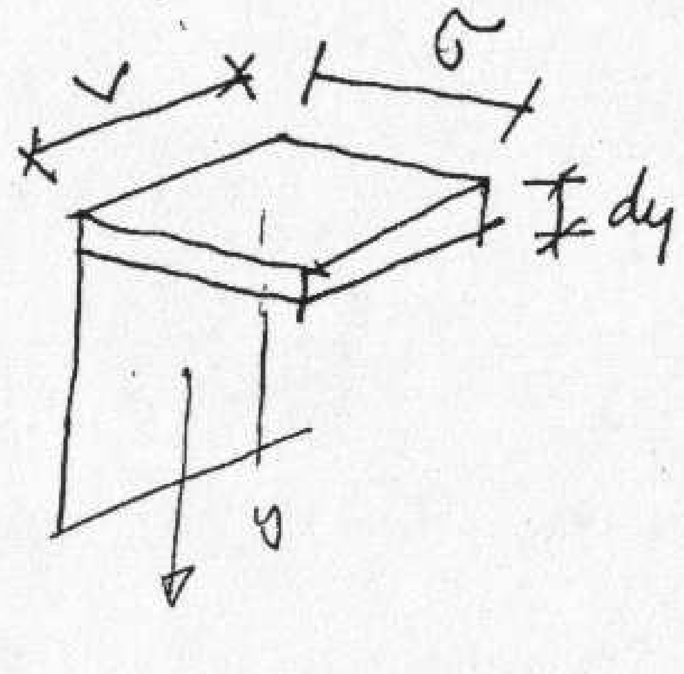
Egyenletek:

1) Egyensúly a) $\int \sigma v \, dy = F$ ($\Sigma F = 0$)

b) $\int \sigma v y \, dy = 0$ ($\Sigma M = 0$)

2) Geometria $\varepsilon = ay + b$

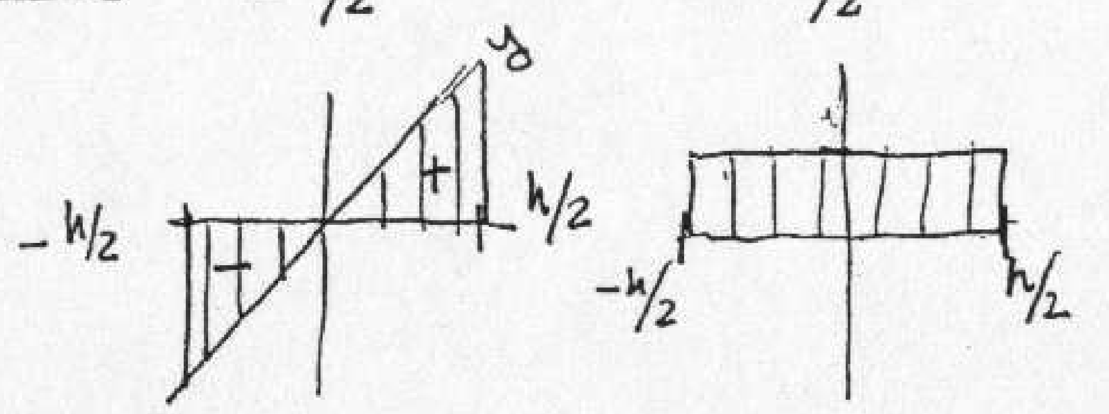
3) Anyagegyenlet $\sigma = E\varepsilon$



Megoldás (Ismeretlenek: a, b)

1/a $\frac{F}{v} = \int \sigma \, dy = E \int \varepsilon \, dy = E \int (ay+b) \, dy$ (③, ②)

$$\frac{F}{Ev} = a \int_{-h/2}^{h/2} y \, dy + b \int_{-h/2}^{h/2} dy = a \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + b \left[y\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = bh$$



$$\frac{F}{Ev} = bh$$

$$\boxed{b = \frac{F}{EA}}$$

1/b $v \int \sigma y \, dy = 0$ ← ③

$\int \varepsilon y \, dy = 0$ ← ②

$$\int_{-h/2}^{h/2} a y^2 \, dy + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b y \, dy}_{\emptyset} = 0$$

$$a \underbrace{\int y^2 dy}_{>0} = 0 \rightarrow \boxed{a = 0}$$

Visszahelyettesítés ②-be: $\varepsilon = b = \frac{F}{EA}$

③-ba $\sigma = \frac{F}{A}$

Ezt az eredményt korábban már jóval egyszerűbben is felírtuk. Miért jobb ez a bonyolult levezetés? Mert egy MODELL-ből vezettük le, világosan megfogalmaztuk, hogy melyek az AXIÓMÁK, és ezekből pontos

↳ egyensúly
↳ B–N
↳ Hooke

matematikai úton kaptuk a végeredményt.

Bonyolultabb igybv.-esetén ugyanezen módszert tudjuk alkalmazni.

2.3. Képlékeny határerő számítása központos húzás esetén

Képlékeny viselkedés esetén nem a feszültségeket keressük ($\sigma = \sigma_H$ mindenütt) hanem a határ-igénybevételt. (jelen esetben F_H)

egyenletek

① egyensúly a) $\int \sigma v \, dy = F_H$ $(\Sigma F = 0)$

b) $\int \sigma v y \, dy = 0$ $(\Sigma M = 0)$

② geometria $\varepsilon = ax + b$

③ anyag $\sigma = \text{konst!} = \sigma_H$

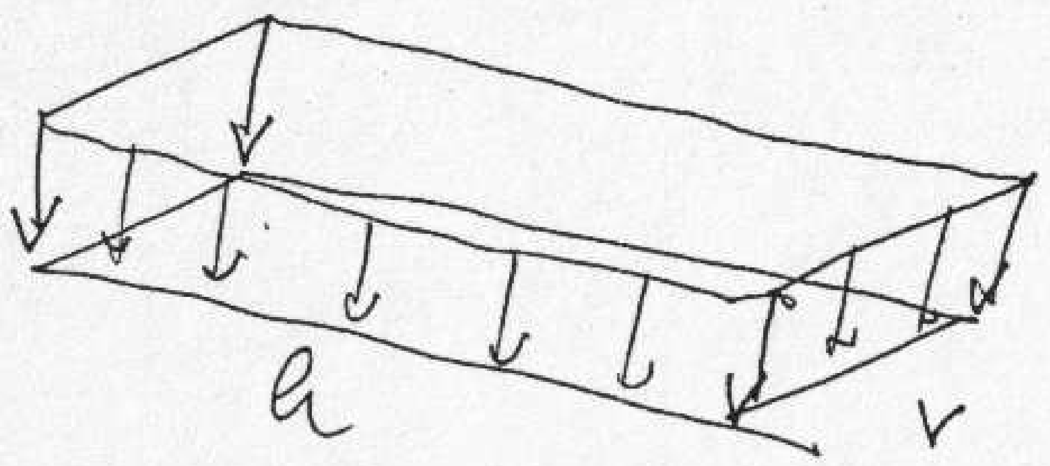
Megoldás

$$①/a \quad \int \sigma v \, dy = v \int \sigma \, dy = v \sigma_H \int dy = v h \sigma_H = A \sigma_H = F_H$$

Megjegyzések

A ② (geometriai) egyenletet nem használtuk a megoldás során, hiszen ③ szerint a nyúlások és feszültségek függetlenek. Mindazonáltal a B–N hipotézis képlékeny állapotban is érvényes. Hasonló módon nem volt szükségünk az ①/b egyenletre, azonban behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az a feltétel teljesül.

$$F_H = v \cdot h \cdot \sigma_H$$



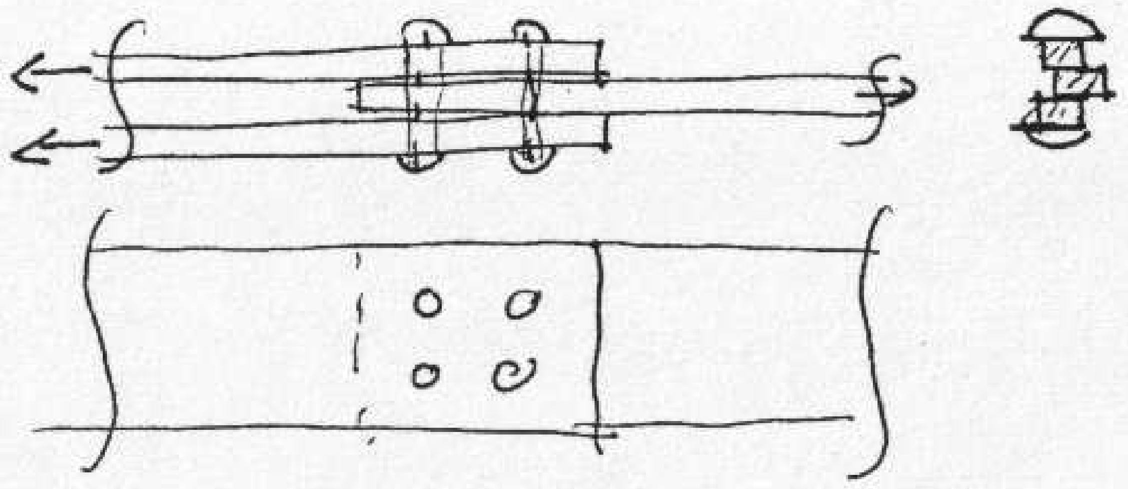
„Feszültség test" → 2 mérete [cm], 1 mérete [kN/cm²] →

Térfogata: [cm · cm · kN/cm²] → [kN]

2.4. Feszültségek számítása tiszta nyírás esetén

Tiszta nyírás → nyírás hajlítás nélkül

pl. szegecs-kötés

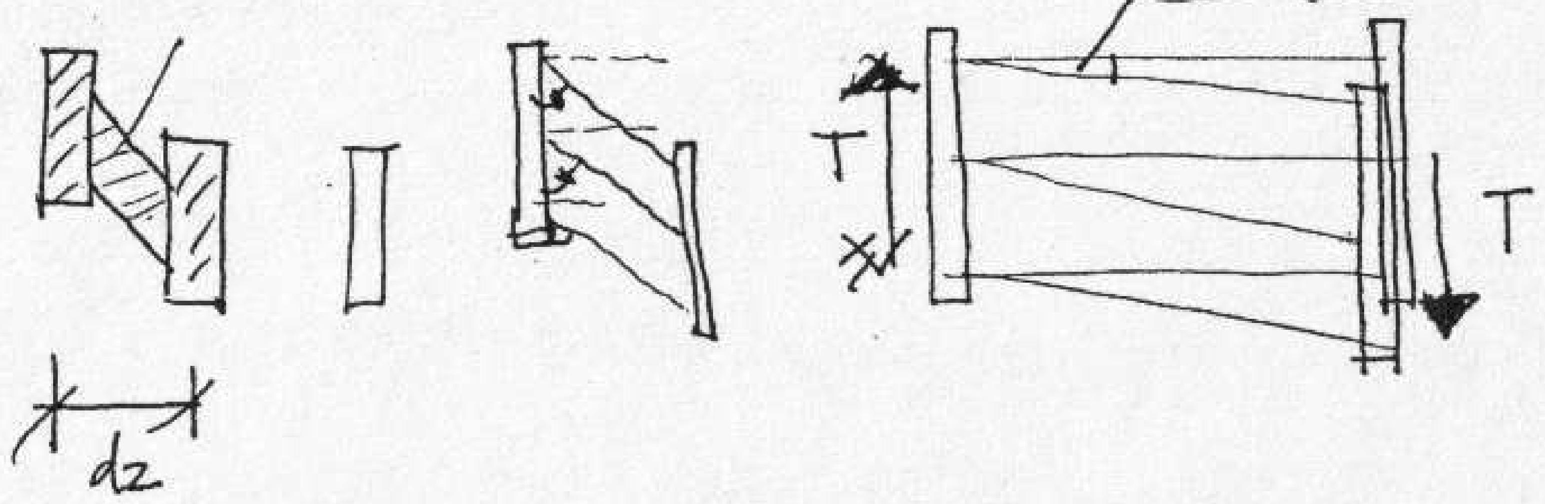


így akar elnyíródni a szegecs.

Rúdmodell viselkedése

szögtorzulás: γ

$[\gamma] - [\ ]$



Anyagegyenlet nyírási deformációra (a Hooke-törvény analógiájára) $\tau = G\gamma$

G → nyírási rugalmassági modulus

Összefüggés G és E között: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Poisson szám

Egyenletek

① egyensúly $v \int \tau \, dy = T$

② geometria $\gamma = \text{konst!} = a$

③ anyag $\tau = G\gamma$

Megoldás

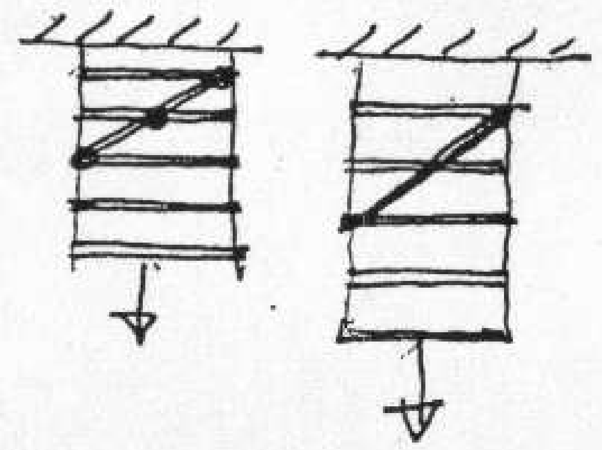
$$T = v \int \tau \, dy = v \int G \gamma \, dy = v G \int a \, dy = a v G \int dy = a v h G$$

$$\frac{T}{AG} = a = \gamma \qquad \tau = \frac{T}{A}$$

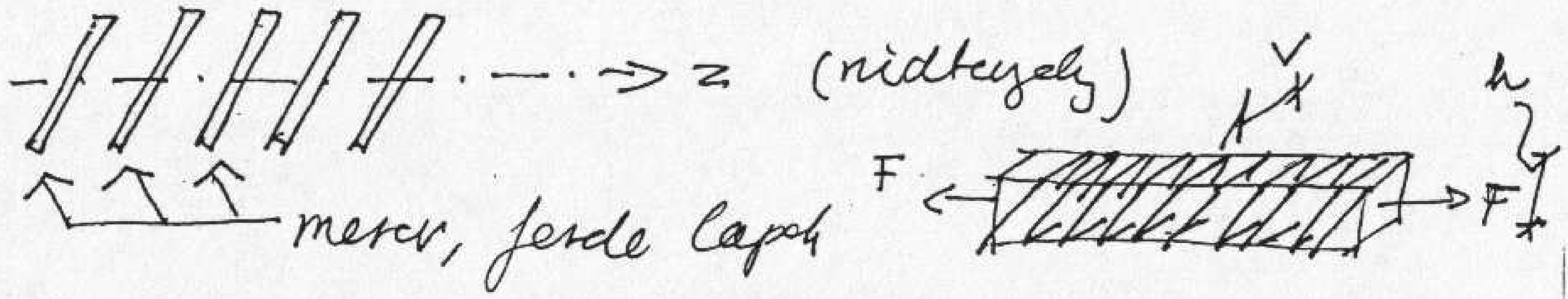
2.5 Ferde metszeteken fellépő feszültségek

Csak központos húzás esetén →

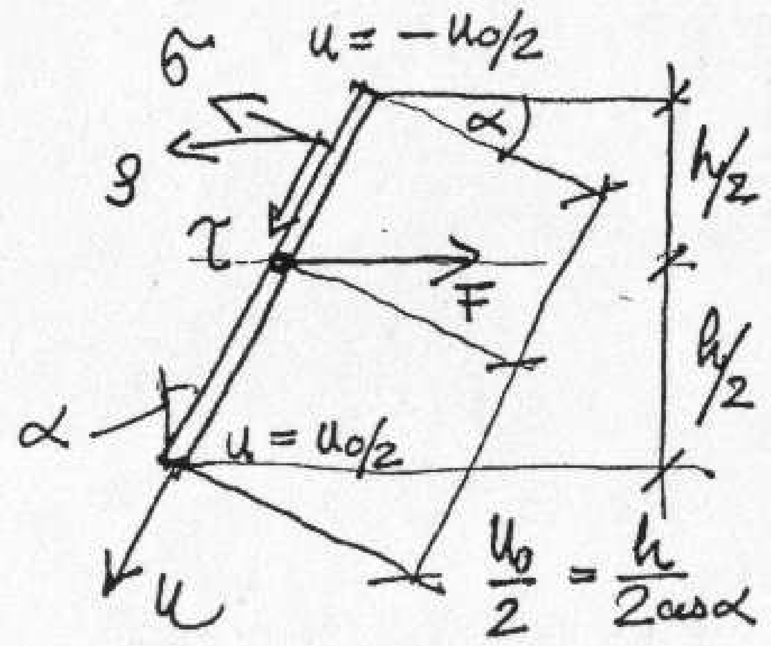
ha a rúdtengelyre ⊥ metszetek síkok maradnak, akkor a ferde metszetek is síkok maradnak.



Itt tehát alkalmazhatunk ilyen modellt is:



Számítsuk ki a feszültségeket központos húzás esetén az eddigi módszerrel:



Egyenletek

① egyensúly

a) km síkjára ⊥

$$v\int_{-u_0/2}^{u_0/2}\sigma\,du = F\cos\alpha$$

b) km síkjával ∥

$$v\int_{-u_0/2}^{u_0/2}\tau\,du = F\sin\alpha$$

c) nyomaték

$$v\int_{-u_0/2}^{u_0/2}\sigma u\,du = 0$$

② geometria

a) $\varepsilon = au + b$

b) $\gamma = c$

③ anyag

a) $\sigma = E\varepsilon$

b) $\tau = G\gamma$

Ferde metszet területe

$$\bar{A} = A/\cos\alpha$$

Megoldás

①/a

$$F\cos\alpha = v\int\sigma\,du \overset{③/a}{=} vE\int\varepsilon\,du \overset{②/a}{=} vE\int_{-u_0/2}^{u_0/2}(au+b)\,du =$$

$$= vE\underbrace{\int u\,du}_{\emptyset} + vEb\int_{-u_0/2}^{u_0/2}du = u_0 v E b$$

$$\boxed{b = \frac{F\cos\alpha}{E\bar{A}}}$$

①/c

$$v\int\sigma u\,du = 0 \Rightarrow \int\varepsilon u\,du = 0 \to \underbrace{a\underbrace{\int u^2du}_{>0} + b\underbrace{\int u\,du}_{\emptyset}}$$

$$\boxed{a = 0}$$

①/b

$$F\sin\alpha = v\int\tau\,du \overset{②/b,\ ③/b}{=} vGc\int du = vGcu_0 = Gc\bar{A}$$

$$c = \frac{F\sin\alpha}{G\bar{A}}$$

Visszahelyettesítve:

$$\boxed{\sigma = \frac{F\cos\alpha}{\bar{A}} = \frac{F}{A}\cos^2\alpha \qquad \tau = \frac{F}{A}\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$$ → ρ párhuzamos a rúdtengellyel!

Hogyan függ σ és τ α értékétől?

↓

Ez már feszültségi állapot vizsgálata

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{F}{A}\, 2\cos\alpha \sin\alpha \qquad \frac{d\sigma}{d\alpha} = 0 \text{ ha } \alpha = k\frac{\pi}{2}$$

ha $\alpha = 0$ akkor $\sigma = \frac{F}{A}$

$\alpha = 90^\circ$ $\qquad \sigma = \emptyset$

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = u'v - v'u = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\frac{F}{A} \qquad \frac{d\tau}{d\alpha} = 0 \text{ ha } \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$2\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 45^\circ \pm k\,90^\circ$$

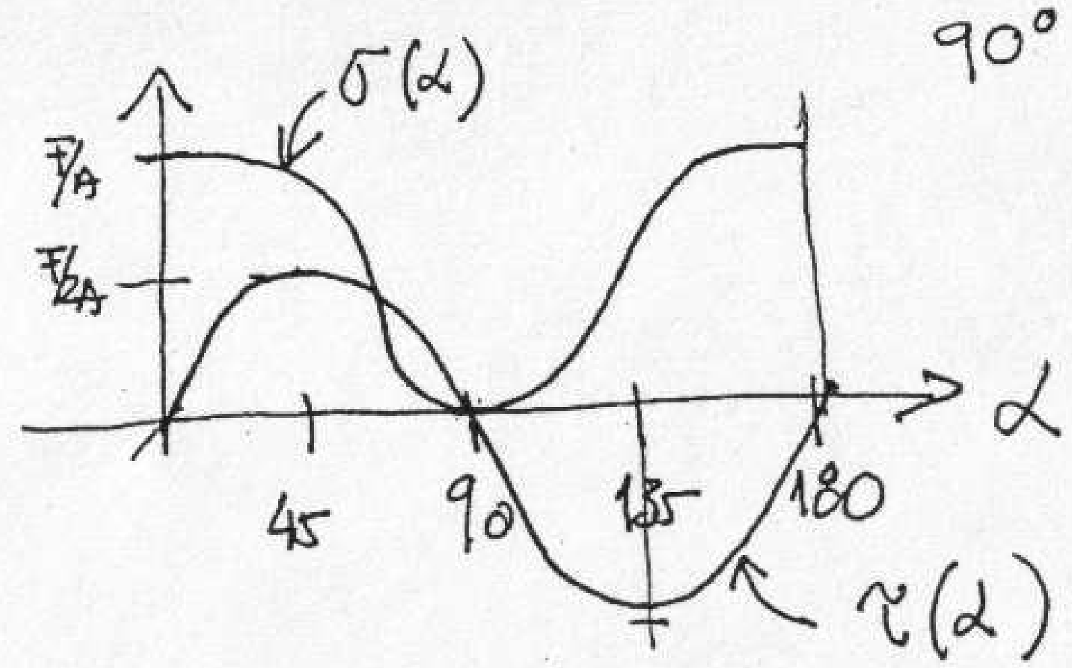
ha $\alpha = 45^\circ$, akkor $\tau = \frac{1}{2} F/A$

-45° $\qquad \tau = -\frac{1}{2} F/A$

0° $\qquad \tau = 0$

90° $\qquad \tau = 0$

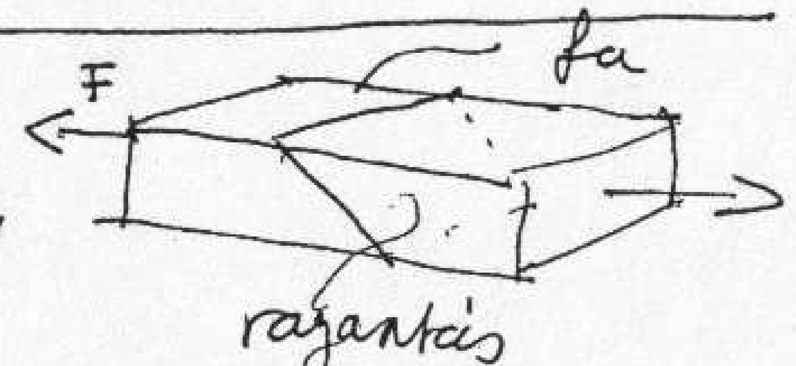
Ábrázolás:

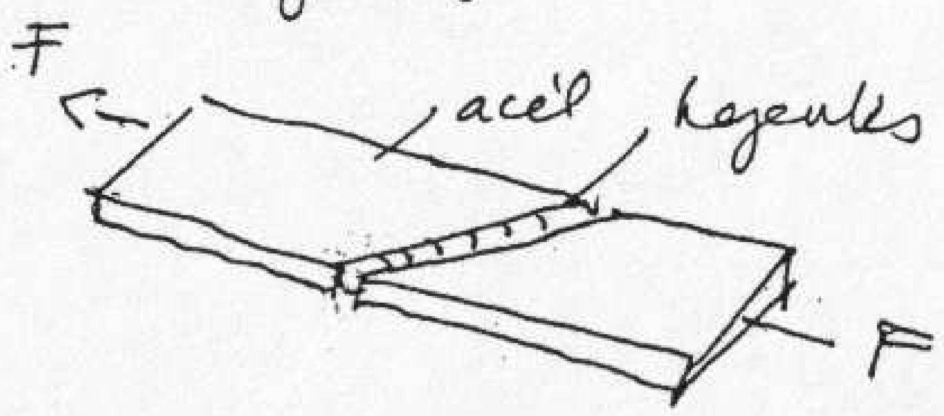


Figyeljük meg, hogy $\alpha = 90^\circ$ esetén $\sigma = \tau = 0$! → feszültségmentes sík → ∥ a rúdtengellyel párhuzamos!

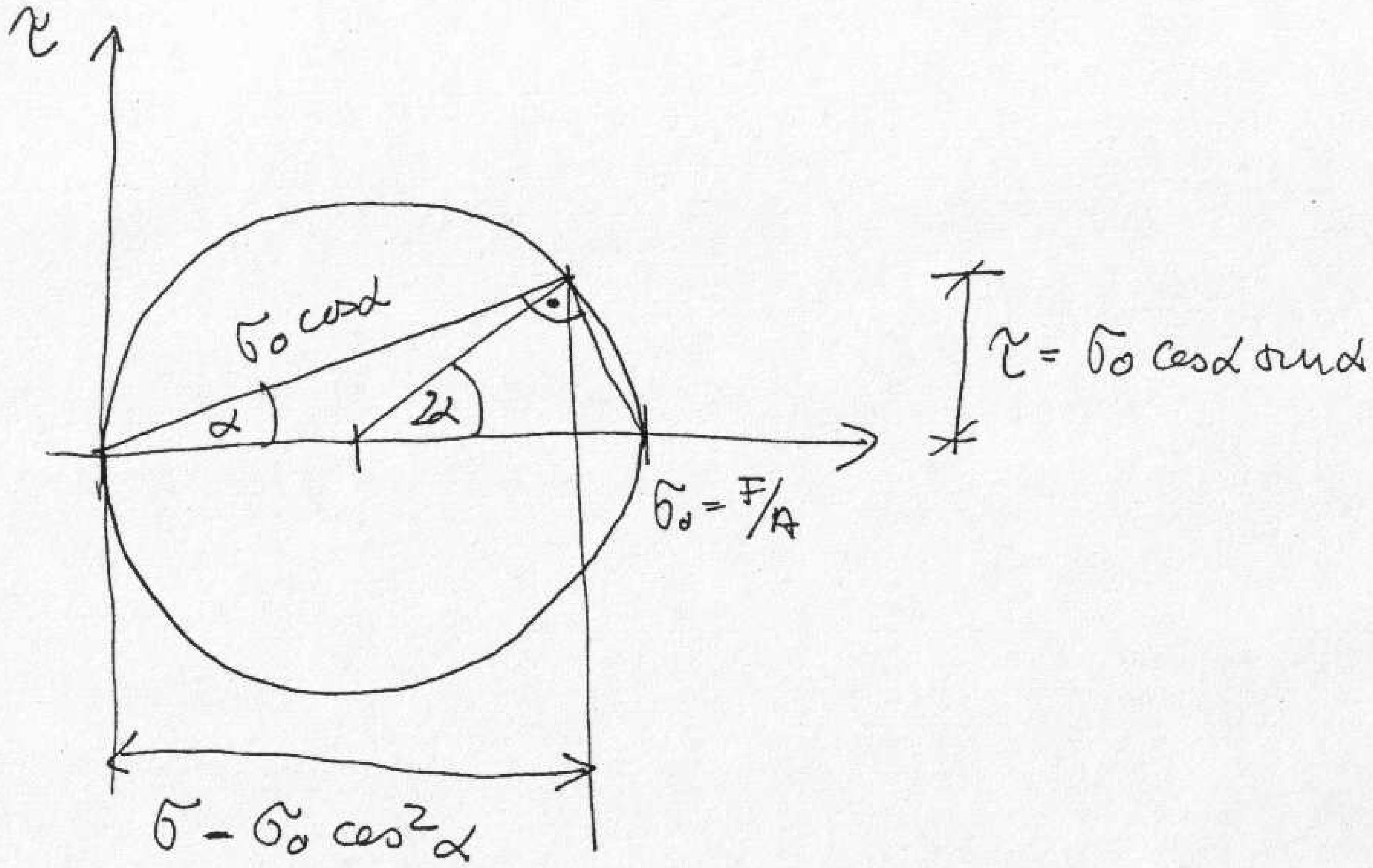
Példa gyakorlati hasznosításra

Húzott elem toldásakor, ha ferdén toldunk, akkor $\sigma < F/A$, tehát a kapcsoló anyag lehet gyengébb az alapanyagnál. Ugyanakkor nyírásra is méretezni kell!



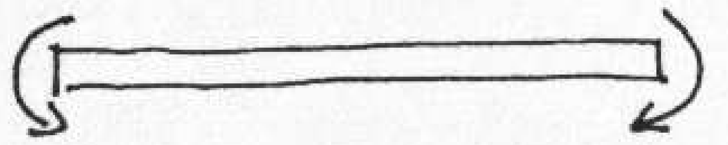


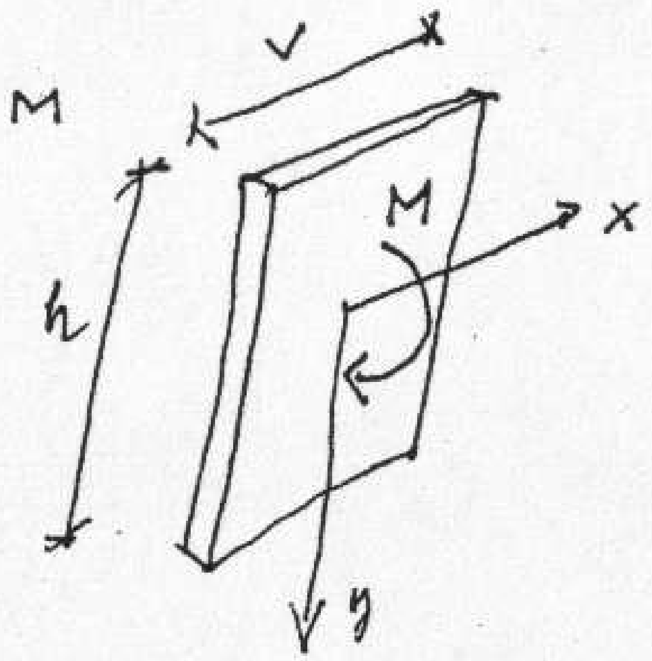
Mohr-kör ismertetése σ – τ értékpárokhoz



2.6 Tiszta hajlítás – rugalmas – alapon

Egyenes hajlítás





Egyenletek

① Egyensúly

a) $v\int_{-h/2}^{h/2}\sigma\,dy = 0 \quad (\Sigma F=0)$

b) $v\int \sigma y\,dy = M \quad (\Sigma M=0)$

② Geometria

$\varepsilon = ay + b$ ← Itt tételezzük fel, hogy "egyenes" hajlítás, vagyis a hajlítás síkja ⊥ a s.t.-re

③ Anyag

$\sigma = E\varepsilon$

Megoldás

①/a $v\int \sigma\,dy \overset{③}{=} vE\int \varepsilon\,dy \overset{②}{=} vE\int (ay+b)\,dy = vEa\underbrace{\int y\,dy}_{0} + vEb\underbrace{\int dy}_{>0} = 0$

$\hookrightarrow \boxed{b=0}$

①/b $v\int \sigma y\,dy \overset{③,②}{=} vE\int (ay^2+by)\,dy = vEa\int y^2dy + \underbrace{vEb\int y\,dy}_{\emptyset} = M$

$$\hookrightarrow a = \frac{M}{vE\int y^2dy} = \frac{M}{E\int y^2 \underbrace{v\,dy}_{dA}} = \frac{M}{E\int y^2 dA}$$

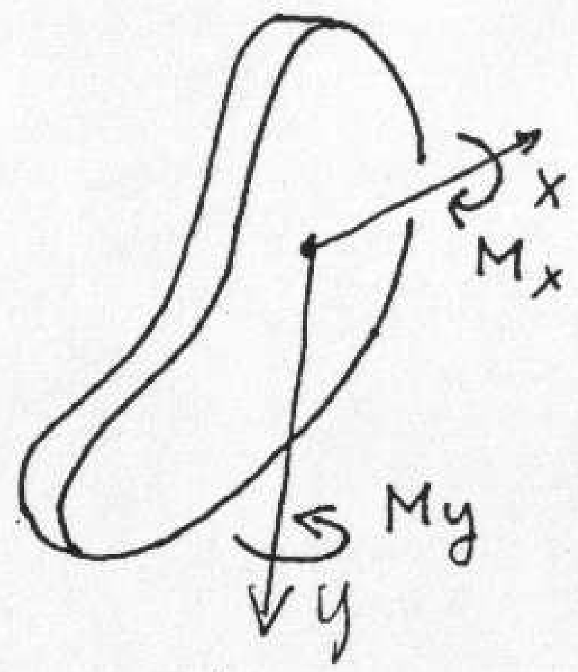
$$\varepsilon = \frac{My}{E\int y^2 dA}$$

$\boxed{\int y^2 dA \Rightarrow J_x}$ → inercia nyomaték

$$\sigma = \frac{My}{\int y^2 dA}$$

$$\sigma = \frac{M}{J_x}y$$

Általános eset (ferde hajlítás)



Egyenletek

① Egyensúly

a) $\int \sigma\,dA = 0$

b) $\int \sigma y\,dA = M_x$

c) $\int \sigma x\,dA = M_y$

② Geometria

$\varepsilon = ax + by + c$

③ Anyag $\sigma = E\varepsilon$

Megoldás

①/a $\int \sigma\,dA \overset{③,②}{=} Ea\underbrace{\int x\,dA}_{S_x=0} + Eb\underbrace{\int y\,dA}_{S_y=0} + Ec\underbrace{\int dA}_{A} = 0$

súlyponti tengelyek!

$\hookrightarrow \boxed{c=0}$

①/b $\int \sigma y\,dA \overset{③,②}{=} Ea\underbrace{\int xy\,dA}_{D_{xy}} + Eb\underbrace{\int y^2 dA}_{J_x} = M_x$

$\boxed{\text{deviációs v. terelőnyomaték}}$ ← D_{xy}

$$Ea D_{xy} + Eb J_x = M_x \qquad (*)$$

①/c
$$Ea J_y + Eb D_{xy} = M_y$$

$$\boxed{a = \frac{1}{E}\,\frac{-M_x D_{xy} + M_y J_x}{J_x J_y - D_{xy}^2}} \quad \boxed{b = \frac{1}{E}\,\frac{M_x J_y - M_y D_{xy}}{J_x J_y - D_{xy}^2}}$$

$$\sigma = \frac{-M_x D_{xy} + M_y J_x}{J_x J_y - D_{xy}^2}\,x + \frac{M_x J_y - M_y D_{xy}}{J_x J_y - D_{xy}^2}\,y \qquad (**)$$

Ha $M_y = 0$ és $D_{xy} = 0$, akkor $\sigma = \frac{M_x}{J_x}y$ (előző eset).

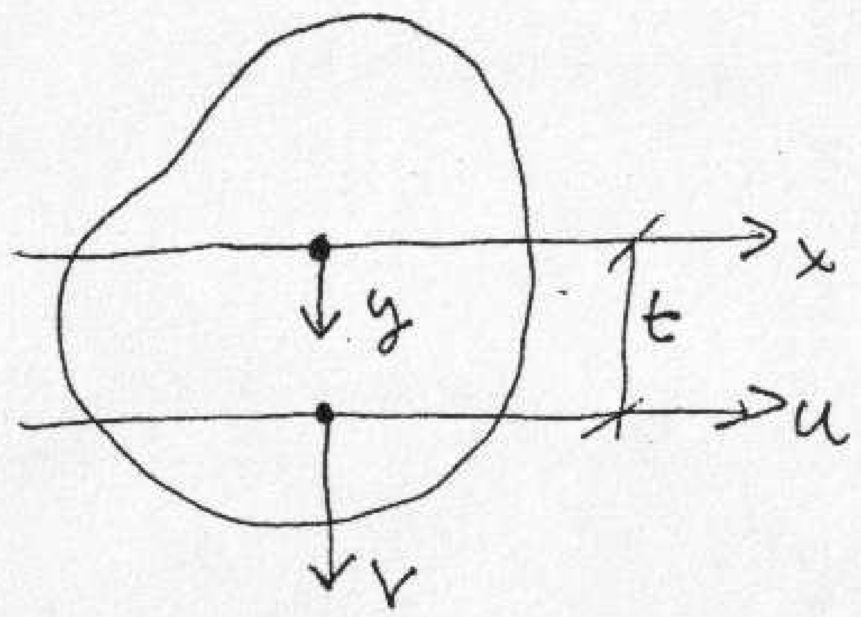
2.7 Másodrendű nyomatékok tulajdonságai és kendruitása

Definíció

$$J_x=\int y^2\,dA \qquad J_y=\int x^2\,dA \qquad D_{xy}=\int xy\,dA$$

$J_x, J_y > 0$! Inercianyomaték csak zérus méretű (pont) keresztmetszet esetén lehet zérus.

Tengely áthelyezés



Feladat: J_u meghatározása J_x és A (felület) ismeretében

$$\boxed{J_u}=\int v^2\,dA=\int (y-t)^2\,dA=$$

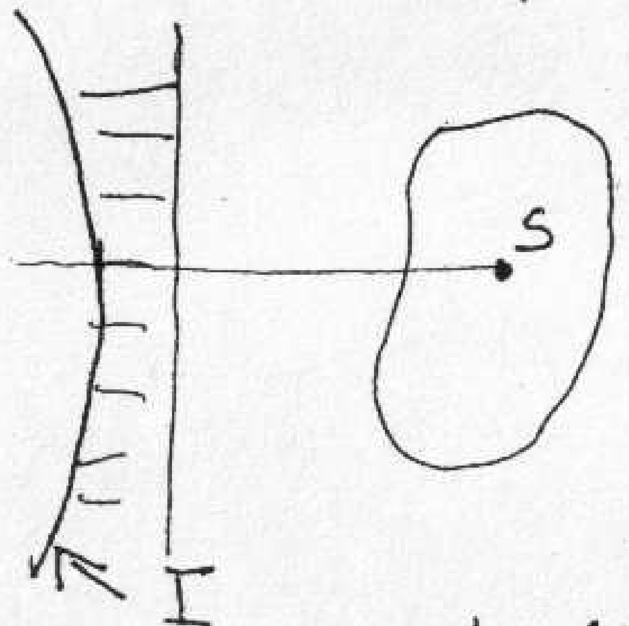
$$\underbrace{\int y^2\,dA}_{J_x}+\underbrace{\int t^2\,dA}_{t^2A}-\underbrace{2\int ty\,dA}_{2tS_x=\emptyset}=$$

$$=\boxed{J_x+t^2A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{J_x=J_u-t^2A}$$

} STEINER tétel

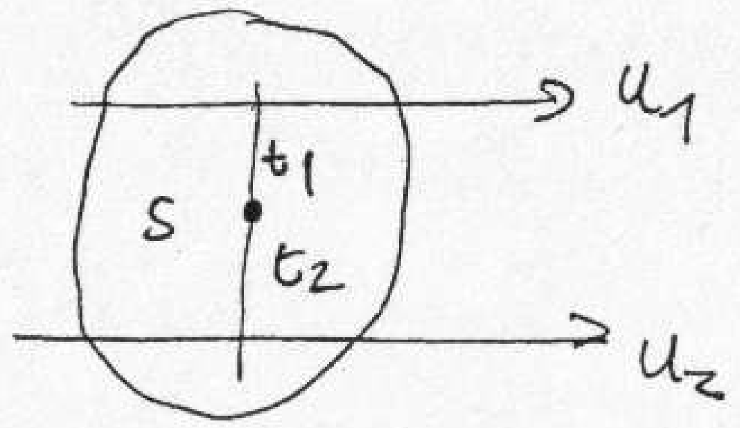


A Steiner-tétel szerint párhuzamos tengelyek közül mindig a súlyponti tengelyre a legkisebb az inercianyomaték.

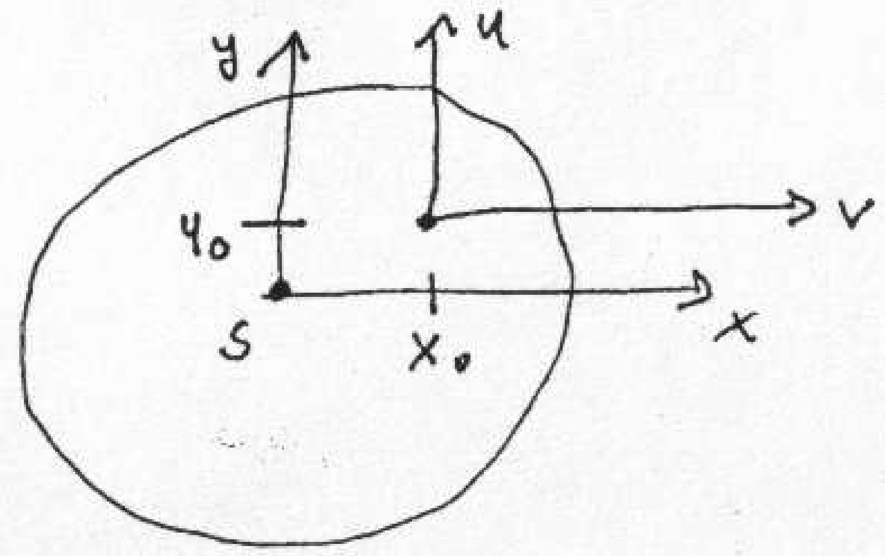
Ha nem sp. tengelyről (vagy tengelyre) térünk át, akkor 3 tagból áll az összefüggés!

$$J_{u_2}=J_{u_1}-t_1^2A+t_2^2A=$$
$$J_{u_1}+A\,(t_2^2-t_1^2)$$

↳ Ha $t_1=t_2$, akkor $J_{u_1}=J_{u_2}$



STEINER-tétel D_{xy} esetére



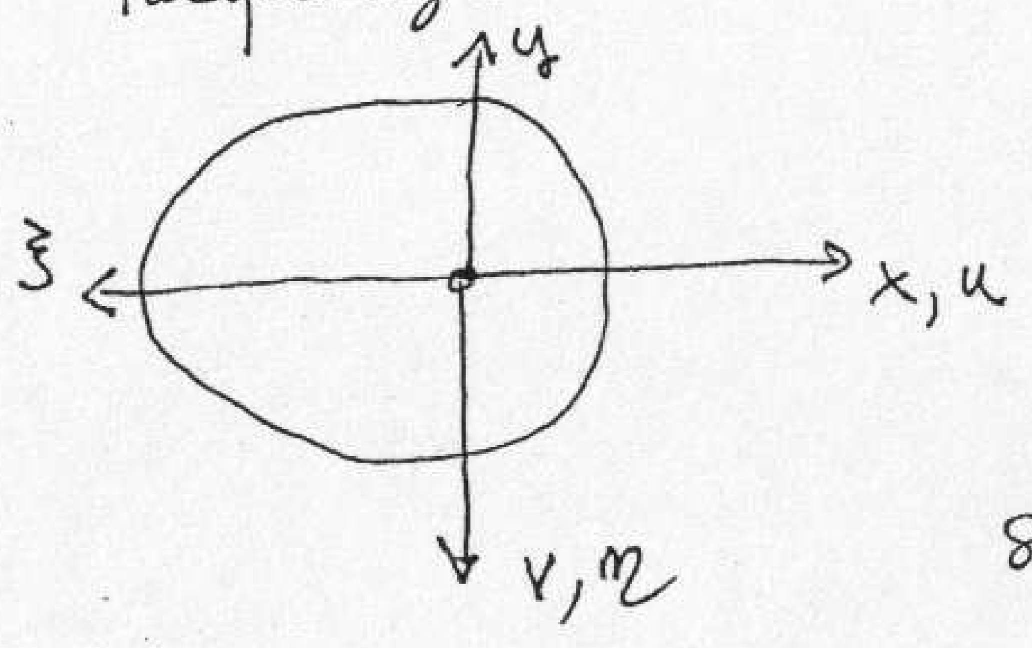
$$u=x-x_0$$
$$v=y-y_0$$

$$\int uv\,dA=\int (x-x_0)(y-y_0)\,dA=$$

$$\underbrace{\int xy\,dA}_{D_{xy}}-\underbrace{x_0\int y\,dA}_{x_0S_x=0}-\underbrace{y_0\int x\,dA}_{y_0S_y=0}+x_0y_0\underbrace{\int dA}_{A}=$$

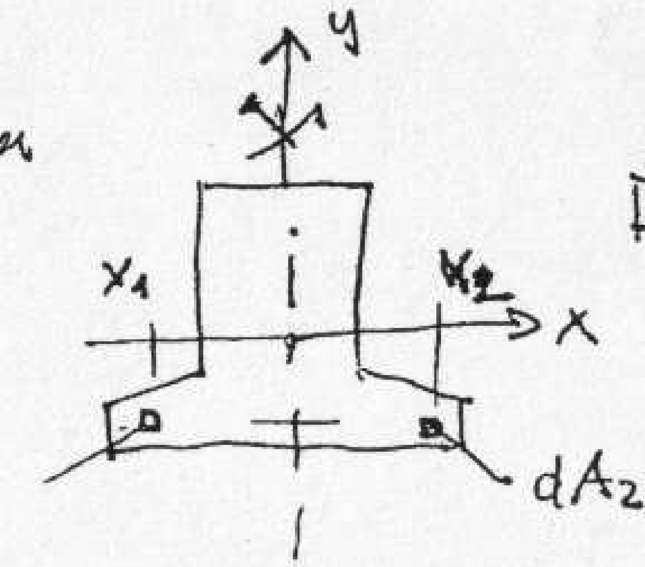
$$=D_{xy}+x_0y_0A$$

Tulajdonságok



$$D_{xy}=-D_{uv}=D_{\xi\eta}$$

Szimmetria

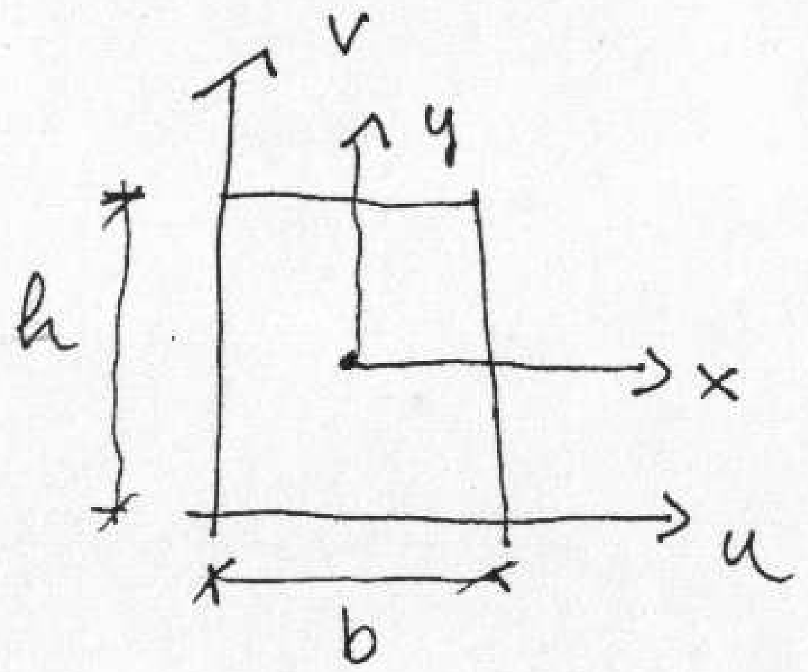


$D_{xy}=0$

$$x_1=-x_2$$
$$y_1=y_2$$
$$x_1y_1=-x_2y_2$$
$$dA_1x_1y_1+dA_2x_2y_2=\emptyset$$

Példa inercia-nyomaték kiszámítására

Téglalap

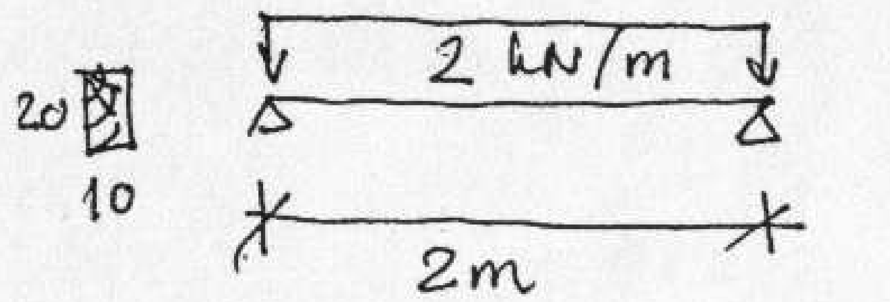


$$J_u = \int v^2 dA = b\int v^2 dv = b\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$\boxed{J_x = J_u - b\cdot h\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12}$$

Példa σ számítására

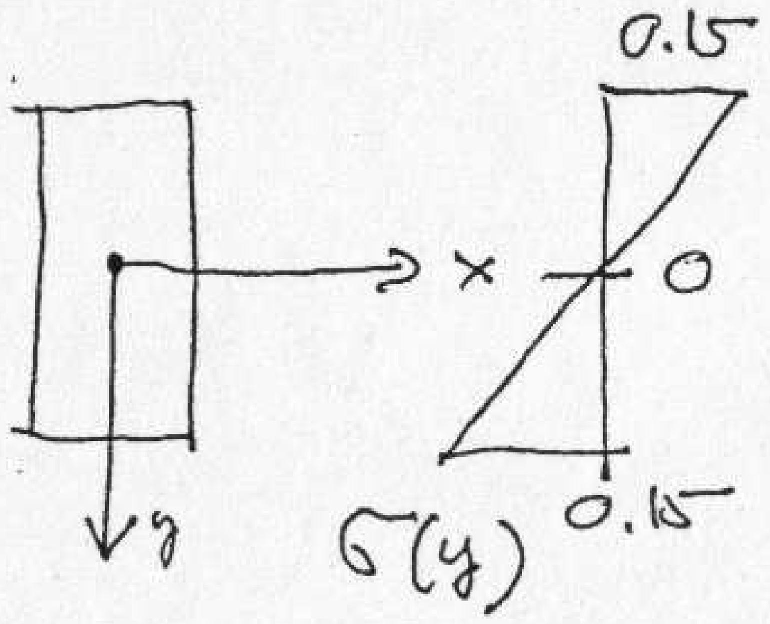


$$M_u = \frac{q l^2}{8} = \frac{2\cdot 4}{8} = 1\ \text{kNm} = 100\ \text{kNcm}$$

$$J_x = \frac{10\cdot 20^3}{12} = \frac{80000}{12} = 6666.67$$

$$\sigma_{max} = \frac{100}{6666}\cdot 10 = 0.15\ \text{kN/cm}^2$$

$$\sigma(y) = \frac{100}{6666}\cdot y = 0.015y$$



2.8 A ferde hajlítás összefüggéseinek értelmezése

Az ①/b – ①/c egyenletek (*) kifejtése az alábbi formában is írható:

$$E\,\underline{\underline{I}}\,\underline{n} = \underline{M}\ ,$$

ahol E a rug. modulus, (skalár)

$\underline{\underline{I}}$ a keresztmetszet $\begin{bmatrix} I_x & D_{xy} \\ D_{xy} & I_y \end{bmatrix}$ tehetetlenségi mátrixa

$\underline{n}$ a semleges tengely $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ normálvektora

$\underline{M}$ a hajlítónyomatékok $\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix}$ vektora.

Ezek szerint a ferde hajlítás (lin. rug. esetben) felfogható egy lineáris vektor-vektor függvényként, mely egy $\underline{n}$ normálvektorhoz egy $\underline{M}$ nyomatékvektort rendel hozzá. (A σ-ra vonatkozó képletek bonyolultsága abból ered, hogy bennünket ezen függvény inverze érdekel, amely egy $\underline{M}$ vektorhoz adja meg a semleges tengely $\underline{n}$ normálisát)

Minden lin. vektor-vektor függvény (tenzor) rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

a) Létezik 2 egymásra merőleges irány, amelyben a tenzor csak a bemenő vektor hosszát változtatja meg, irányát nem.

→ Ebből következik, hogy van olyan [1, 2] koordináta-rendszer, ahol az $\underline{\underline{I}}$ mátrix $\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$ alakú.

Ezeket az [1, 2] irányokat főirányoknak nevezzük, az J_1, J_2 inerciákat pedig főinerciáknak. A főirányok [1, 2] koordináta-rendszerében $D_{12} = 0$.

b) Vagy 2 főirány van, vagy végtelen.

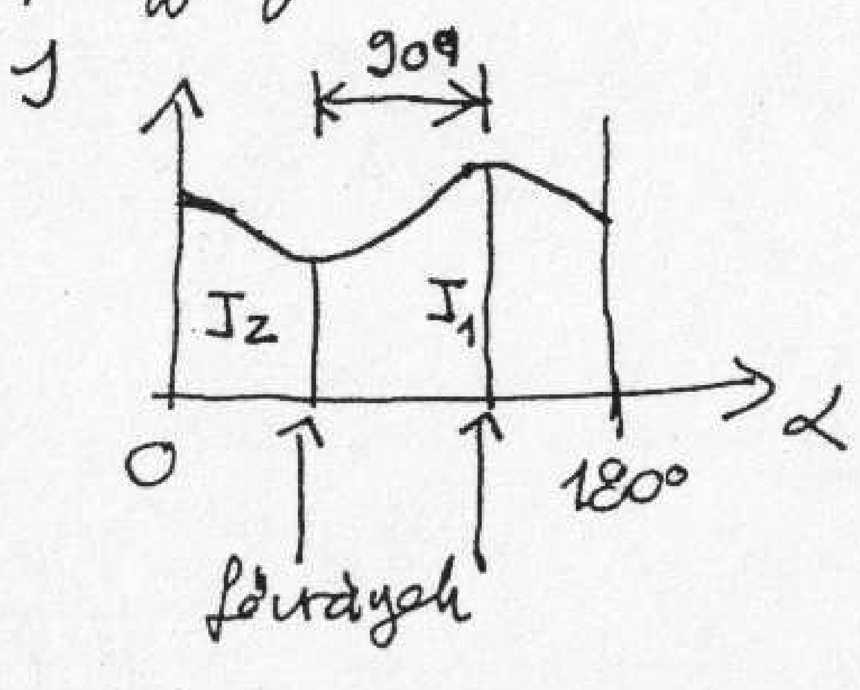
→ Korábban megállapítottuk, hogy szimmetria-tengellyel egybeeső koordináta rendszerben $D_{xy}=0$. Ezek szerint ez egyben főtengely-koordináta rendszer. Ha a keresztmetszetnek van 2 olyan szimmetria-tengelye, melyek egymásra nem merőlegesek, akkor ebből 4 főirány létezése következne, ami b) tulajdonság alapján azonban akkor minden irány főirány. Ilyen keresztmetszet például minden szabályos poligon: △ □ ⬠ stb.

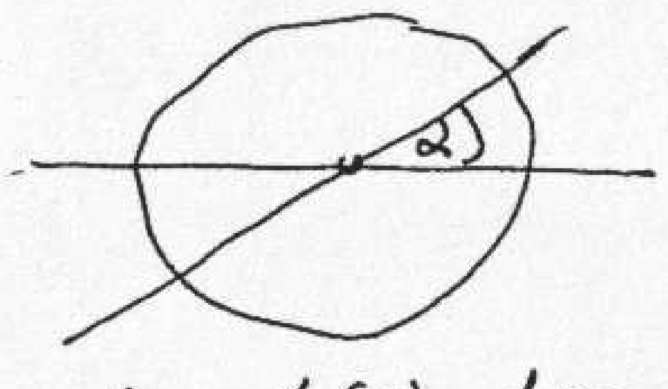
Megjegyzés: Ezek szerint pl. a négyzet inerciagyomatéka minden tengelyre azonos. Ez nem azt jelenti, hogy egy □ keresztmetszetű rudat egyformán nehéz

az "a" vagy "b" tengely körül hajlítani, hanem azt, hogy az általunk használt modell (B-N hipotézis, Hooke-törvény) nem tud különbséget tenni a szabályos sokszögek és a kör között.

A főtengelyek további tulajdonságai:

Az J inercia felírható egy α szög J(α) függvényeként





Az J(α) függvény a főirányokban veszi fel szélsőértékeit.

Mivel a főirányokban $D_{xy}=0$, ezért a σ-ra levezetett képlet (**) jelentősen leegyszerűsödik ilyen koordináta-rendszerben:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y$$

(Ez nem más, mint két egyenes hajlítás egymásrahalmozása)

Ezek szerint általános (ferde) hajlítás esetén két út követhető:

a) Ha a km. szimmetrikus, akkor a főirányok ismertek. Célszerű az $\underline{M}$ vektort ebben a koordináta-rendszerben felbontani és a jelentkezett 2 egyenes hajlítás egymásrahalmozásával számolni.

b) Ha a km. nem szimmetrikus, és a főirányok más forrásból sem ismertek, akkor célszerű a (**) képletet alkalmazni.

A főirányok helyzete mindig meghatározható a

$$tg\, 2\varphi_0 = \frac{-2D_{xy}}{J_x - J_y}$$

képletből, amelyben φ_0 a nagyobbik inerciát adó tengely és az 1. főtengely közötti szöget jelöli. (Az eredeti tengelyt óramutatóval ellentétesen kell φ_0-lal elforgatni.)

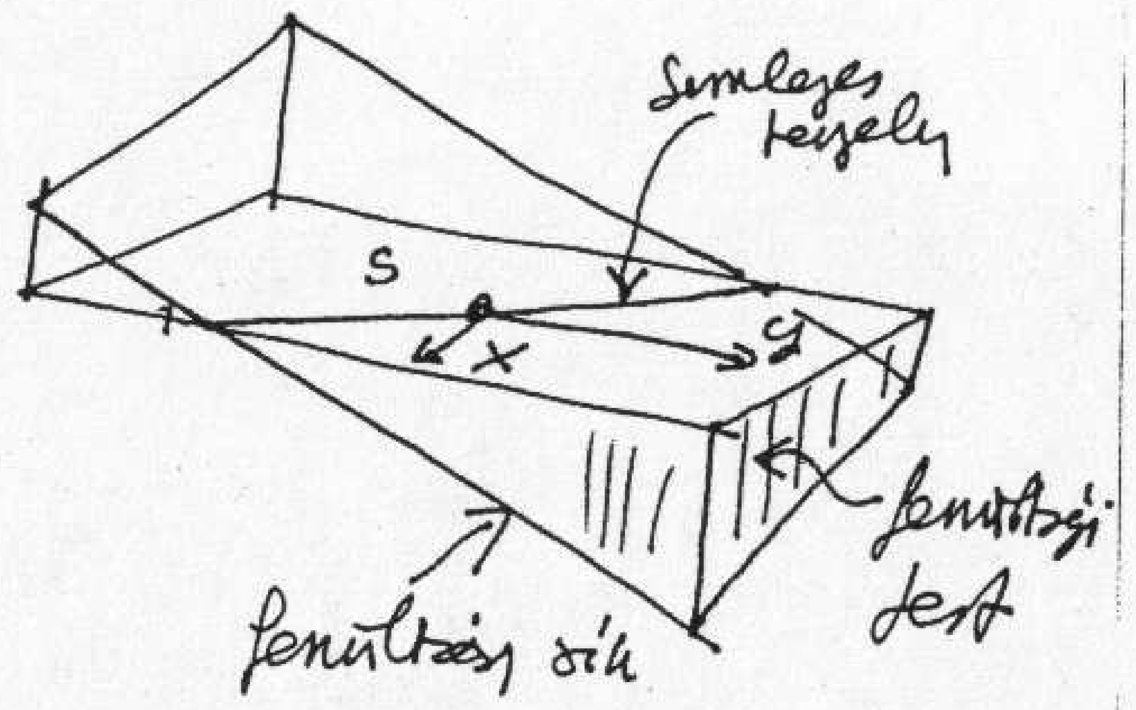
2.9 Feszültségábra ferde hajlítás esetén.

Tegyük fel, hogy a főtengelyek ismertek.

Semleges tengely egyenlete:

$$\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0$$

s.t.: $$y = -\frac{J_x M_x}{J_y M_y} x$$

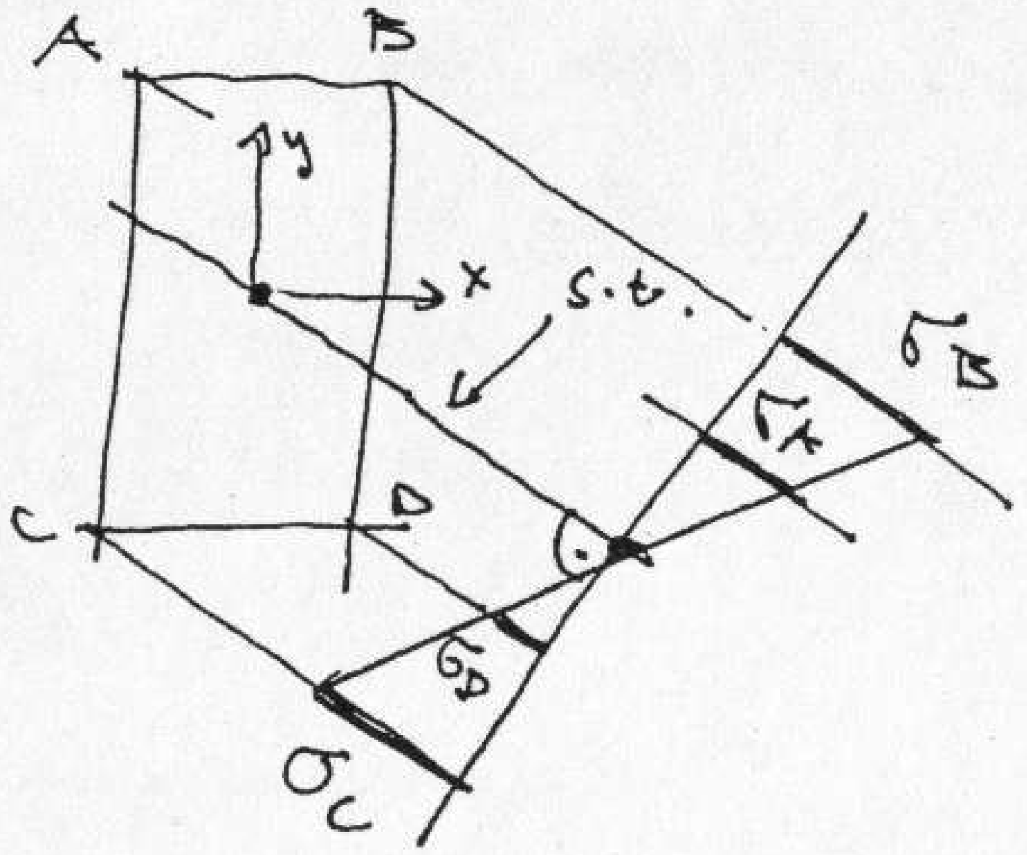


↓

feszültségi sík és km. síkjának átdatása

↓

s.t.-re ⊥-en vetítve σ-ábra egyetlen vonal:



Mivel a sp.-ban $\sigma = 0$, ezért elvileg elegendő egyetlen σ érték kiszámítása, a többinek illeszkednie kell az egyenesre.

2.10 Képlékeny hajlítás

Egyenletek

① egyensúly
a) $\int \sigma \, dA = 0$
b) $\int \sigma x \, dA = M_y$
c) $\int \sigma y \, dA = M_x$

② geometria $\varepsilon = ax + by + c$

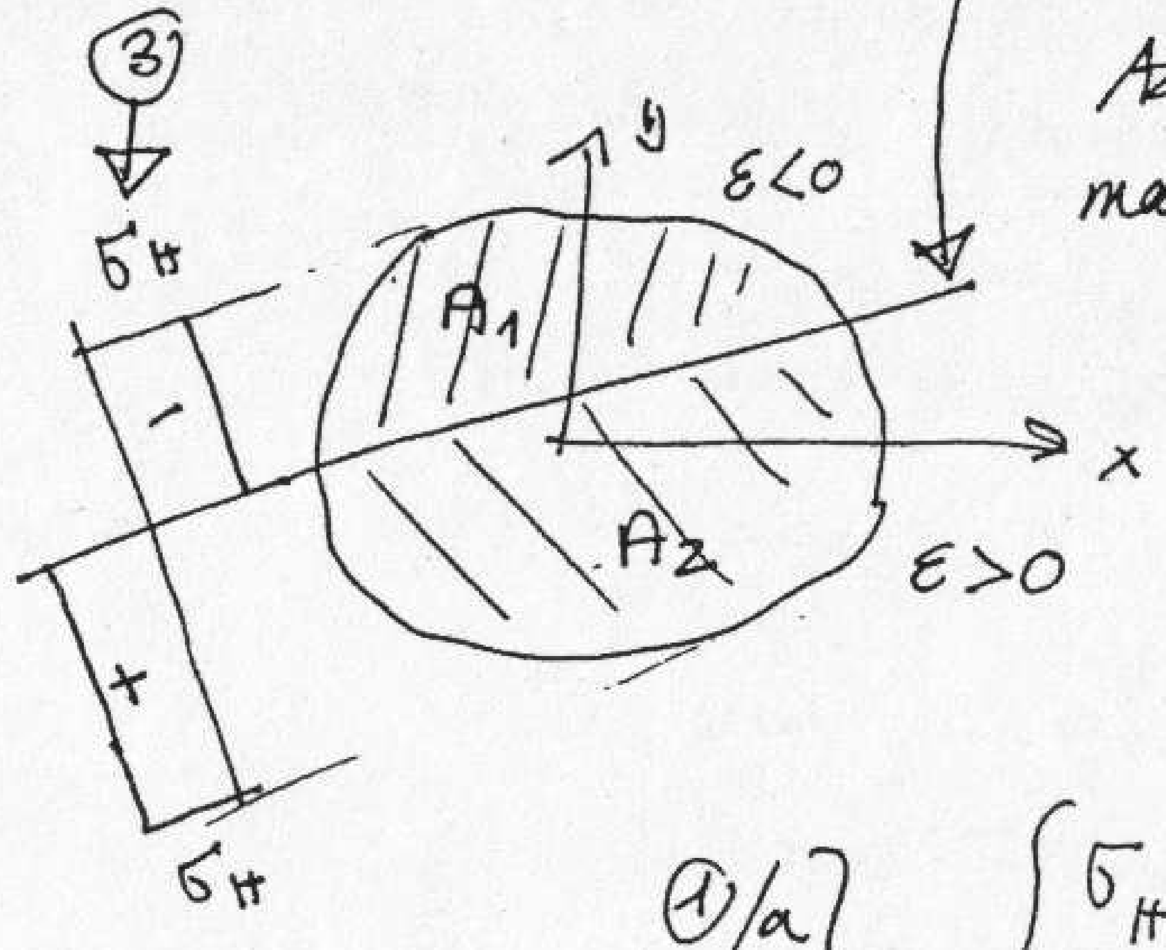
③ anyag $\sigma = \mathrm{sgn}(\varepsilon)\sigma_H$

↳ ε és σ előjele megegyezik!

Megoldás

② -ből $\varepsilon = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

egyenes, mely nem megy át feltétlenül a súlyponton. Az egyenes egyik oldalán $\varepsilon > 0$, másik oldalán $\varepsilon < 0$, tehát



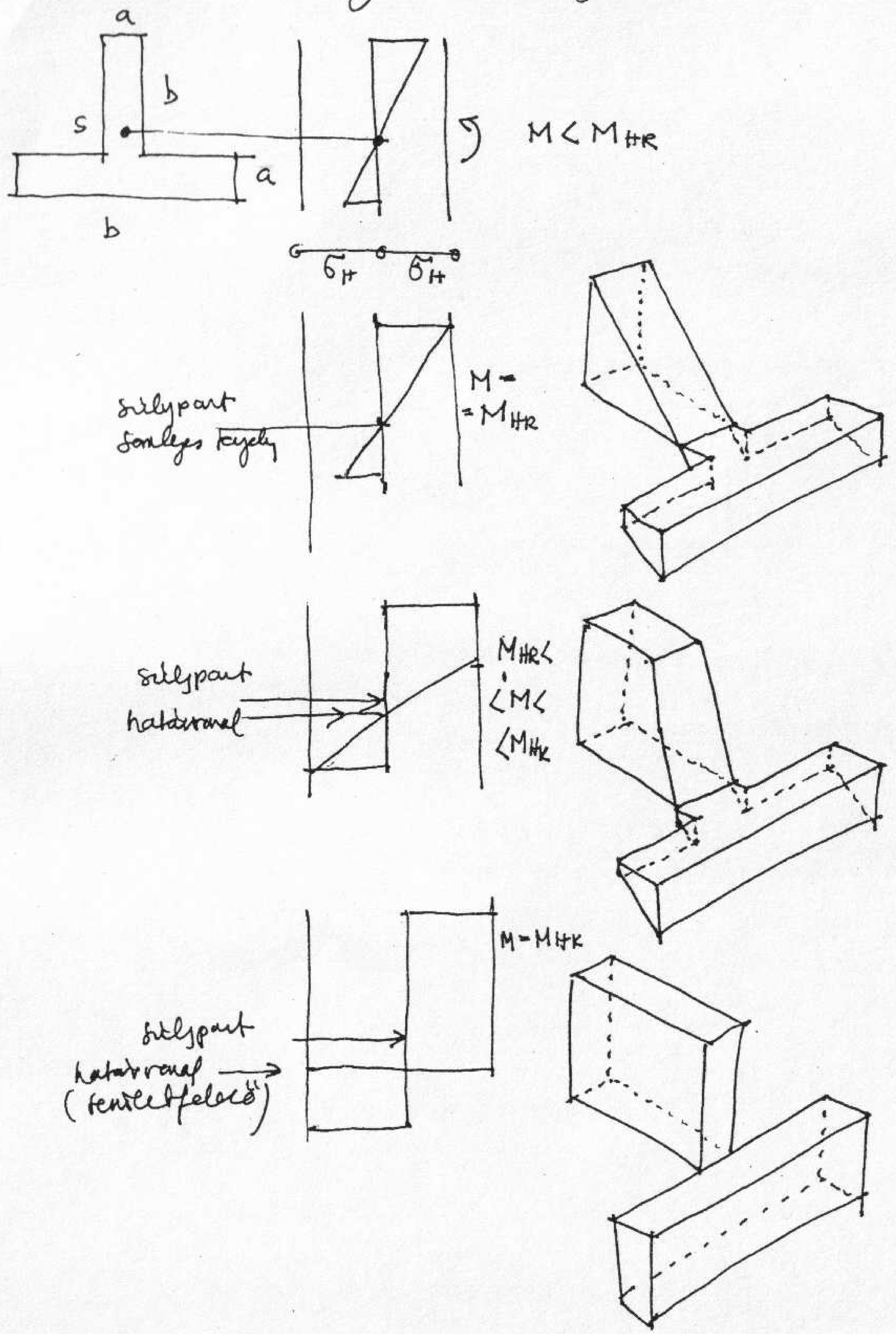
$$\left.\begin{array}{l} ①/a \\ ③ \end{array}\right\} \int_{A_1} \sigma_H \, dA + \int_{A_2} -\sigma_H \, dA = 0$$

$$\int_{A_1} dA - \int_{A_2} dA = 0$$

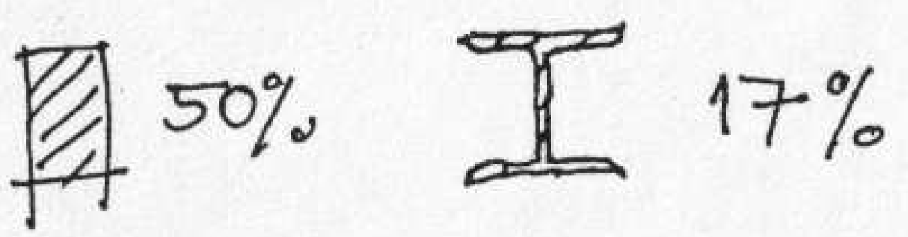
$$\underline{A_1 = A_2}$$

Tehát a határvonal területfelező. A határvonal [illegible] ①/b és ①/c segítségével lehet meghatározni.

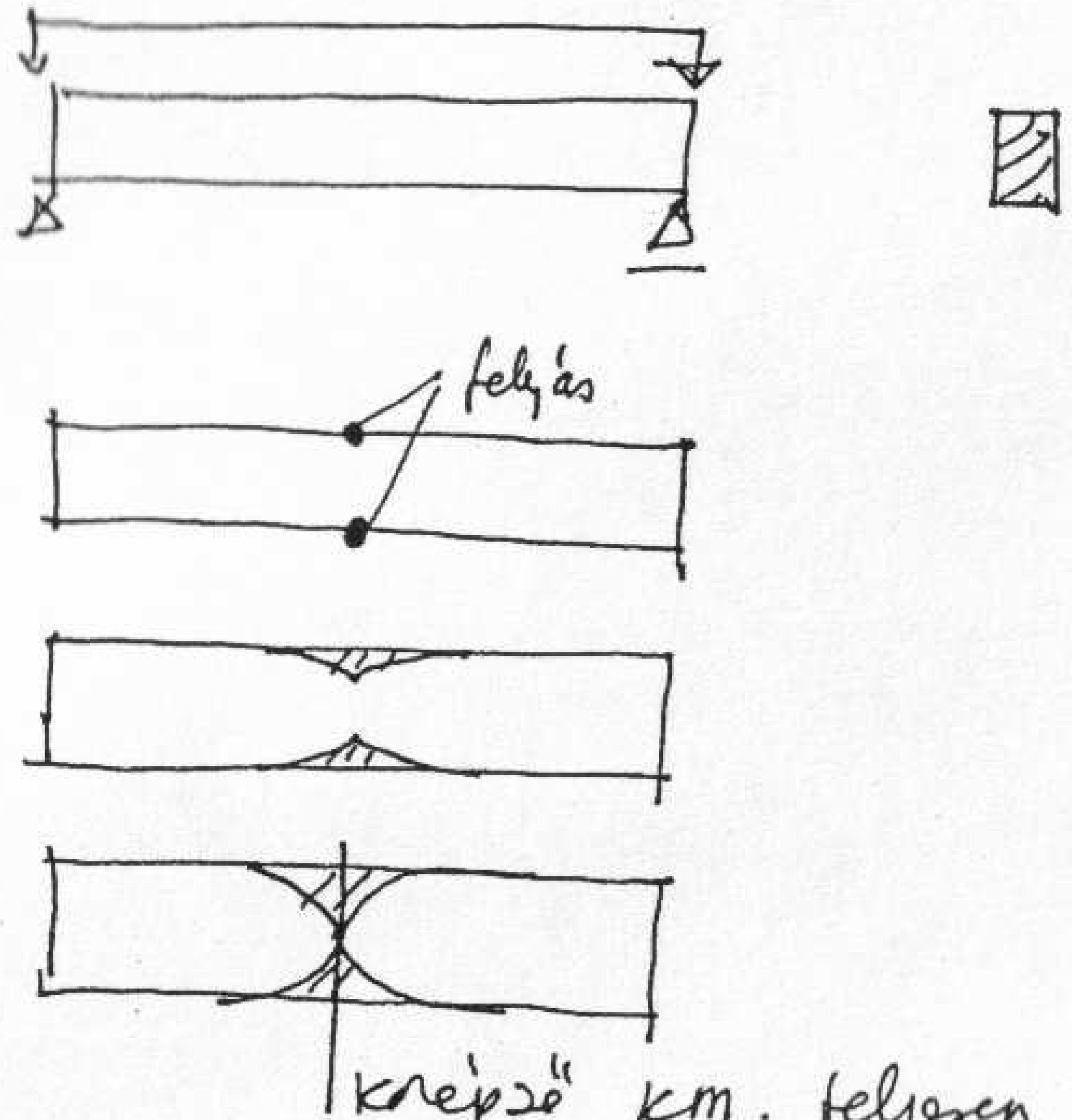
2.11 Rugalmas → képlékeny átmenet egyenes hajlítás esetén



$100 \cdot \left(\frac{M_{HK}}{M_{HR}} - 1 \right)$ → képlékeny tartalék [%]



Rug ⇒ képlékeny átmenet a tartó szempontjából



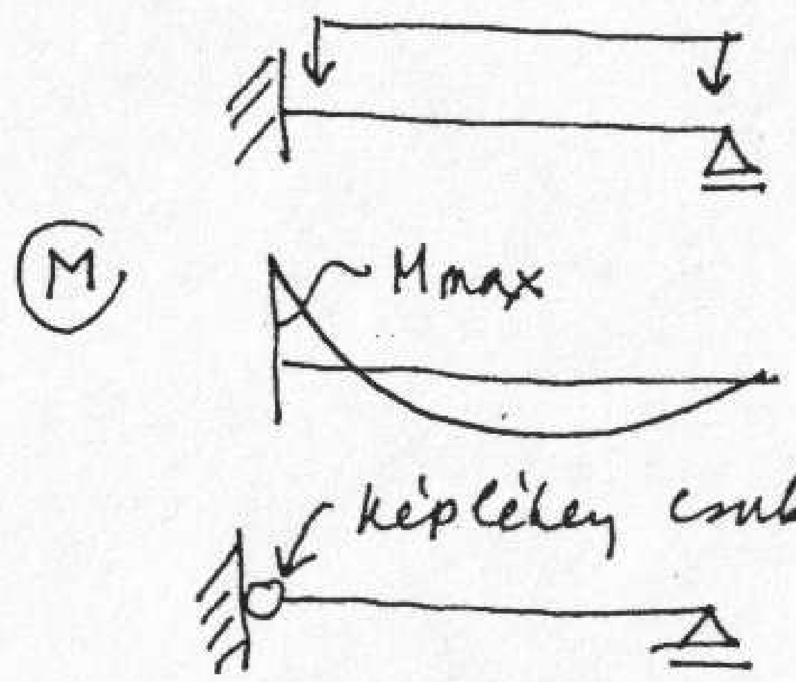
középső km. teljesen megfolyt

→

Képlékeny csukló →

→ leszakad

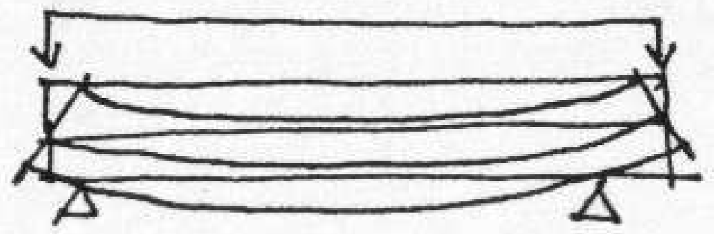
Határozatlan szerk. esetében

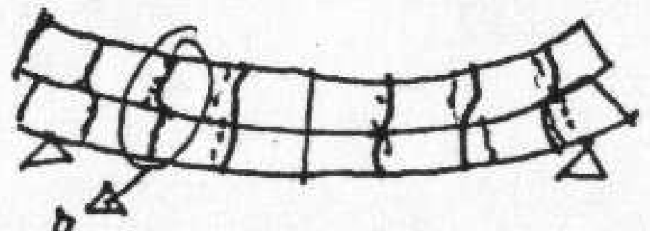


n-szer határozatlan szerk.

képlékeny csukló → állékony maradhat n csukló keletkezéséig

2.12 Hajlítással egyidejű nyírás





A kezdetben sík keresztmetszetek így torzulnak

↓

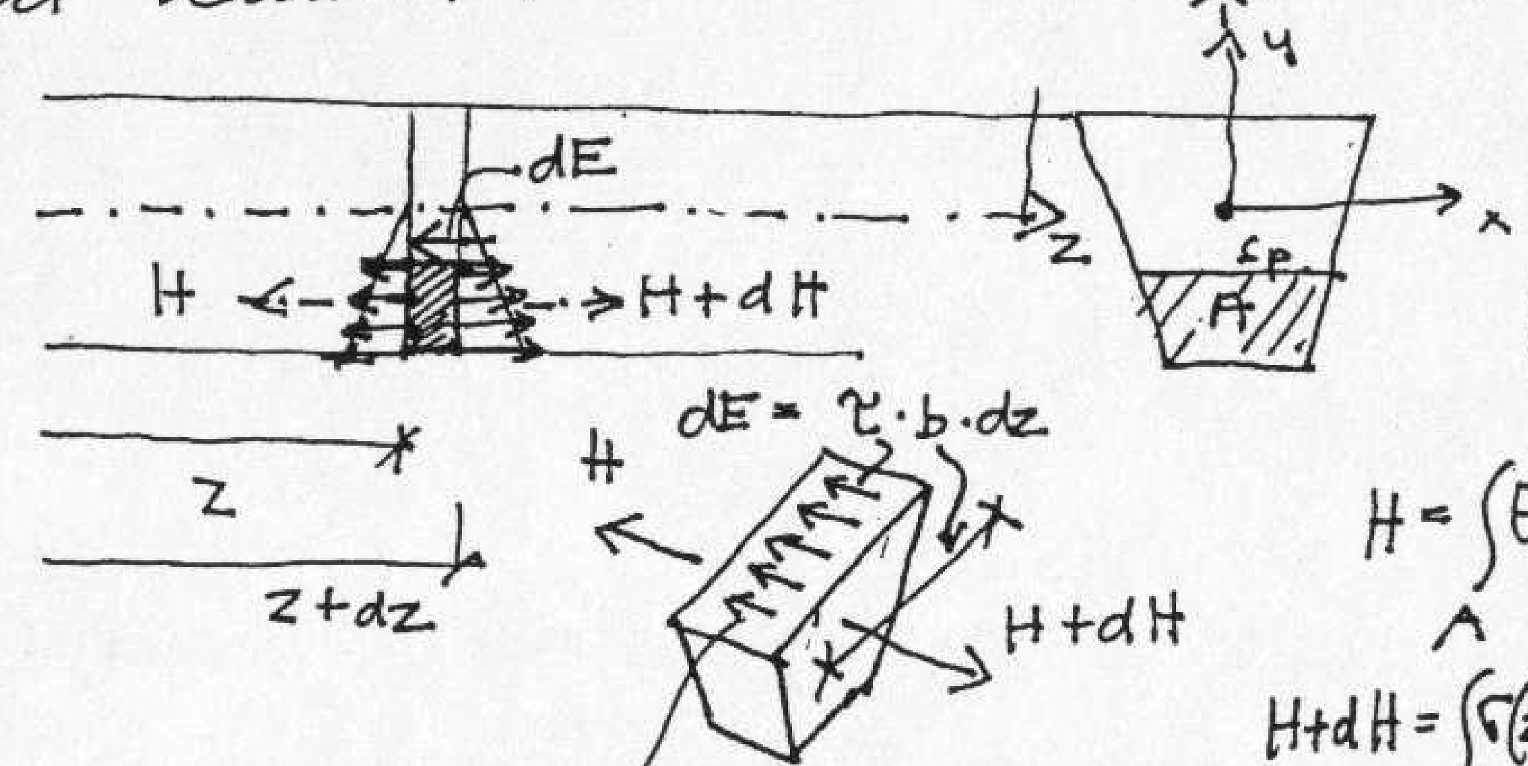
A B-N hipotézis nem érvényes

A σ feszültségeket a B-N modellből vesszük át

ELLENTMONDÁS → a számítás nem „konzisztens".

Miért csináljuk így? → más modellel lényegesen bonyolultabb lenne.

Ha a km. nem sík, akkor nincs geom. egyenlet, nem egy km.-et vizsgálunk, hanem csak egy elemi hasábot:



$$\sigma(z) = \frac{M(z)}{J_x} y$$

$$H = \int_A \sigma(z)\,dA = \frac{M(z)}{J_x}\int y\,dA$$

$$H+dH = \int_A \sigma(z+dz)\,dA = \frac{M(z+dz)}{J_x}\int y\,dA$$

Feltétel:
τ keresztirányban konst.

$$\int y\,dA = S_x$$

$$dE = \tau b\,dz = (H+dH) - H = \frac{S_x}{J_x}\left(M(z+dz) - M(z)\right)$$

$$\tau = \frac{S_x}{bJ_x}\cdot\frac{M(z+dz)-M(z)}{dz} = \frac{S_x}{bJ_x}\frac{dM}{dz} = \frac{S_x T}{bJ_x}$$

↳ vízszintes metszeten fellépő csúsztatófeszültség [kN/cm²]
ZSURAVSZKIJ

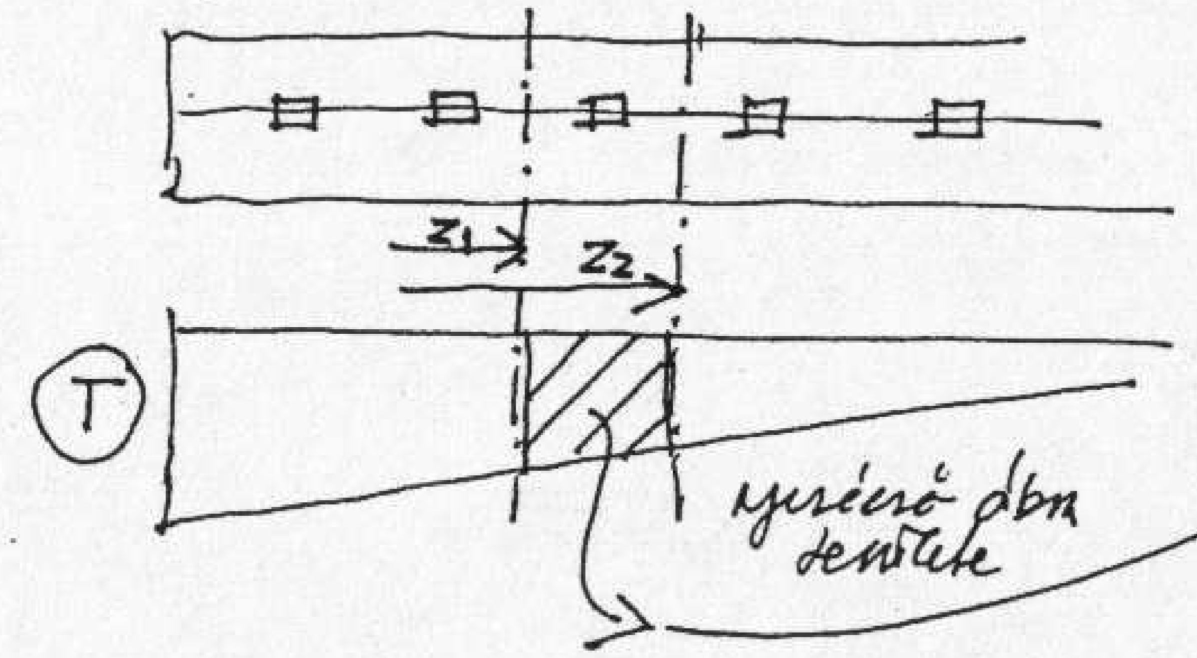
Csúsztatóerő $dE = \tau b\,dz = \frac{S_x T}{J_x} dz$

$$E = \sum \frac{S_x}{J_x}\int T\,dz$$

Fajlagos csúsztatóerő

$$\frac{dE}{dz} = \frac{S_x T}{J_x}$$

Fogazott gerenda

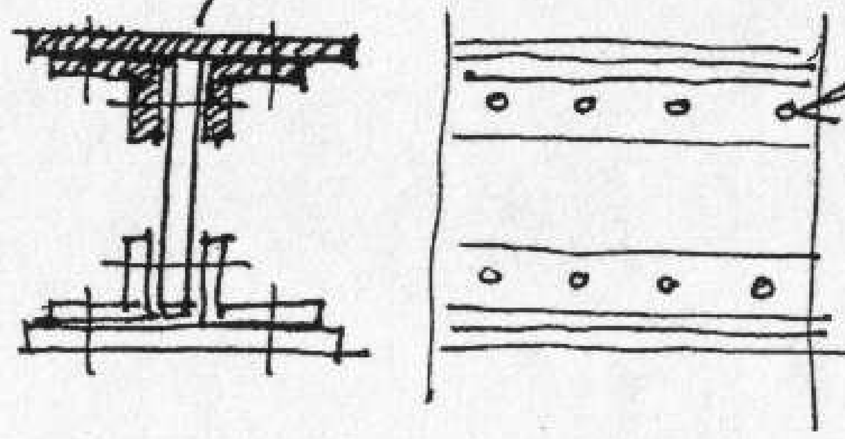


Egy fogra jutó csúsztatóerő:

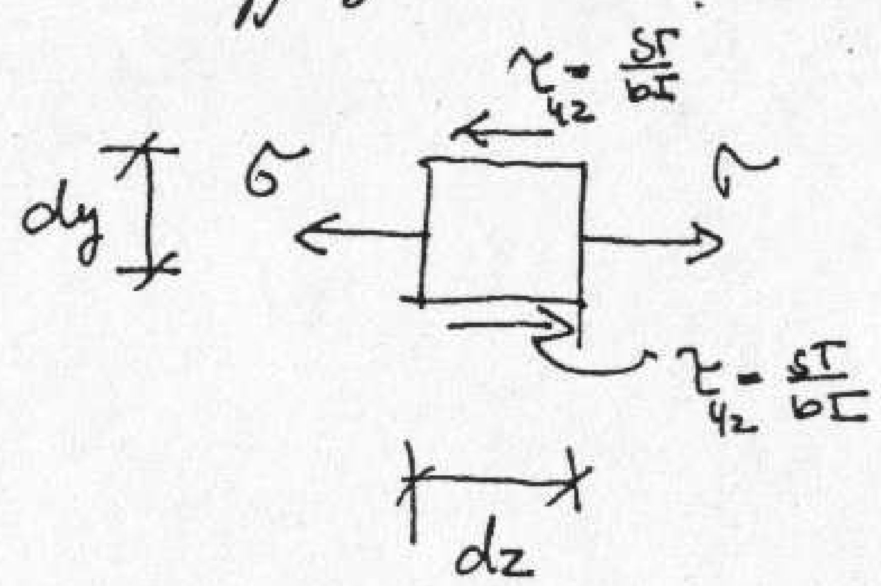
$$E_{fog} = \int_{z_1}^{z_2} T\,dz \cdot \frac{S_x}{J_x}$$

Melyik km.-rész statikai nyomatéka S_x?

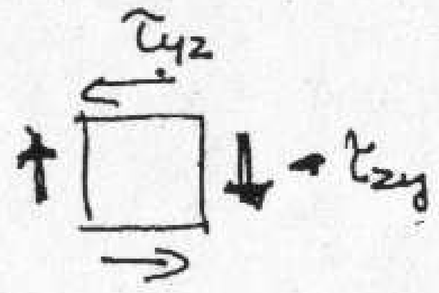
→ Ez az elcsúszni akaró km.-rész, ha ezt a szegecs-sort vizsgáljuk



Függőleges metszeten ébredő τ feszültségek →



→ ΣM=0 →



$$\underbrace{\tau_{yz}\,dz}_{\text{erő}}\ \underbrace{dy}_{\text{kar}} = \underbrace{\tau_{zy}\,dy}_{\text{erő}}\ \underbrace{dz}_{\text{kar}}$$

⇓

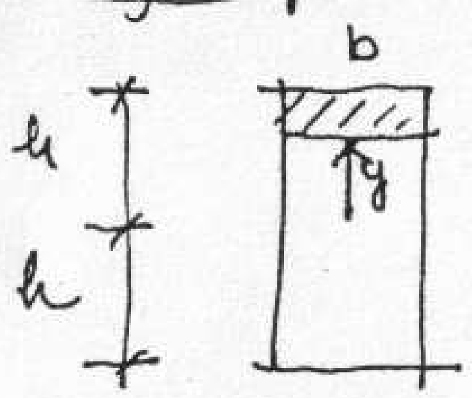
$$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$
Nyírófeszültségek dualitása

$\frac{T}{J}$ konstans a km.-ben →

$$\tau(y) = \frac{T}{J}\cdot\frac{S_x(y)}{b(y)}$$

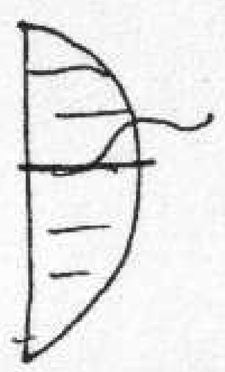
Ha b is konstans, akkor $\tau_{max} \to S_{x\,max} \to$ súlypont. Ez akkor is igaz, ha b nem konst., ... a súlypontban. minimális

Téglalap

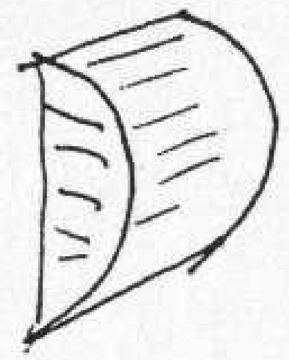


$$\tau(y) = \frac{T}{Jb} \cdot S_x(y) = \text{const.} \cdot b(h-y)\frac{y+h}{2} =$$

$$= c_2 - c_1 y^2$$

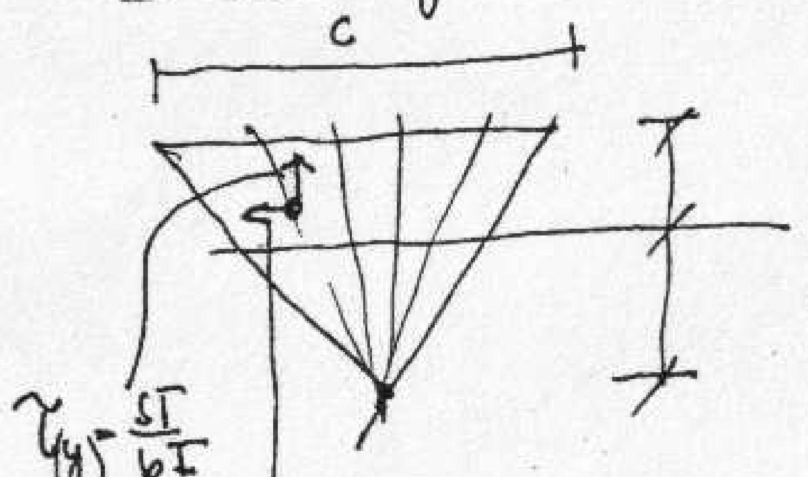


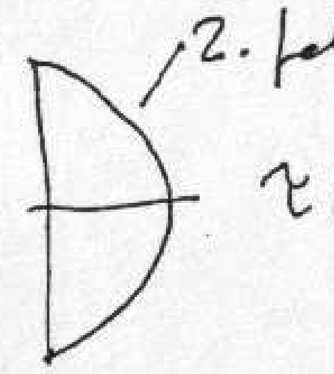
$$\tau_{max} = c_2 = \frac{3T}{4bh} = \frac{3}{2}\tau_{átl.}$$



Feszültségi test

Háromszög

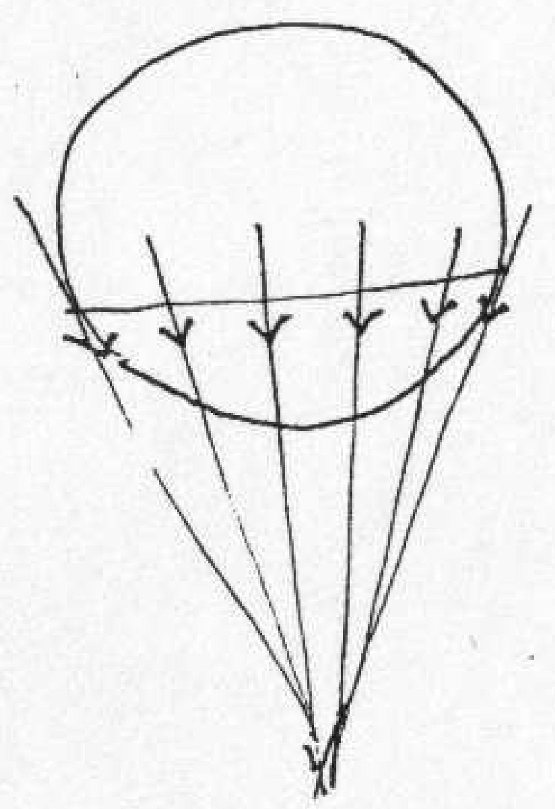


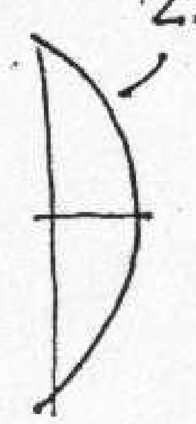


$$\tau(y)_{max} = \frac{3T}{ch} = \frac{3}{2}\tau_{átl.}$$

ezt a komponenst a geometriából kell visszaszámolni!

Kör

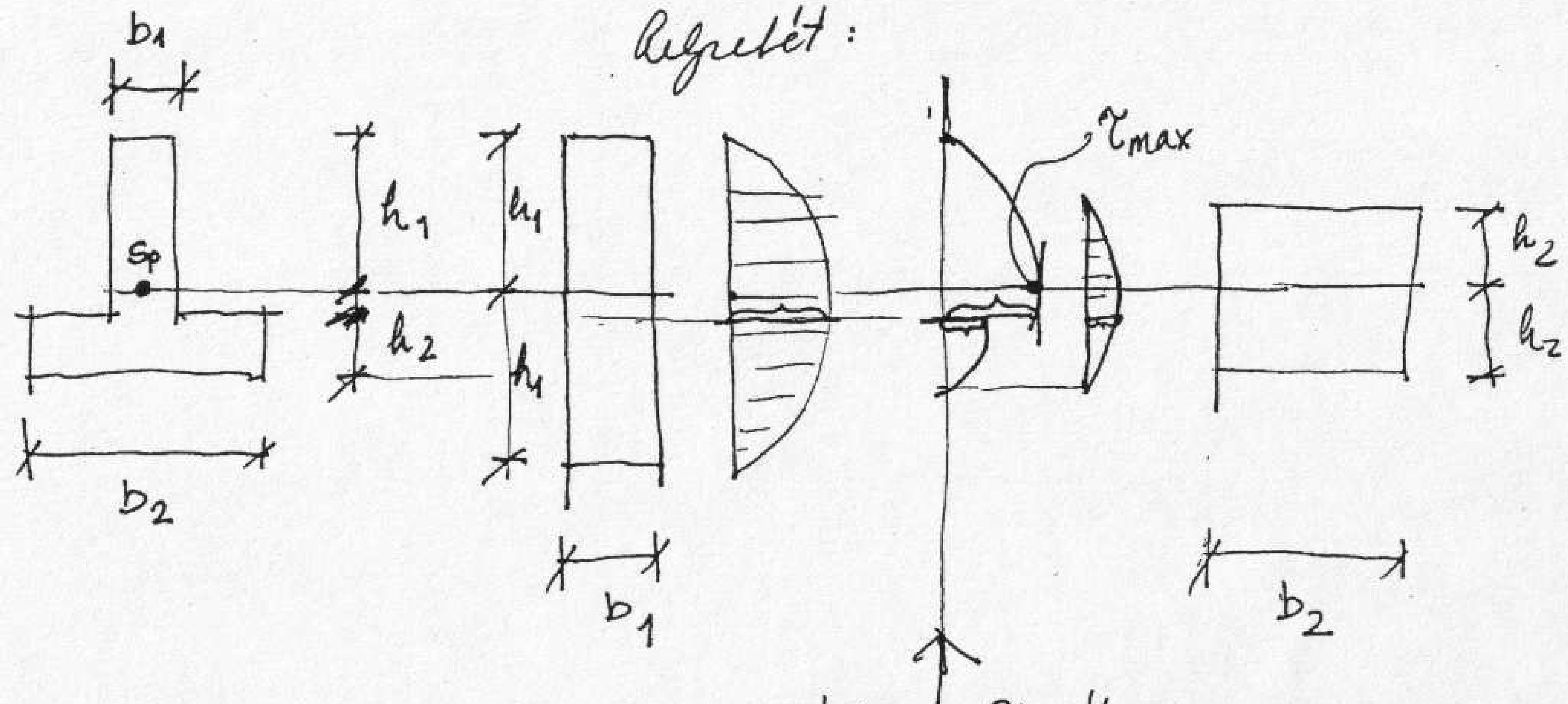




$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\,\frac{T}{8r^2\pi} = \frac{4}{3}\tau_{átl.}$$

Összetett szelvények

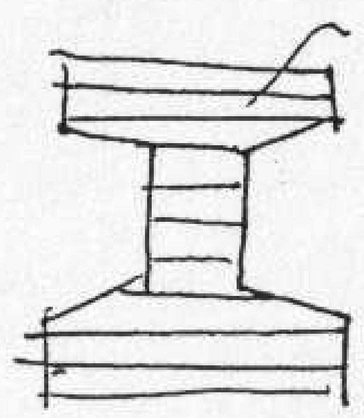
A $\tau(y)$ ábra bármely oldalról (alulról v. felülről) rajzolható, a megrajzolt szakasz független a továbbiaktól (kivéve a sp. helyzetét:



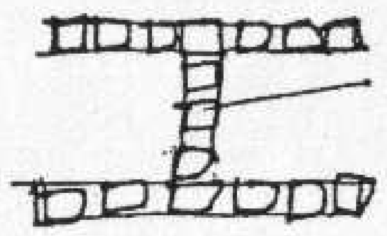
Vékonyfalú szelvények

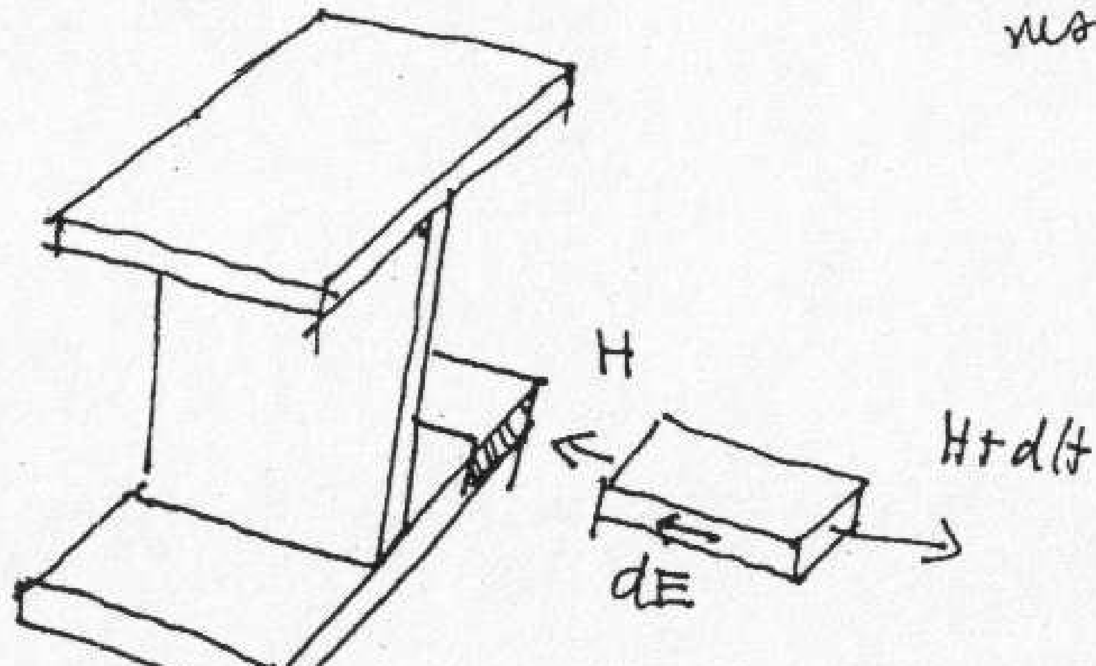
τ mindig $\parallel$ a szelvény középvonalával

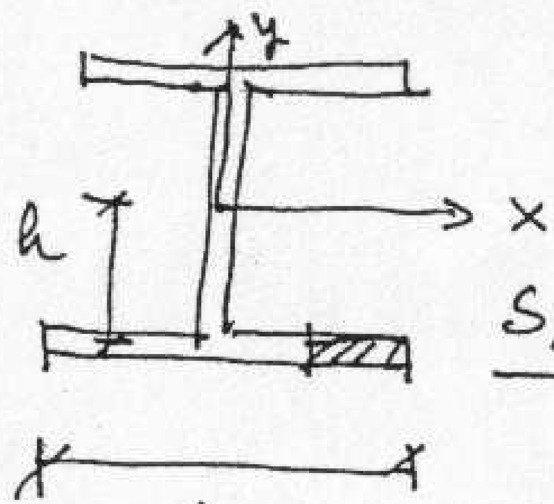
Eddig:



most:

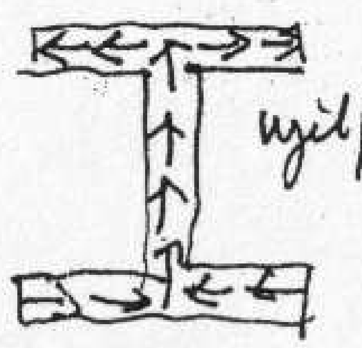




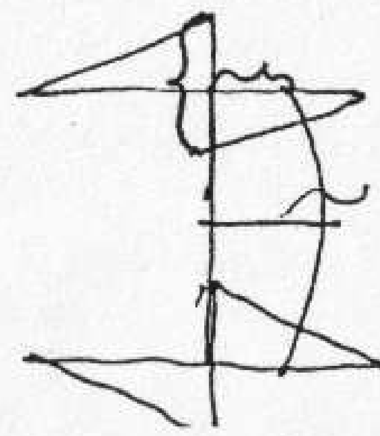


$$S_x = v \cdot h\left(\frac{b}{2} - x\right)$$

$$\tau = \frac{S_x T}{bI}$$

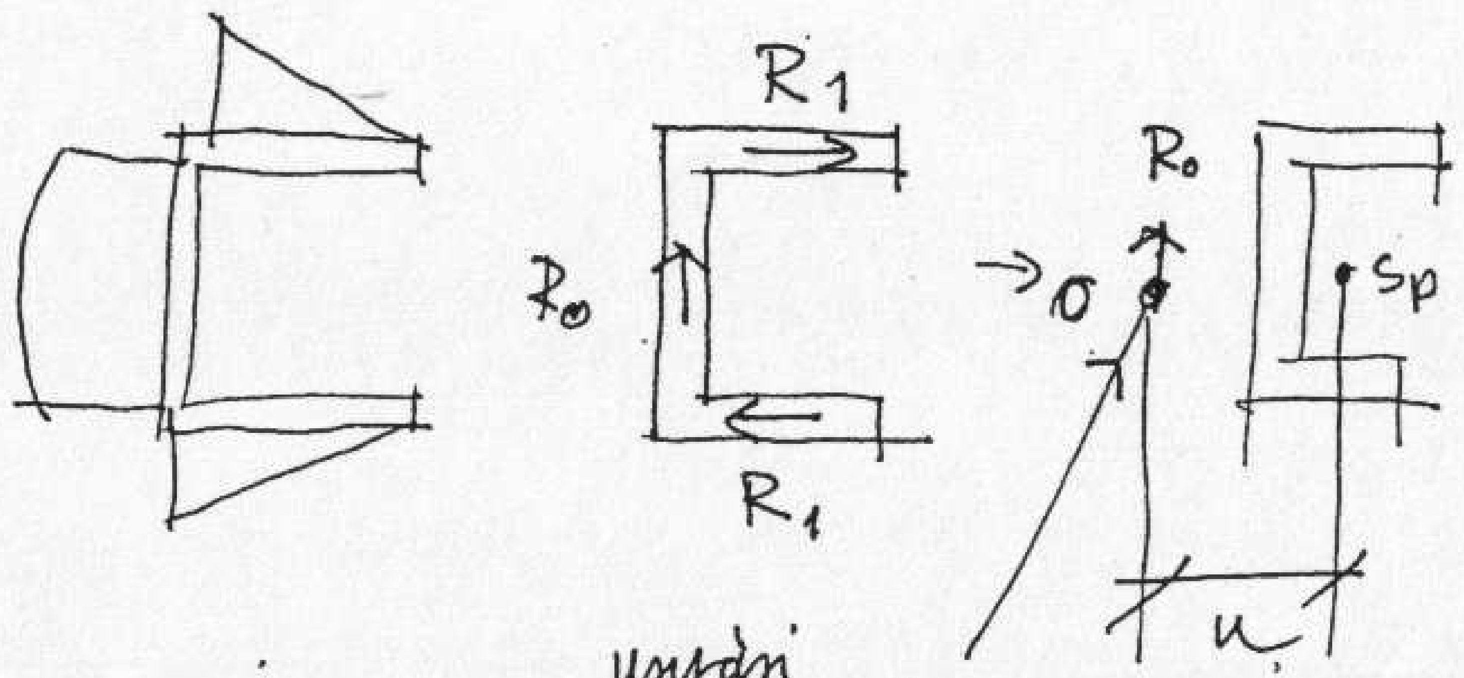


nyírófolyamosság!



Nyírási középpont

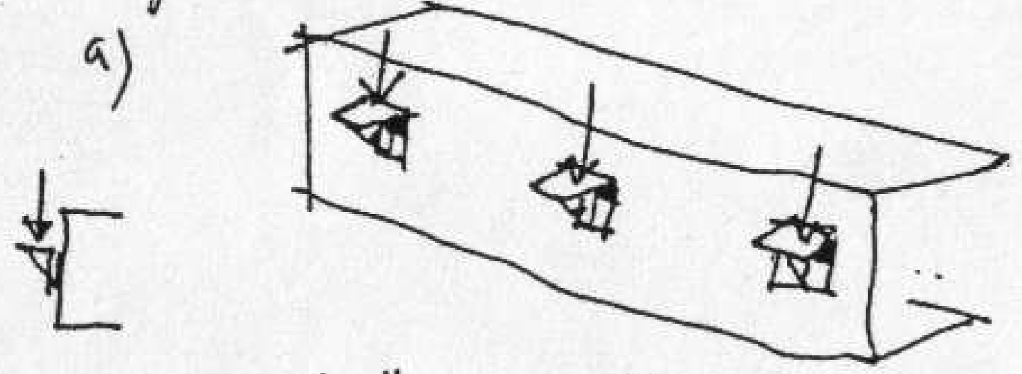
Nem szimmetrikus, de vékonyfalú km



nyírási középpont
(nyírófesz.-eredőjének hatásvonalán)

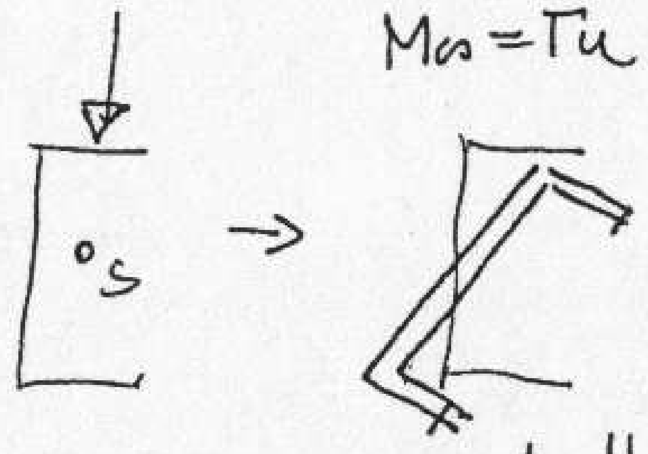
megoldás:

a)



teher "0"-n áthalad

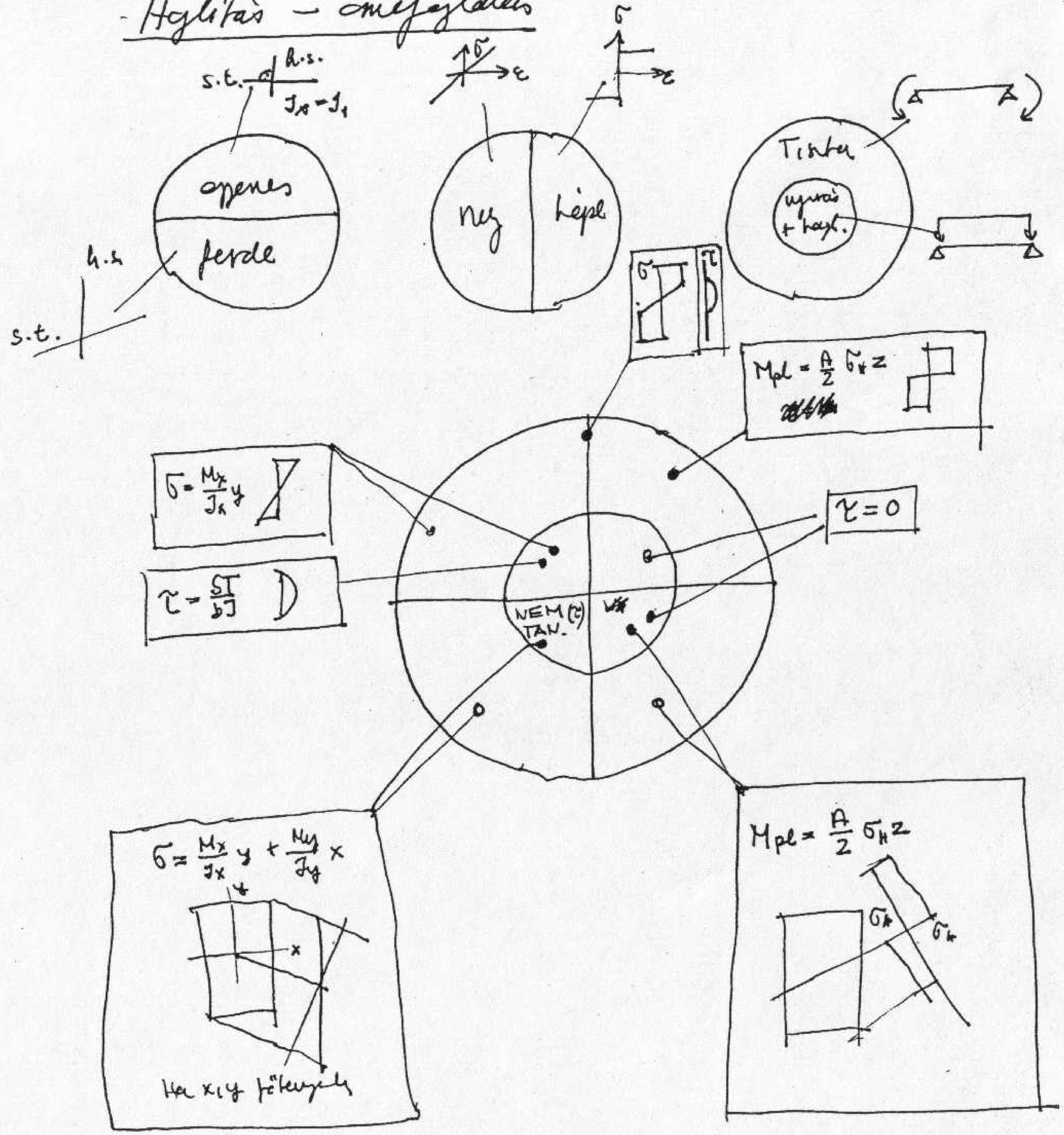
b)



csavarás !!

2.13

Hajlítás – összefoglalás



2.14 Lineáris szuperpozíció

Legyen $y = f(x) = ax$

ekkor $f(x^1) + f(x^2) = f(x^1 + x^2)$, hiszen

$$ax^1 + ax^2 = a(x^1 + x^2).$$

Ez akkor is igaz, ha a és x vektorok (y skalár)

$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad y = \underbrace{\underline{a}\,\underline{x}}_{\text{skaláris szorzat}} = a_1 x_1 + a_2 x_2$

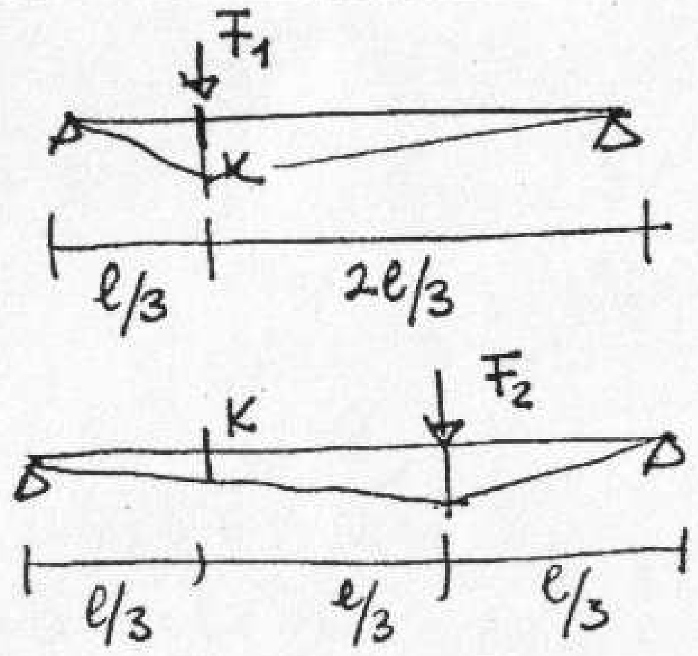
$$f(\underline{x}^1) + f(\underline{x}^2) = a_1 x_1^1 + a_2 x_2^1 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 =$$

$$= a_1 (x_1^1 + x_1^2) + a_2 (x_2^1 + x_2^2) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 + x_1^2 \\ x_2^1 + x_2^2 \end{bmatrix} = \underline{a}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$$

Ez a lineáris szuperpozíció elve.

Példa:

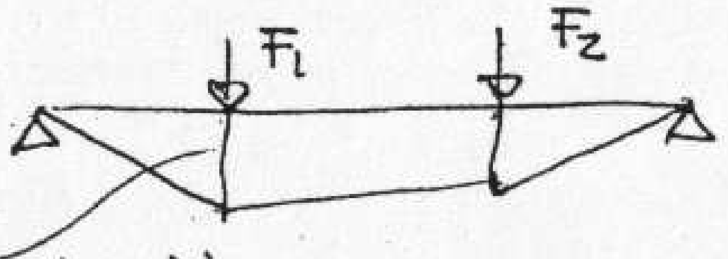


$M_K = \frac{2F_1}{3} \cdot \frac{l}{3} = \frac{2F_1 l}{9}$

$M_K = \frac{F_2}{3} \cdot \frac{l}{3} = \frac{F_2 l}{9}$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}l \\ \frac{l}{9} \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ $\quad y = M_K$ $\quad \underline{x}^1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}$

$$f(\underline{x}^1) + f(\underline{x}^2) = \frac{l}{9}(2F_1 + F_2) = f(\underline{x}^1 + \underline{x}^2)$$



$\frac{l}{9}(2F_1 + F_2) = f(x^1 + x^2)$

2.15 A lin. szuperpozíció elvének alkalmazása nyalmas feszültségek számításakor

Eddigi eredmények:

1) $\sigma = \frac{F}{A}$ (közp. húzás/nyomás)

2) $\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$ (egyenes hajlítás)

$\left(\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \right.$ (ferde hajl.) $\left. \right)$ később

Az előbbi jelölésekkel

$\overline{y} = \sigma$ $\quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 1/A \\ y/J_x \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x}^1 = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}$

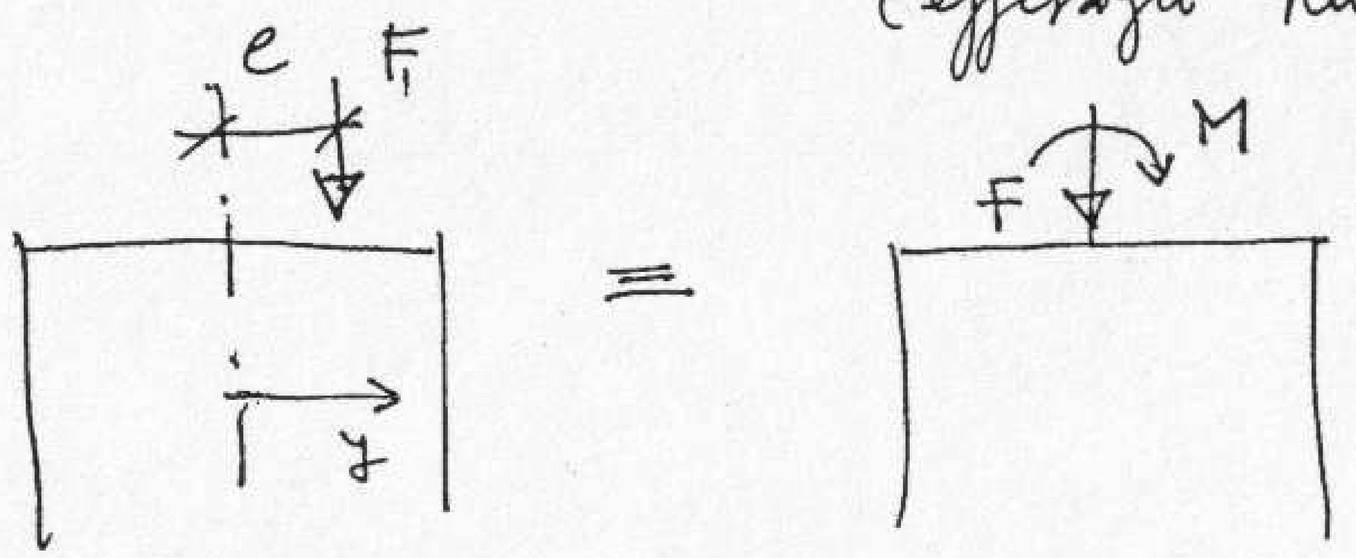
[illegible]

$\longrightarrow$ 1) $f(\underline{x}^1) = \underline{a}\,\underline{x}^1$

2) $f(\underline{x}^2) = \underline{a}\,\underline{x}^2$

$$\sigma = f(\underline{x}^1 + \underline{x}^2) = f(\underline{x}^1) + f(\underline{x}^2) = \underbrace{\frac{F}{A} + \frac{M_x}{J_x} y}_{}$$

Külpontos húzás/nyomás (egyenszögű külpontosság esetén)



$\sigma = \mp\left(\frac{1}{A} + \frac{e y}{J_x}\right)$ $\qquad \sigma = 0$ (s.t.)

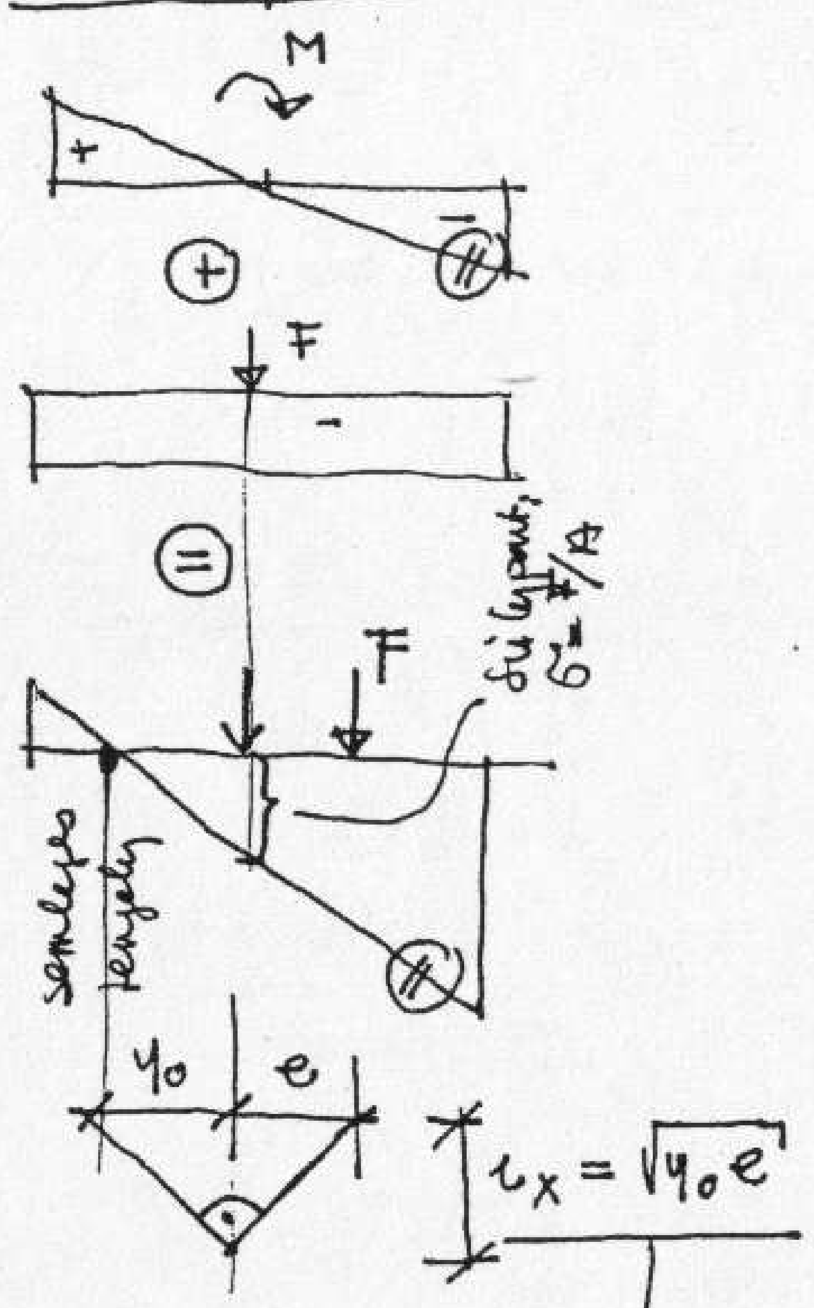
$\frac{1}{A} = -\frac{e y_0}{J_x}$

$y_0 = -\frac{J_x}{A e} = -i_x^2 e$

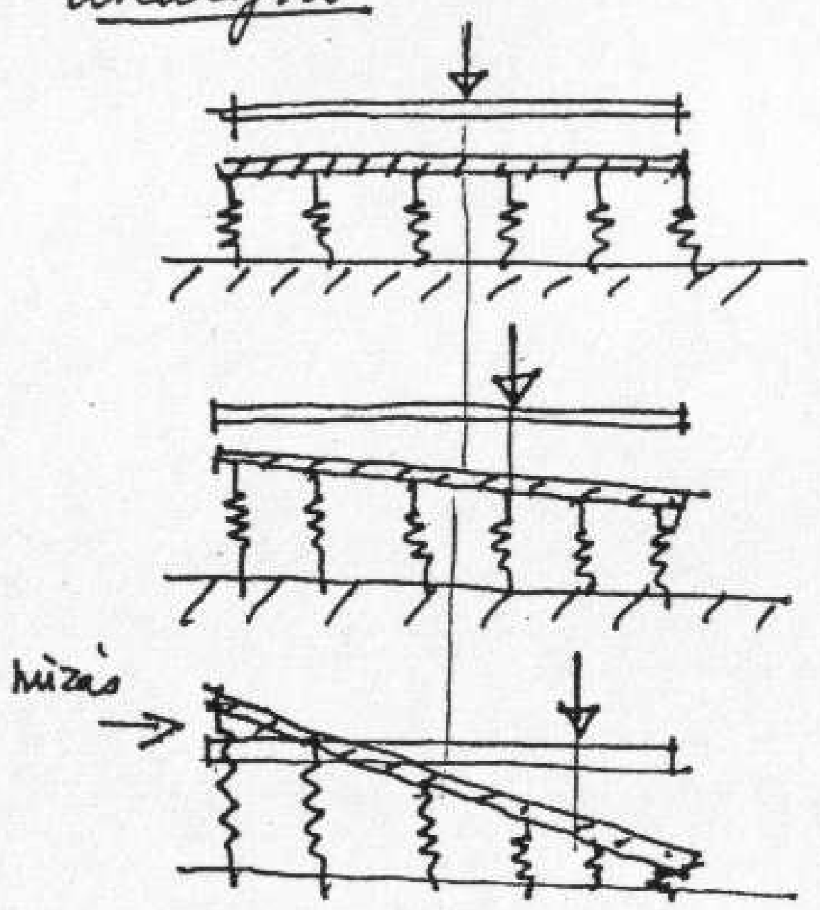
inerciasugár [m]

$-e y_0 = i_x^2$

Feszültségábra

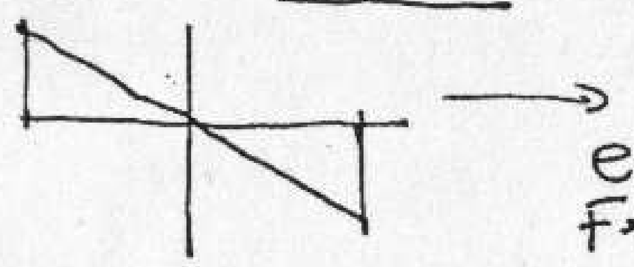


analógia

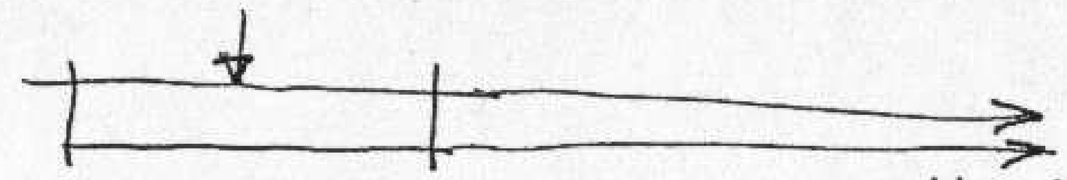


Szélső esetek

$y_0 = 0 \Rightarrow e = \infty \rightarrow$ hajlítás



$e = 0 \Rightarrow y = \infty \rightarrow$ közp. húzás/nyomás



Kéttengelyű (ferde) külpontosság

$\sigma = F/A \qquad \sigma = \frac{M_x}{J_x} y \qquad \sigma = \frac{M_y}{J_y} x$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1/A \\ y/J_x \\ x/J_y \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} F \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad \sigma = f(\underline{x}^1) + f(\underline{x}^2) + f(\underline{x}^3) = f(\underline{x}^1 + \underline{x}^2 + \underline{x}^3) =$$

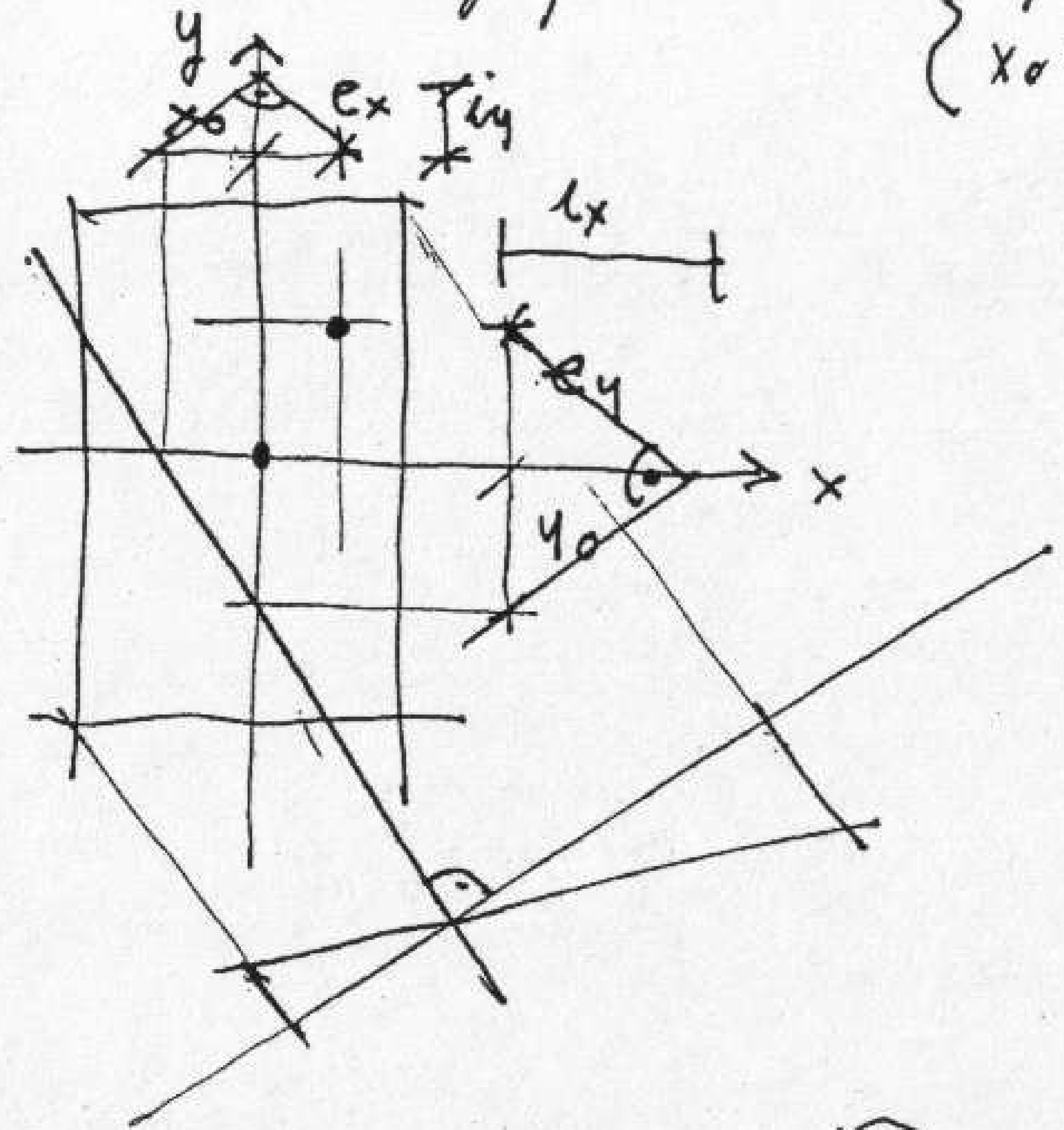
$$= \frac{F}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x =$$

$$\underline{x}^1 = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_y \end{bmatrix} \qquad F\left(\frac{1}{A} + \frac{e_y y}{J_x} + \frac{e_x x}{J_y}\right)$$

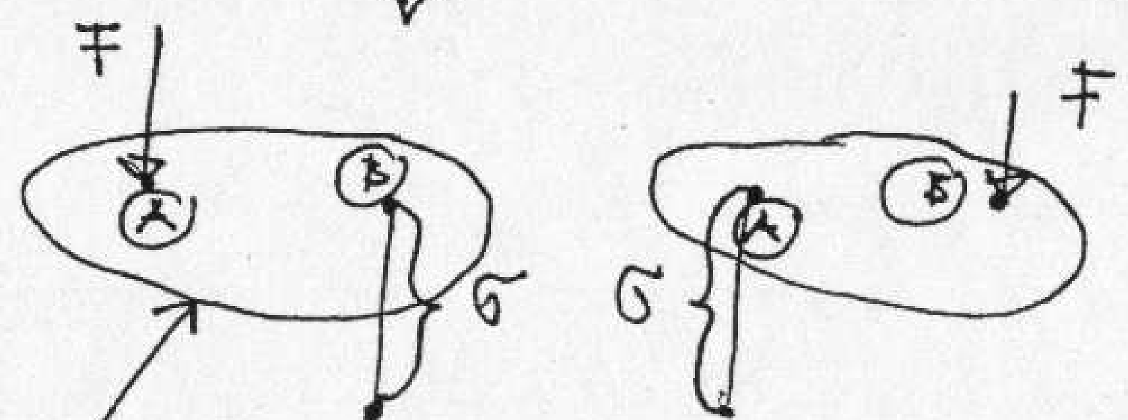
Semleges tengely: $\frac{e_y}{J_x} y + \frac{e_x}{J_y} x + \frac{1}{A} = 0$

$\sigma = 0$

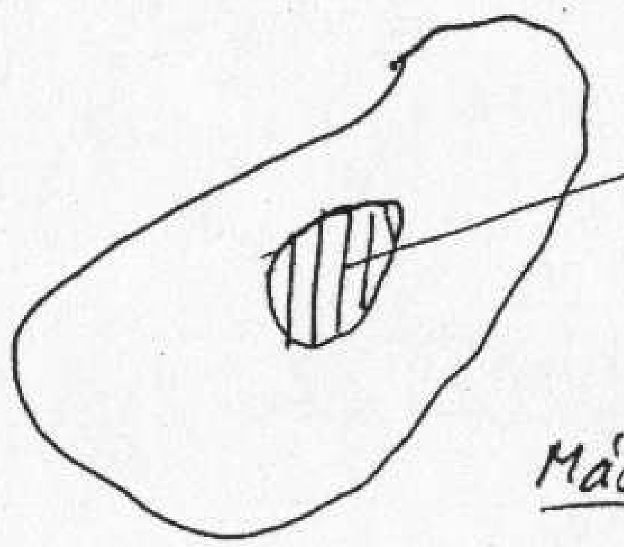
tengelymetszetek: $\begin{cases} y_0 = 0 \rightarrow x e_x = -i_y^2 \\ x_0 = 0 \rightarrow y e_y = -i_x^2 \end{cases}$



A képlet szimmetrikus $\quad e_y \leftrightarrow y \qquad e_x \leftrightarrow x$

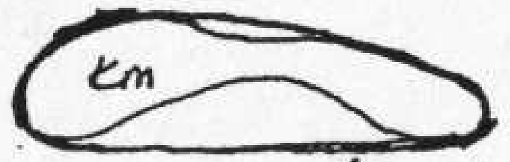


2.6 Keresztmetszet pontjainak osztályozása



Ezen területen belül támadó nyomóerő esetén csak nyomófeszültségek keletkeznek → MAGIDOM

Másképp: Azon pontok mértani helye amelyeken támadó erő esetén a s.t. érinti a keresztmetszet konvex burkát

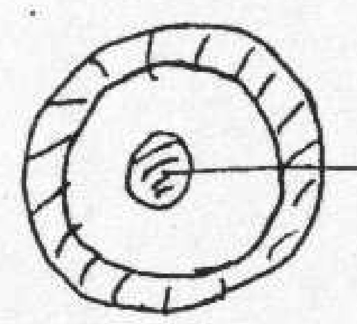


Konvex burok (rajzolat fonál)

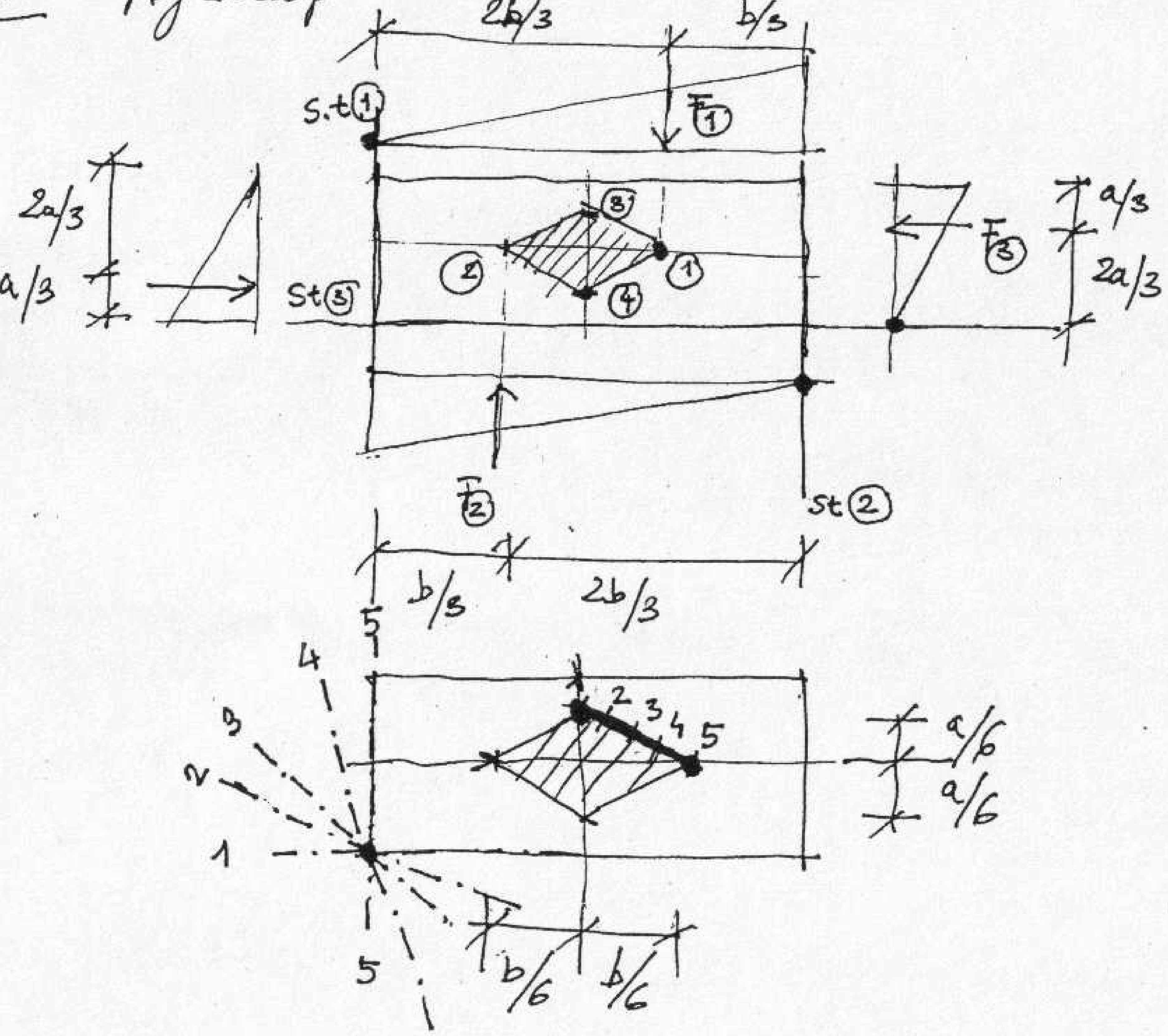
Magidom tulajdonságai

a) Mindig konvex idom

b) lehet (részben vagy egészben) a km-en kívül, de mindig a konvex burkon belül van.

pl. 

példa: téglalap

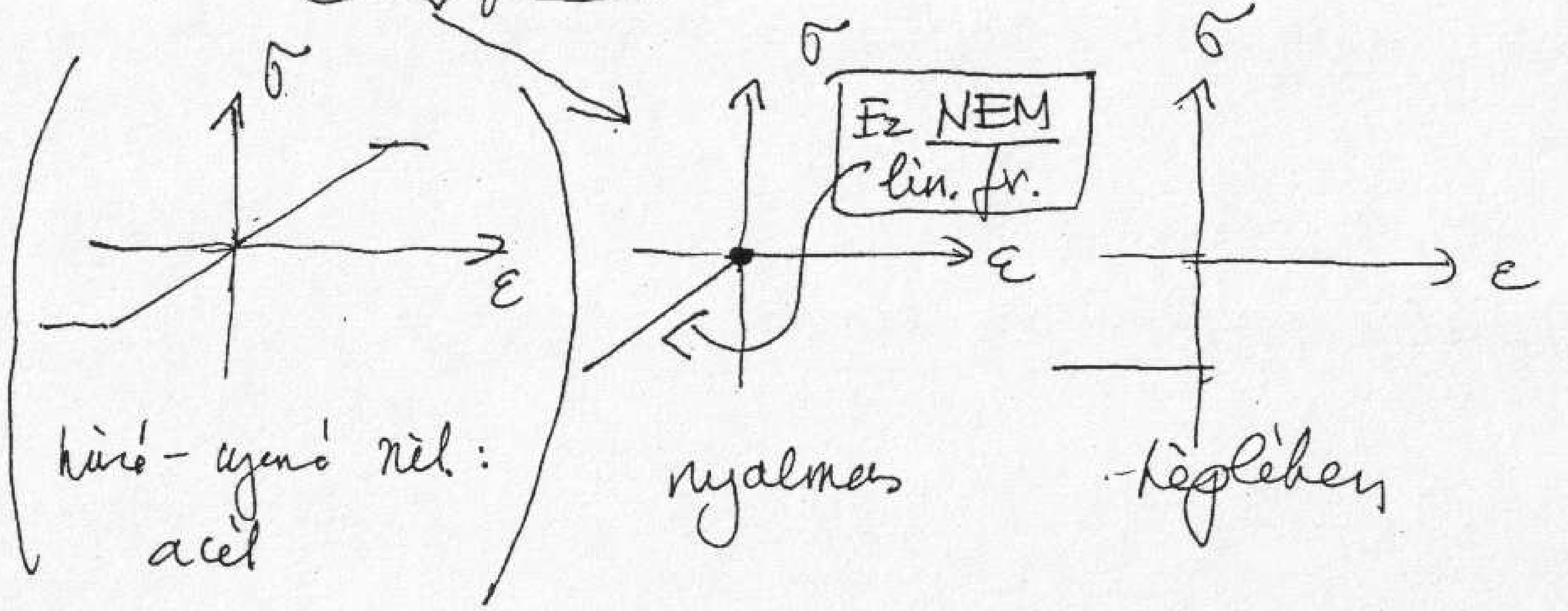


Dualitás: magidom-határ egyeneseinek a konvex burok pontja ~~konvex burok~~ ~~pontjának~~ ~~a magidom~~
magidom-határ pontjának a konvex burok egyenese felel meg.

Magidom gyakorlati jelentősége

Csak nyomószilárdsággal rendelkező anyag:

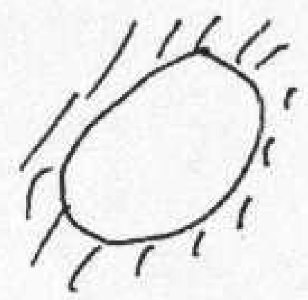
pl. beton, falazat



Ilyen az esetében 3 eset lehet nyomás esetén:


a) döféspont a magidomban → teljes km. dolgozik ⇒

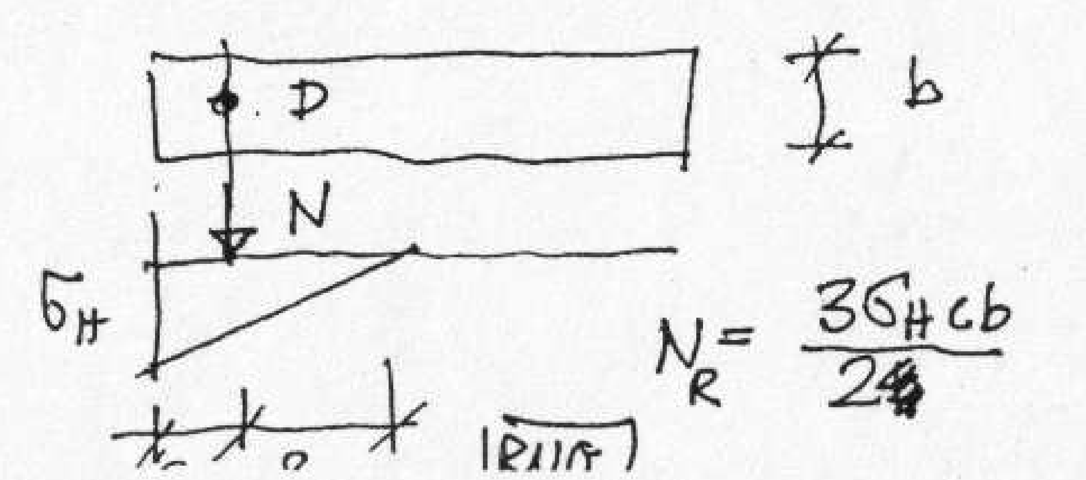
→ ugyanúgy számítandó, mint húzó-nyomó szilárdság esetén (pl.: $\sigma = \frac{M_x}{J_x}y + \frac{M_y}{J_y}x + \frac{F}{A}$)

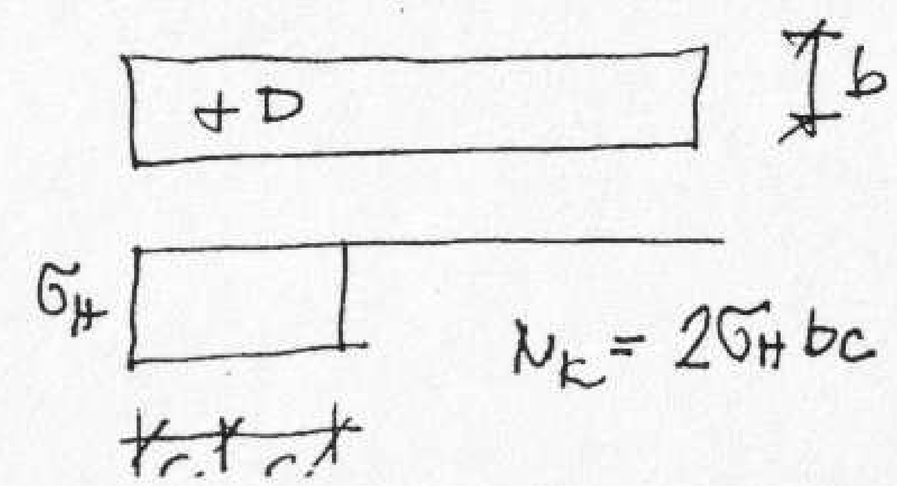

b) döféspont a km-en kívül → NINCS EGYENSÚLY


c) döféspont a magidomon kívül, de a km-n belül → Nemlineáris feladat (anyagegy. nemlin. → NINCS szuperpozíció →

— keressük a dolgozó km.-t azon feltétel mellett, hogy $\Sigma N = 0$, $\Sigma M = 0$

Pl.



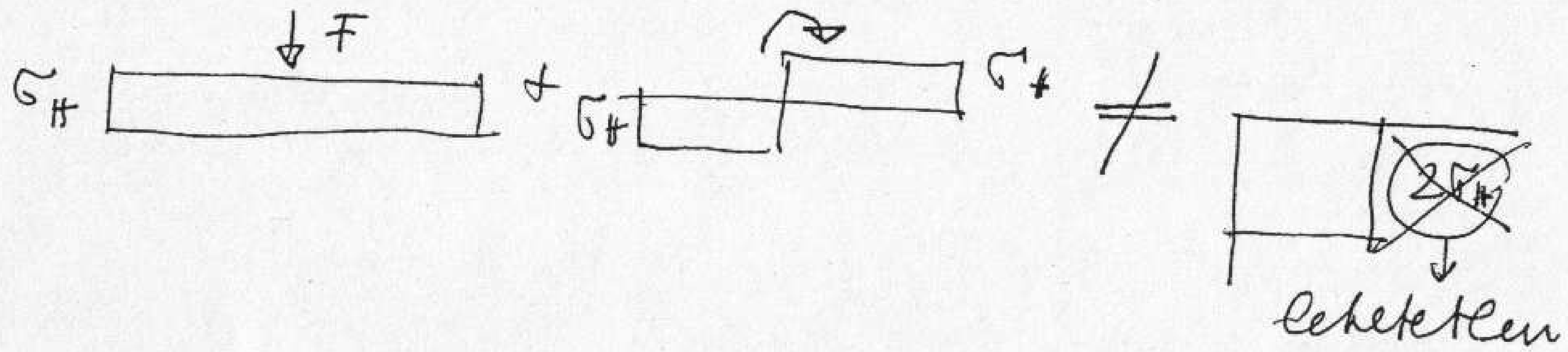


Eddig feltételeztük, hogy visszavezetjük az igénybevételeket és az ezekből külön-külön számított feszültségekre alkalmaztuk a lin. szuperpozíció elvét.

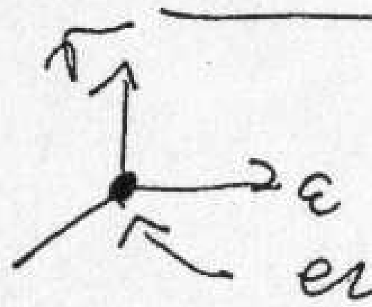
Az alábbit azért tehettük, (azért voltak lineárisak az összefüggések) mert az axiómákból ez következett:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = ax + by + c$$

Képlékeny esetben ez már nem teljesül!

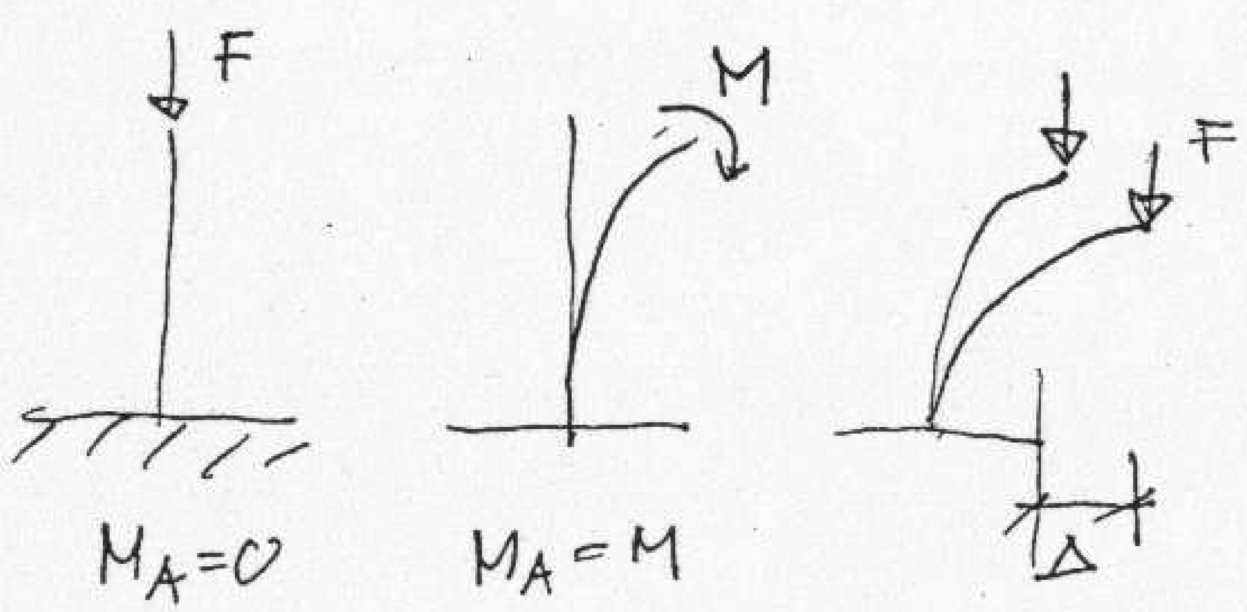


Akkor sem teljesül, ha rugalmas ugyan az anyag, de nincs linearitás → később



ez nem lineáris függvény (két egyenes)

Ugyanezért nem teljesül magukra az igénybevételekre sem!

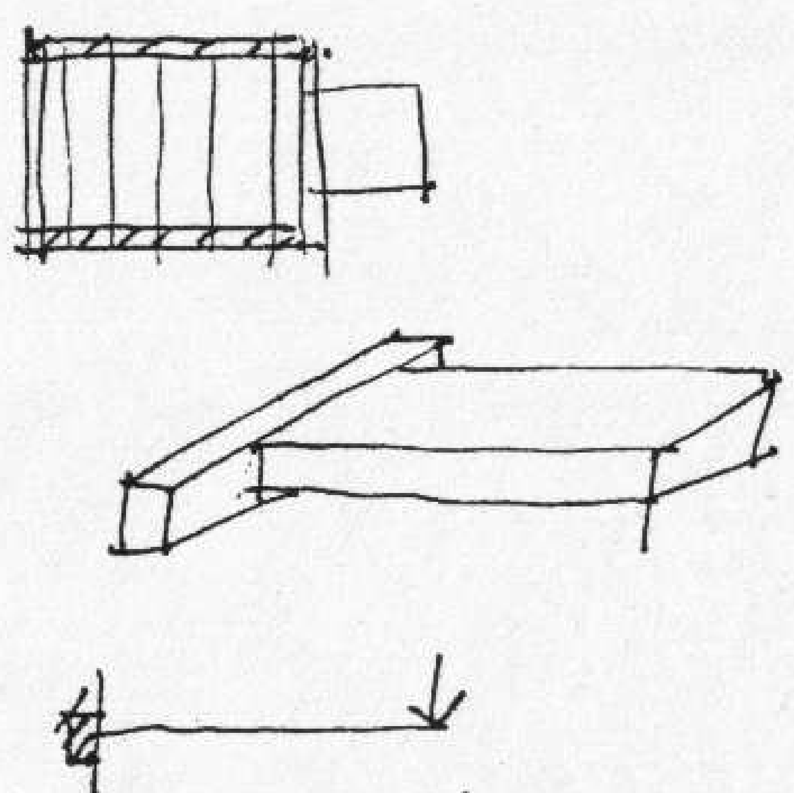


$M_A = 0$ $M_A = M$ $M_A = M + F\Delta$

részletesebben Stat II.

2.17 Csavarás

Egyensúlyhoz szükséges

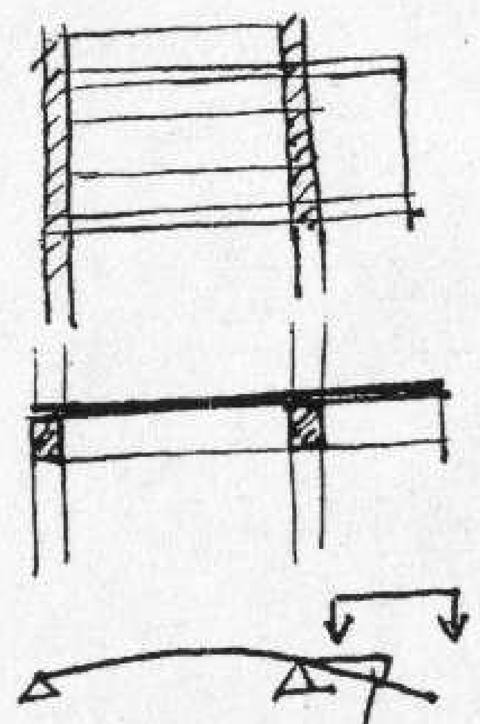


A bef. nyomatékot a gerenda csavarási merevsége biztosítja

↓

KERÜLENDŐ

Kompatibilitáshoz szükséges

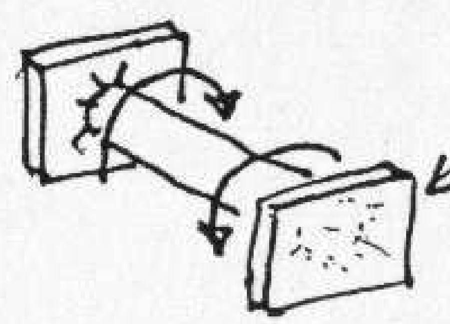


Δf → gerenda csavarási merevsége gátolja → ha nem jön létre, az épület nem szakad le

Gátolt csavarás: Külső kényszerek (megtámasztás) biztosítják a keresztmetszetek sík voltát.

↓

σ és τ

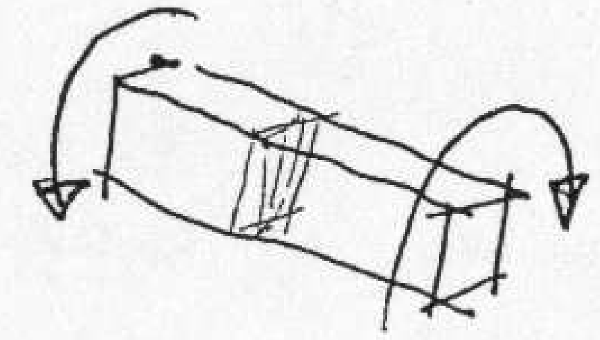


merev véglap → gátol

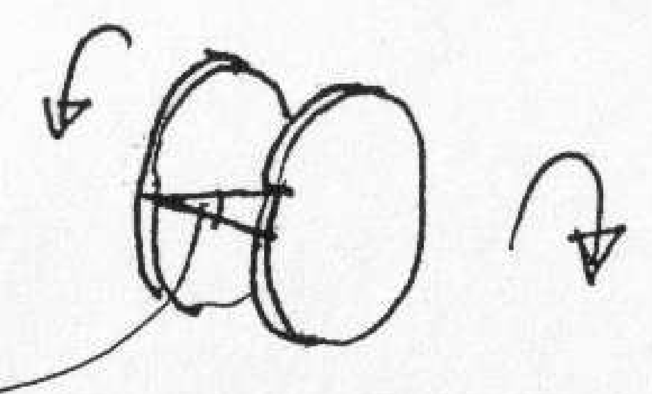
gátolatlan csavarás: A km. szabadon kitérhet síkjából

↓

csak τ



A B-N hipotézis csak kör v. körgyűrű esetén jó közelítés:



① egyensúly a) $\int \tau dA = 0$

$\int \tau r dA = M_{cs}$

② geometria $\gamma = a \cdot r$ — változó

a — konstans

③ anyag $\tau = G\gamma$

Megoldás:

$$M_{cs} = \int \tau r dA = \int G\gamma r dA = \int G a r^2 dA = Ga \underbrace{\int r^2 dA}_{I_p}$$

"poláris" inercia

$$\boxed{a = \frac{M_{cs}}{G J_p}}$$

$$\boxed{I_x + I_y} = \int x^2 dA + \int y^2 dA = \int (x^2+y^2) dA = \int r^2 dA = \boxed{I_p}$$

$$\gamma = \frac{M_{cs} r}{G J_p}$$

$$\tau = \frac{M_{cs}}{J_p} \cdot r$$

$$M_{csR} = \frac{\tau_H J_p}{R} = \frac{R^3 \pi}{2} \tau_H$$

rugalmas

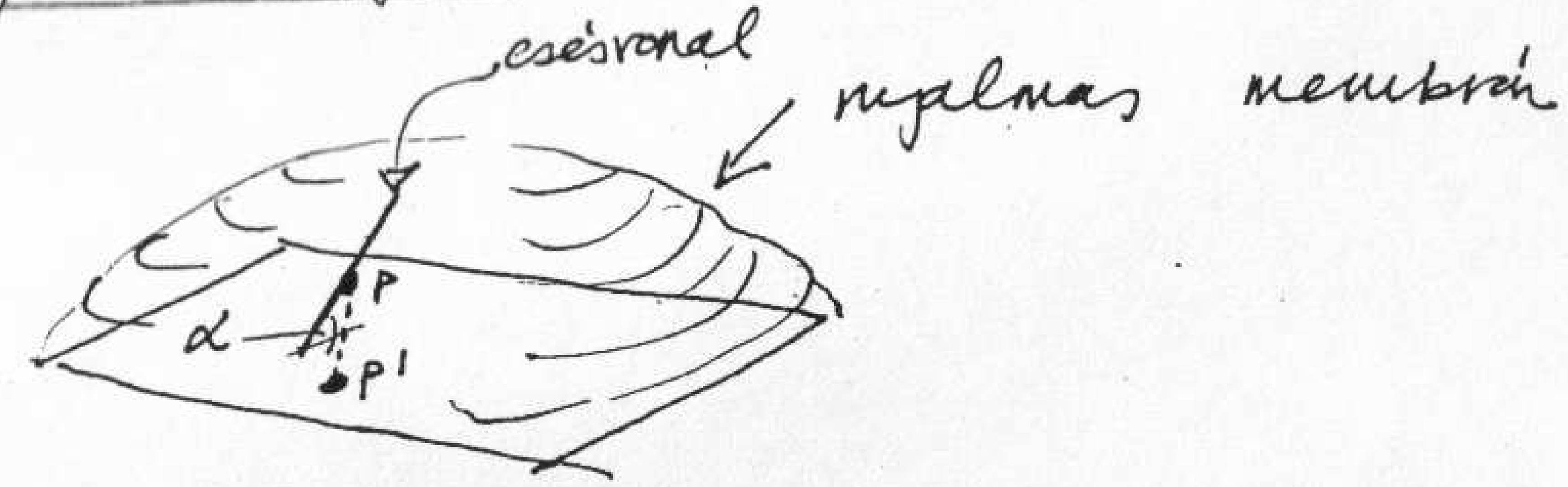
Képlékeny ① egyensúly $\int \tau r dA = M_{cs}$

② geom $\gamma = ar$

③ anyag $\tau = \tau_H$

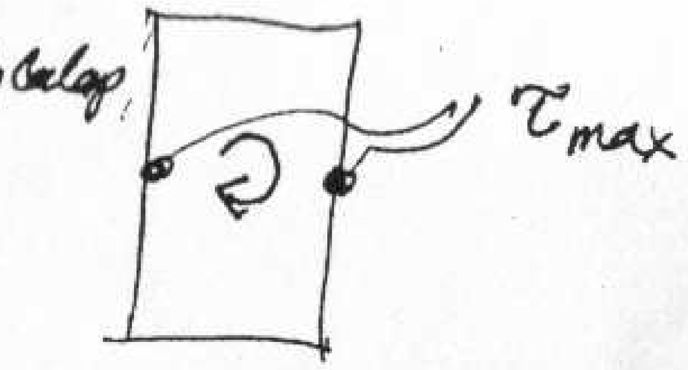
$$M_{cs} = \int \tau_H r dA = \tau_H \int r dA = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r ds \right) dr = \frac{2R^3\pi}{3} \tau_H$$

Hártya analógia



A P-beli esésvonal meredeksége (tg α) arányos a P' pontban csavarás hatására ébredő feszültséggel.

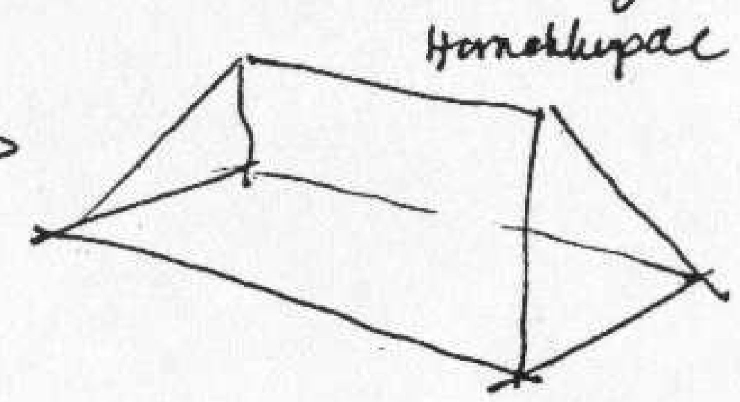
Célja: szemléltetés → pl. téglalap

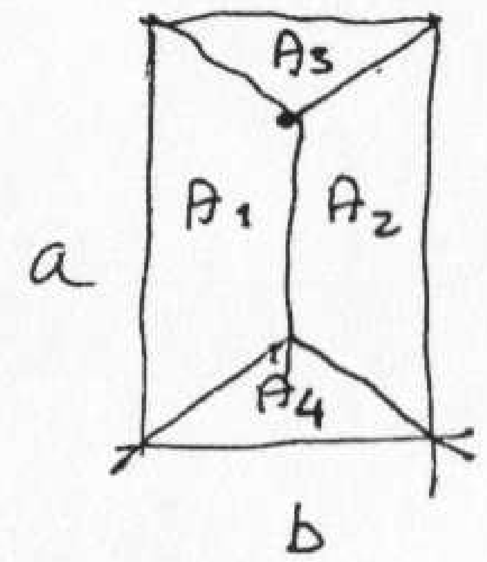


Homokkupac analógia

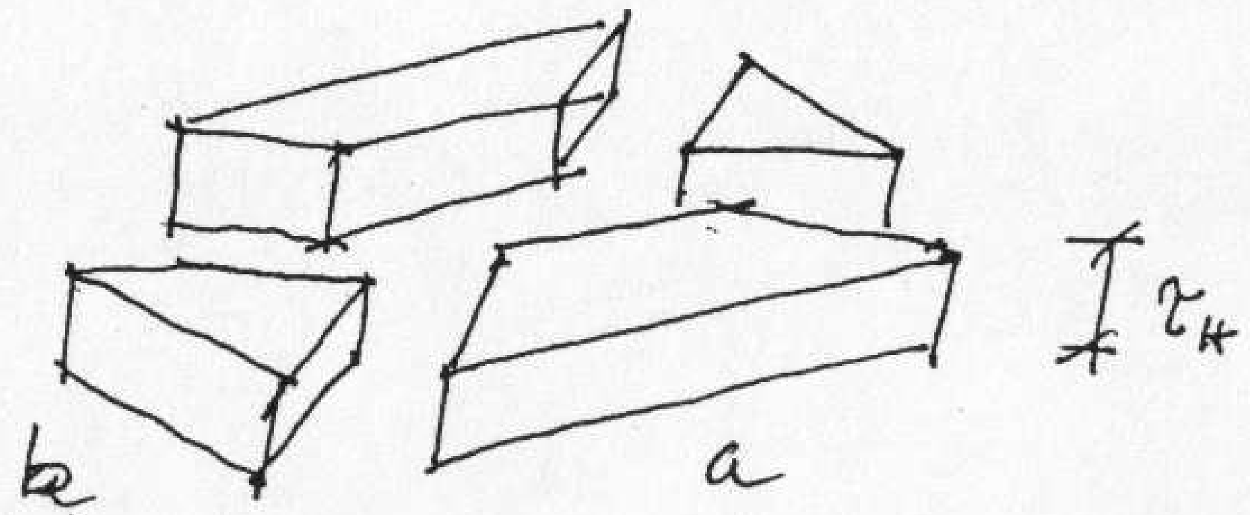
$\tau = \tau_H$ → felület meredeksége konstans →

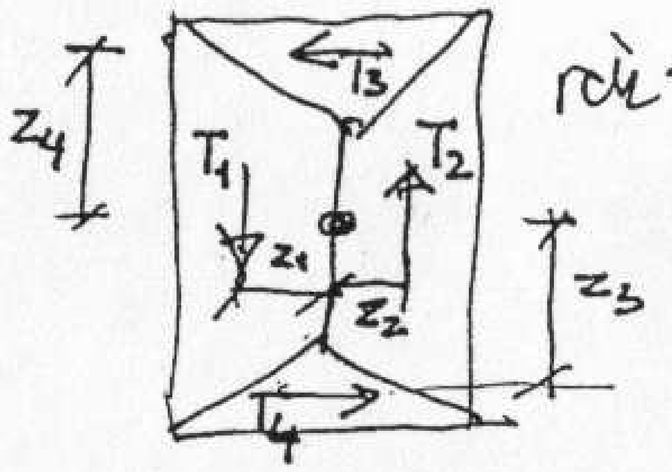
"tetőidom" →





Feszültségi testek





$$M_{csK} = \sum T_i z_i$$

$$T_i = A_i \cdot \tau_H$$