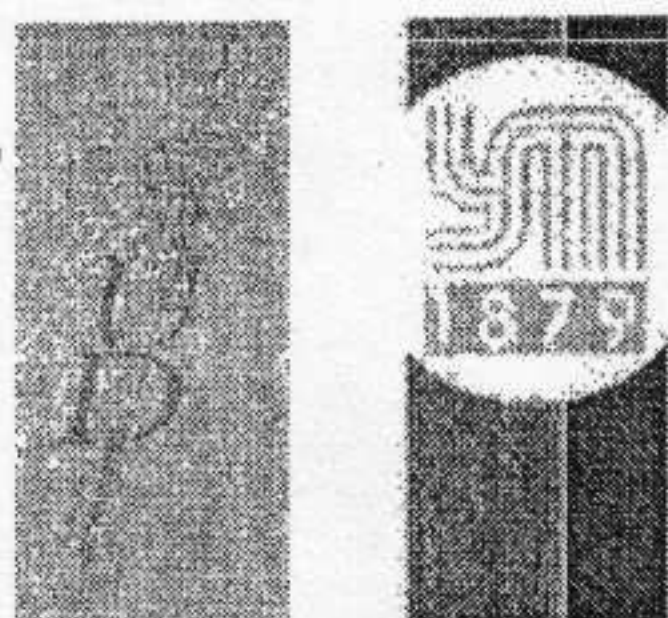


EURÓPAI UNIÓ  
STRUKTURÁLIS ALAPOK



SZÉCHENYI ISTVÁN  
EGYETEM  
GYŐR



## Szilárdságtan I.

Segédlet a BME Építészmérnöki Kar hallgatói részére

„Az építész- és az építőmérnök képzés szerkezeti és tartalmi fejlesztése”

HEFOP/2004/3.3.1/0001.01

Szilárdságtan-1 munkaközi jegyzet  
ver. 1.0.

Dr. Domokos Gábor előadásjegyzetei alapján  
összeállította Dr. Sipos András Árpád.  
Az ábrákat tajzolta: Domokos Réka és Kapsza Enikő.

# Tartalomjegyzék

|  |    |
|--|----|
| 1. Célkitűzések és alapfogalmak                            | 5  |
| 1.1. Szerkezetek modellezése                               | 5  |
| 1.2. Alapfogalmak intuitív bevezetése                      | 5  |
| 1.3. Az anyagegyenlet és a $\sigma - \varepsilon$ diagram  | 10 |
| 1.4. A feszültség általános meghatározása                  | 11 |
| 1.5. Kitérő  | 13 |
| 1.5.1. Síkbeli feszültség állapot                          | 13 |
| 1.5.2. A feszültségi tenzor                                | 14 |
| 1.5.3. A T tenzor tulajdonságai                            | 15 |
| 2. Feszültségek számítása a rúdmodellben                   | 19 |
| 2.1. A rúdmodell   | 19 |
| 2.2. Központos húzás - rugalmas                            | 21 |
| 2.3. Központos húzás - képlékeny                           | 23 |
| 2.4. Tiszta nyírás   | 24 |
| 2.5. Ferde metszeteken fellépő feszültségek                | 25 |
| 2.6. Tiszta hajlítás rugalmas alapon                       | 28 |
| 2.6.1. Egyenes hajlítás                                    | 28 |
| 2.6.2. Ferde hajlítás                                      | 31 |
| 2.7. Másodrendű nyomatékok tulajdonságai                   | 32 |
| 2.7.1. Tengely áthelyezés                                  | 32 |
| 2.7.2. Példa inercia-nyomaték kiszámítására                | 35 |
| 2.7.3. Példa $\sigma$ kiszámítására                        | 36 |
| 2.8. A ferde hajlítás összefüggéseinek értelmezése         | 36 |
| 2.9. Feszültségábra ferde hajlítás esetén                  | 39 |
| 2.10. Képlékeny hajlítás                                   | 39 |
| 2.10.1. Rugalmas-képlékeny átmenet egyenes hajlítás esetén | 41 |
| 2.10.2. Rugalmas-képlékeny átmenet a tartó szempontjából   | 41 |
| 2.11. Hajlítással egyidejű nyírás                          | 42 |
| 2.11.1. Példák a nyírófeszültség számítására               | 46 |
| 2.11.2. Nyírási középpont                                  | 48 |

|  |    |
|--|----|
| 2.12. Hajlítás - összefoglalás . . . . .                   | 49 |
| 2.13. Lineáris szuperpozíció . . . . .                     | 50 |
| 2.14. Lineáris szuperpozíció elvének alkalmazása . . . . . | 51 |
| 2.15. A keresztmetszet pontjainak osztályozása . . . . .   | 54 |
| 2.15.1. A magidom gyakorlati jelentősége . . . . .         | 54 |
| 2.16. Csavarás . . . . .                                   | 57 |

# 1. fejezet

## Célkitűzések és alapfogalmak

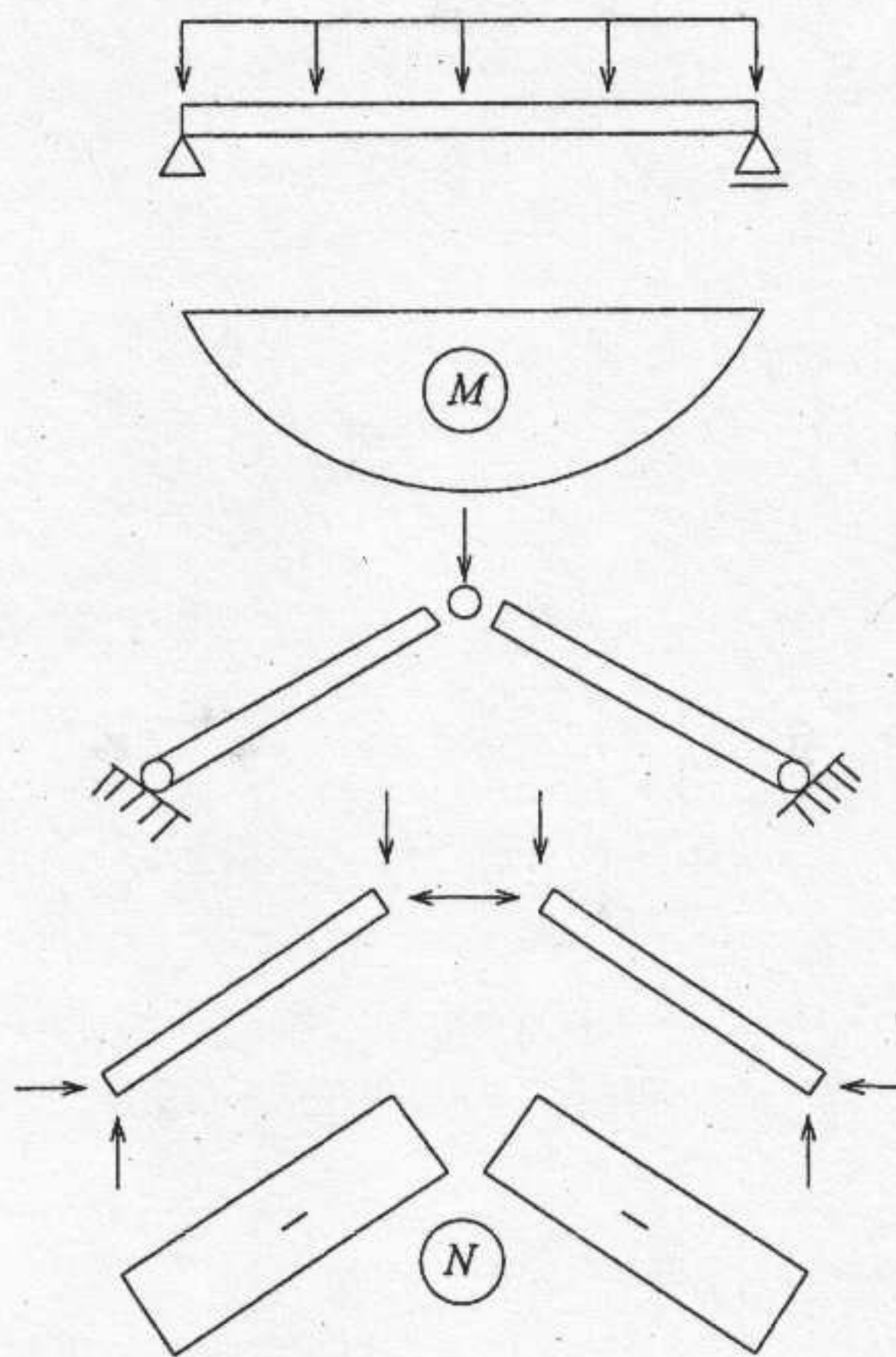
### 1.1. Szerkezetek modellezése

A statika tantárgyban csak *merev* testekből álló szerkezetekről volt szó, ez a *közelítés* bizonyos esetekben *elfogadható*, például statikailag határozott szerkezetek kapcsolati- és belsőerőinek számítására (1.1. ábra), amit a továbbiakban A típusú feladatnak nevezünk. Más feladatok megoldására azonban *alkalmatlan*, ilyen feladat lehet egy statikailag határozott szerkezet elmozdulásainak számítása (B típusú feladat), vagy statikailag határozatlan szerkezetek kapcsolati- és belsőerőinek meghatározása (C típusú feladat). Előfordulhat, hogy A típusú feladat esetén a *biztonság rovására* közelít a modell (A\* típusú feladat).

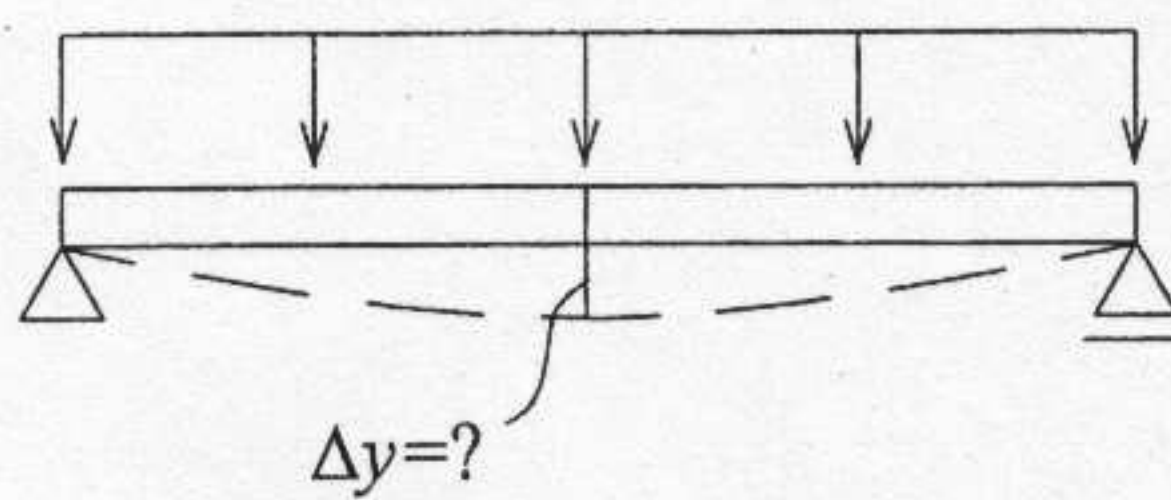
Célunk a modell *finomítása* annak érdekében, hogy B és C típusú feladatokat is *meg tudjunk oldani* és az A\* típusú feladatnál *korrigálni* tudjuk az elemi statikai számítást.

### 1.2. Alapfogalmak intuitív bevezetése

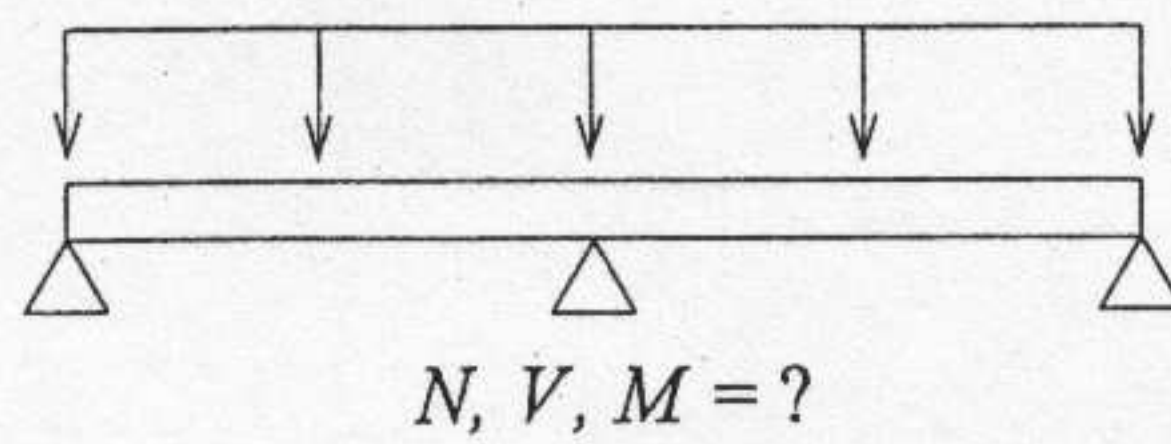
A merev test alakját erő hatására nem változtatja meg. A szilárdságtanban merev test helyett *szilárd* testet vizsgálunk, amelynek ugyan van alakja, de az erő hatására változik. A 1.5. ábrán látható rudat  $F$  erővel húzva a rúd megnyúlik, a végpont elmozdulását jelölje  $\Delta L$ ! Az összetartozó erő és elmozdulás értékeket egy grafikonon szoktuk ábrázolni, ezen erő-elmozdulás ( $F - \Delta L$ ) diagramok segítségével a szilárd testeket típusokba soroljuk. *Rugalmas* az a test, melynél az erőhatás elmúltával a deformáció is megszűnik. *Képlékeny* testnél a deformáció teljes mértékben megmarad, *rugalmas-képlékeny* esetben pedig részben megmarad (1.6. ábra). Egyelőre a rugalmas esettel foglalkozunk, ezen belül is a *lineárisan rugalmas* testekkel (1.7. ábra). A probléma



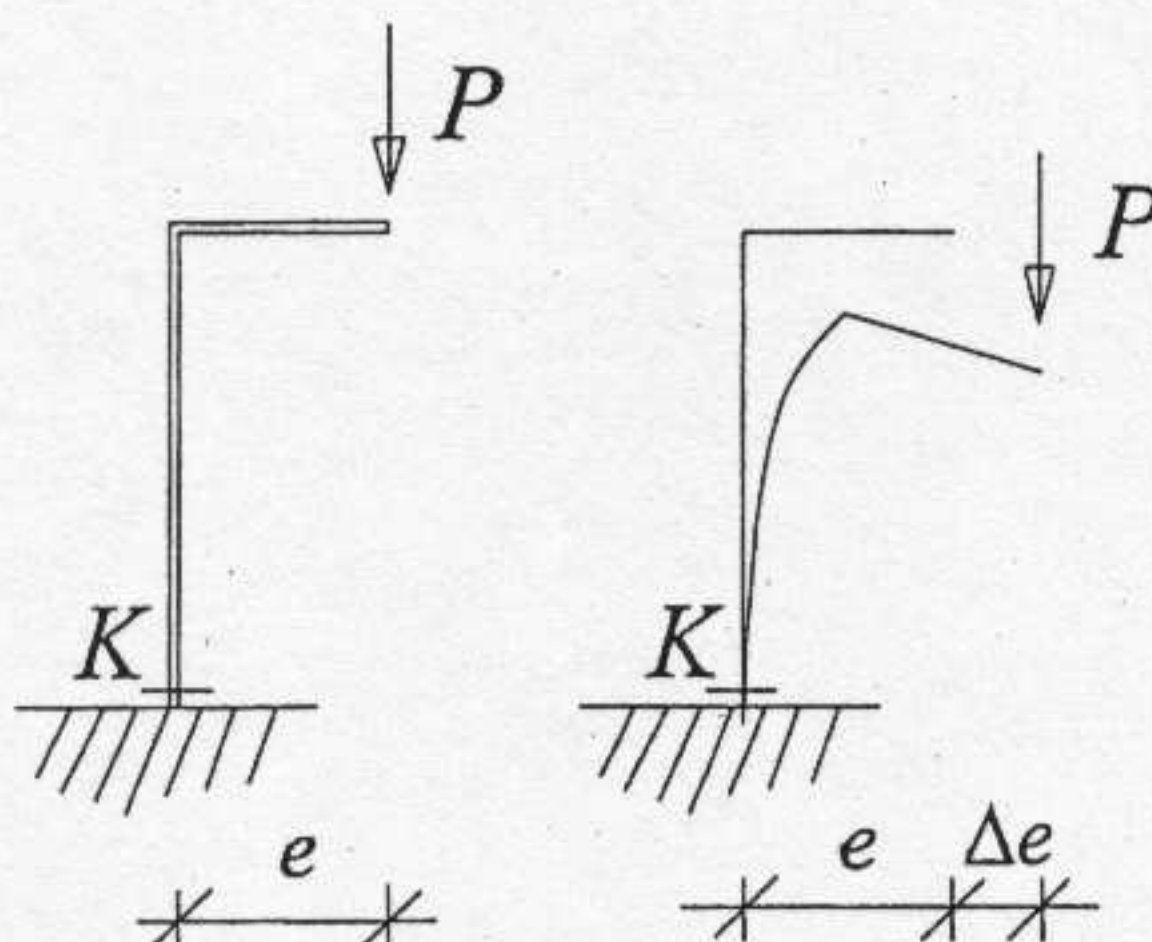
1.1. ábra. A típusú feladat



1.2. ábra. B típusú feladat

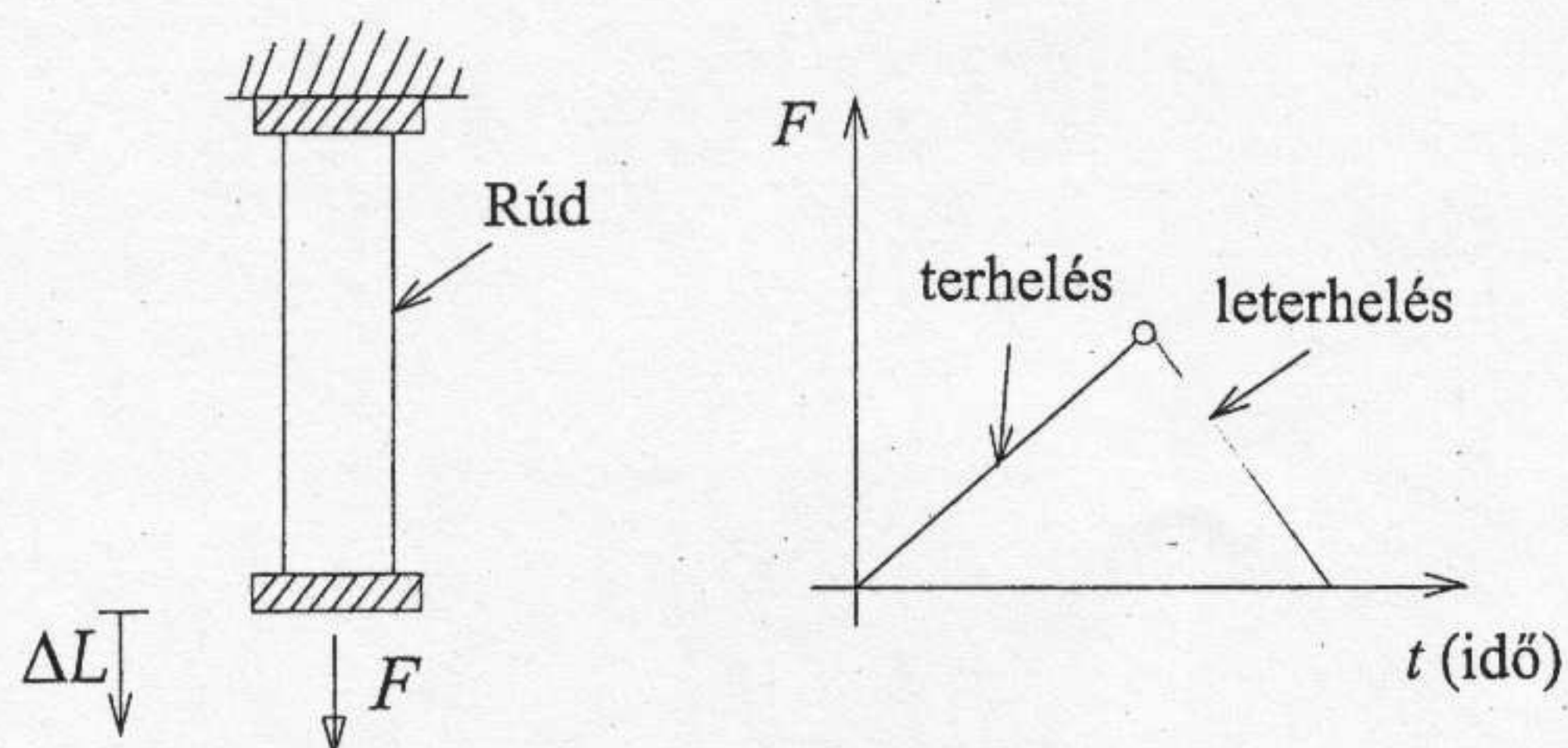


1.3. ábra. C típusú feladat

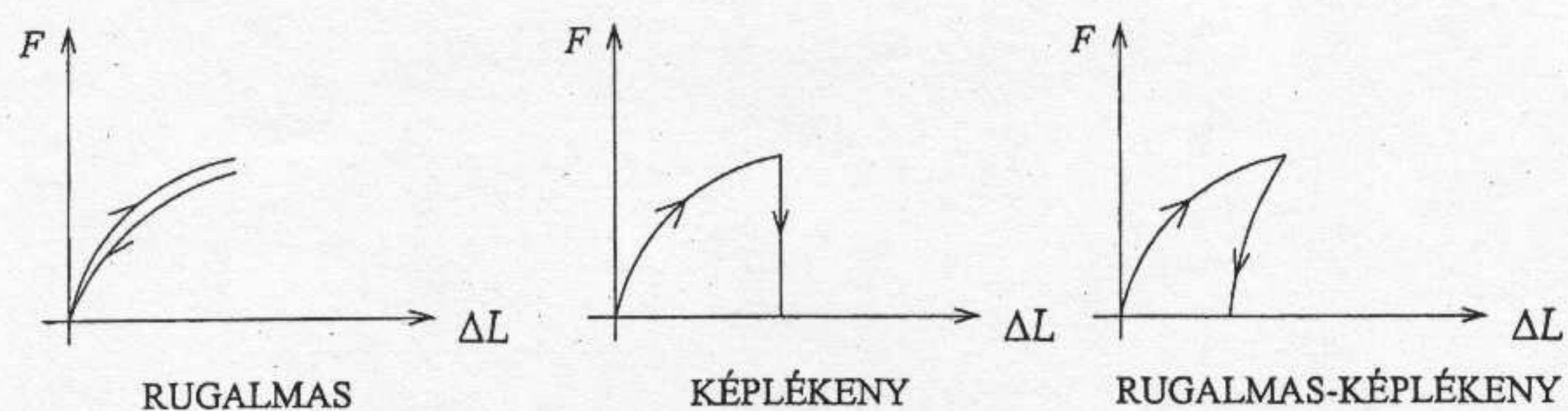


1.4. ábra. A\* típusú feladat

az, hogy az  $F - \Delta L$  diagram nem az anyagra, hanem a testre jellemző. Célunk a rúd *hosszának és keresztmetszeti jellemzőinek* kiküszöbölése.

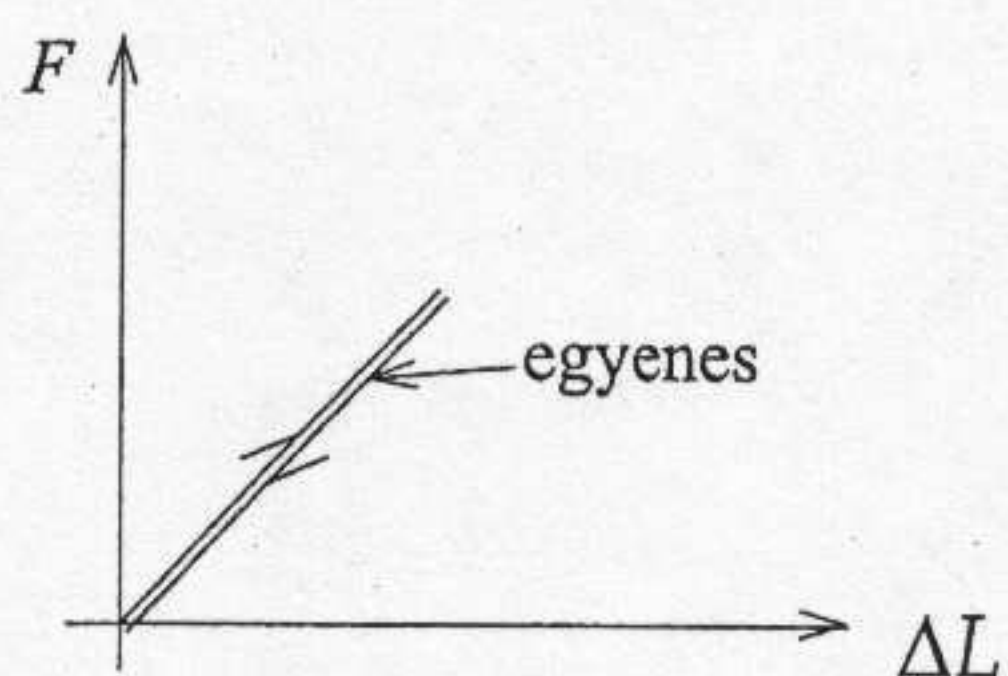


1.5. ábra.



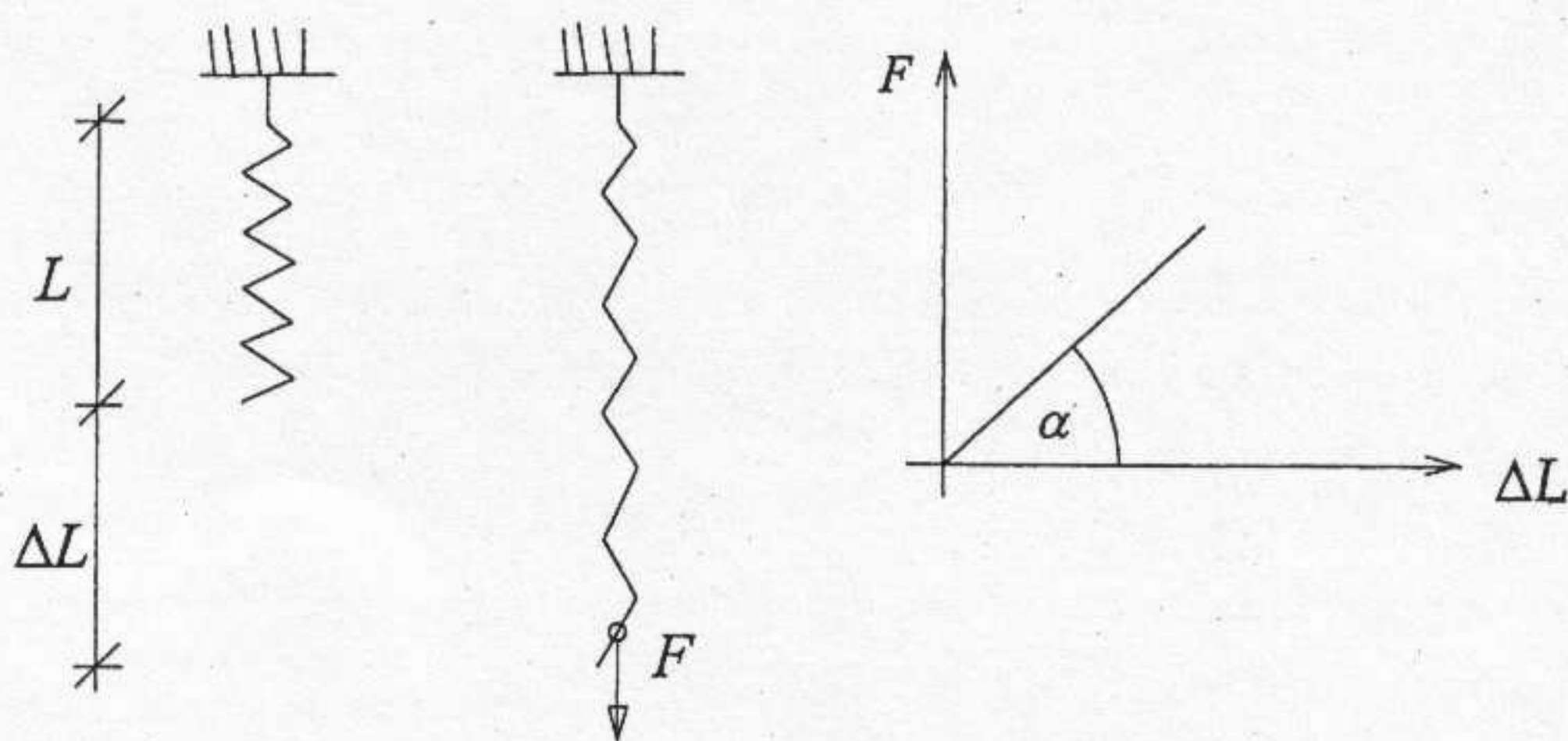
1.6. ábra.

Vizsgáljuk meg a lineáris rugót (1.8. ábra)! Jelölje  $c$  a rúd merevségét, ez azt az erőt jelenti, amelynek hatására 1 cm-rel nyúlik meg a rúd:



1.7. ábra.

$$c = \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{\Delta L}.$$



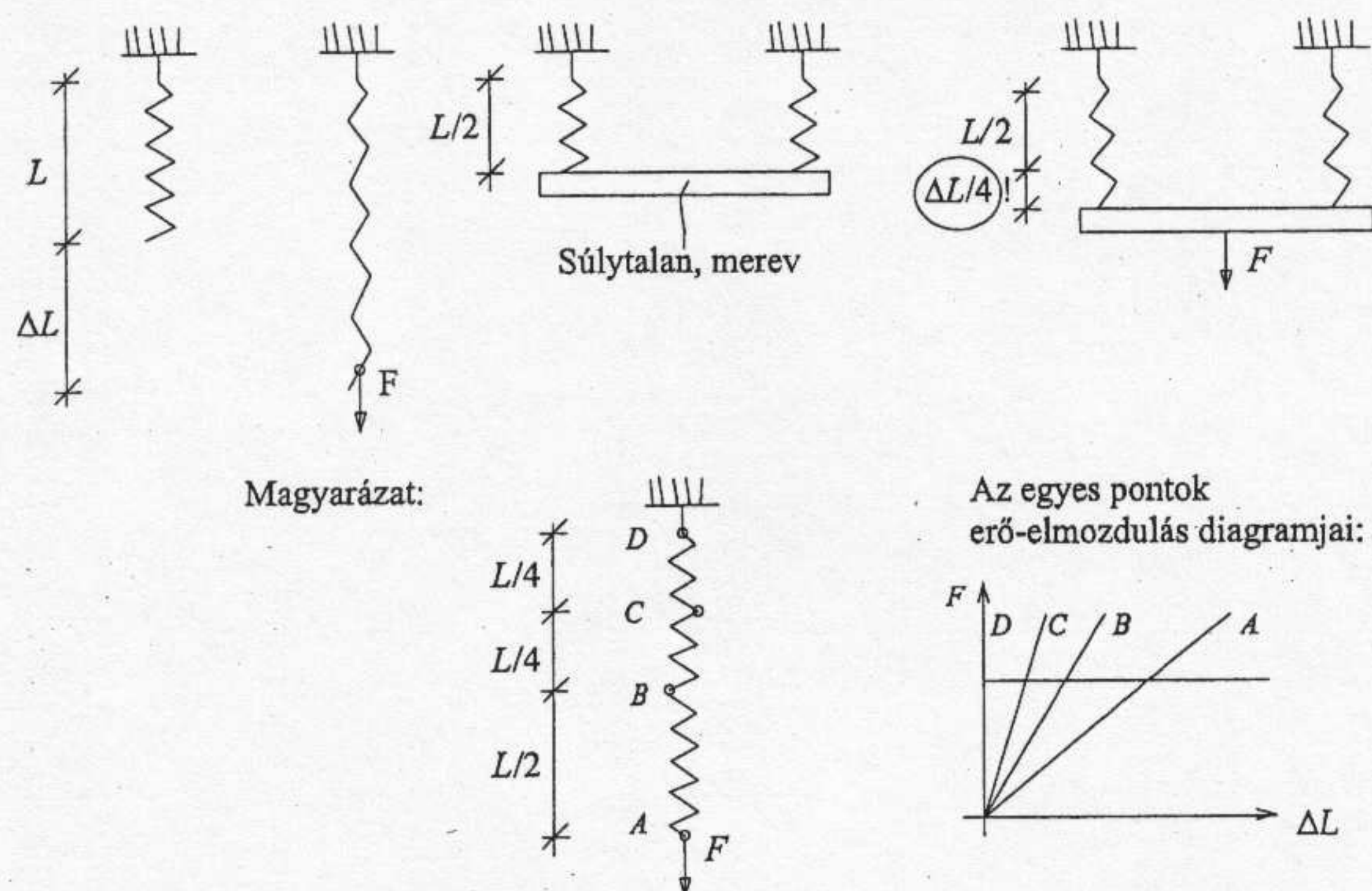
1.8. ábra.

Hogyan függ a  $c$  rugómerevség a rugó hosszától? Az 1.9. ábra alapján a rövidebb rugó merevebb. A rugó *anyagára* az ún. *fajlagos rugómerevség* jellemző, azaz

$$\hat{c} = cL.$$

A  $\hat{c}$  fajlagos rugómerevség az az erő, melynek hatására a rugó kétszeresére nyúlik.  $\hat{c}$  fajlagos rugómerevségből tetszőleges konkrét rugó merevsége kiszámítható.

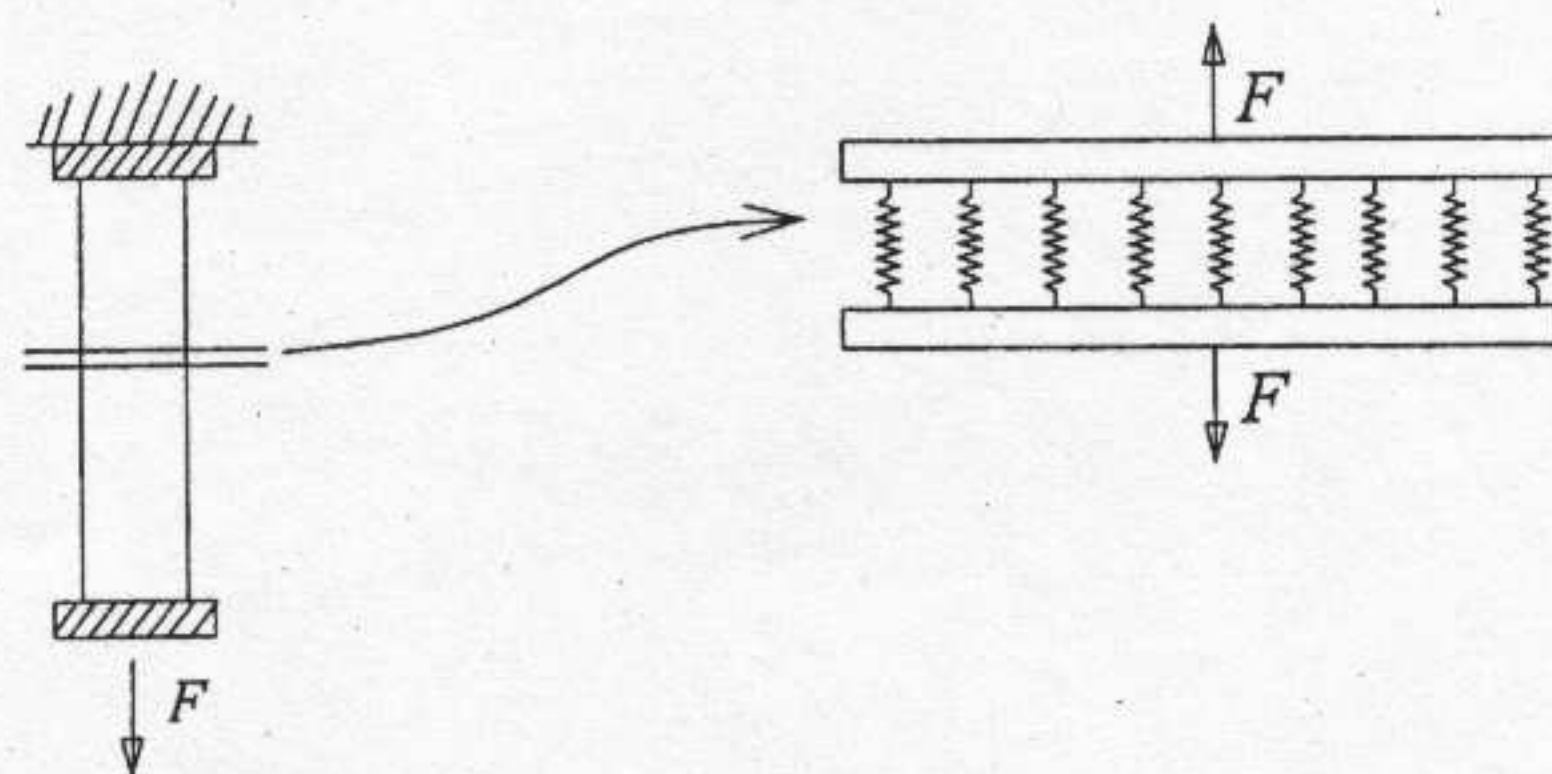
$$F = c\Delta L = \frac{\hat{c}}{L}\Delta L = \hat{c}\frac{\Delta L}{L} = \hat{c}\varepsilon,$$



1.9. ábra.

ahol  $\varepsilon$  jelöli a fajlagos megnyúlást,  $\varepsilon$  dimenzió nélküli szám. Ezzel a rúd hosszát kiküszöböltük, a keresztmetszeti jellemzők kiküszöbölése a következő módon lehetséges.

Tekintsünk a rúd egy szeletét (1.10. ábra), a rudat elemi szálak nyalábjaként képzeljük el, minden szál egy lineáris rugó. Feltételezzük, hogy az elemi szálak azonos módon nyúlnak meg. Ekkor az



1.10. ábra.

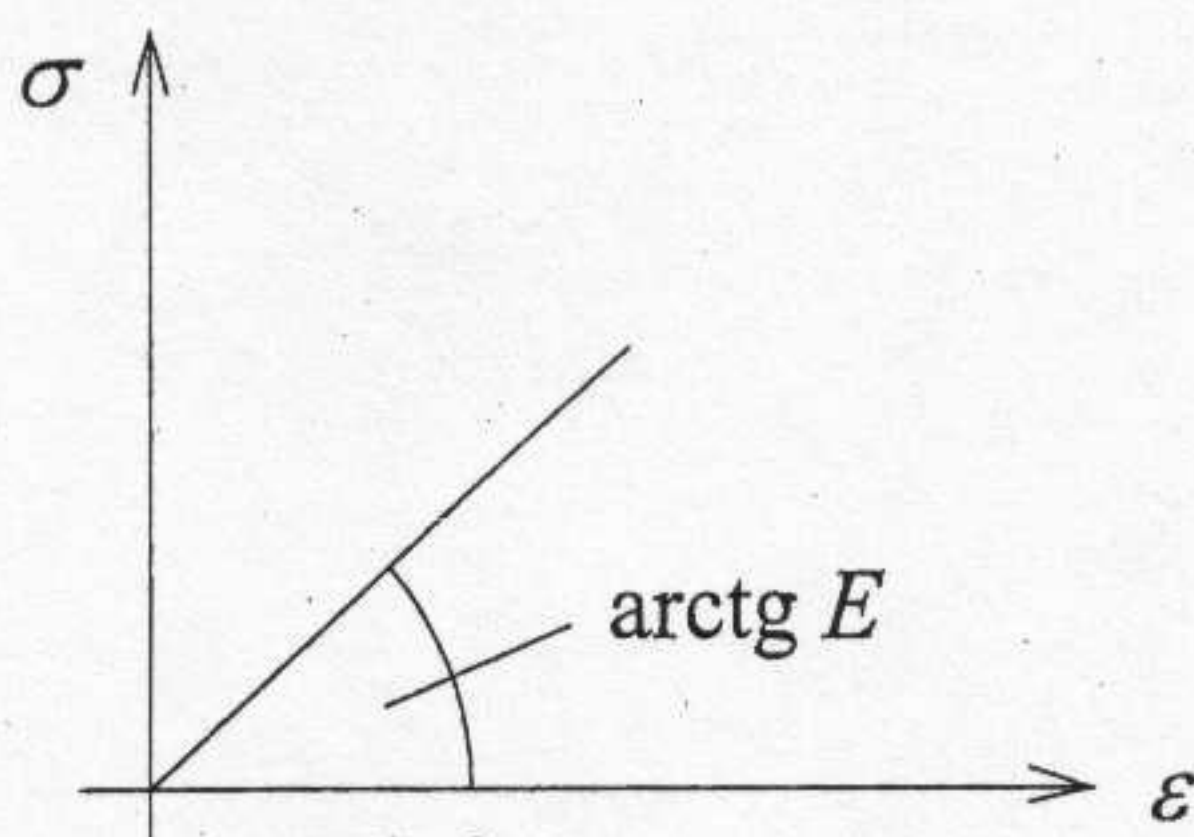
$$F = \hat{c}\varepsilon$$

egyenlet mindkét oldalát a keresztmetszet  $A$  területével osztva kapjuk

$$\frac{F}{A} = \frac{\hat{c}}{A} \varepsilon,$$

$$\sigma = E \varepsilon,$$

ahol  $\sigma$  a FESZÜLTSG,  $E$  a RUGALMASSÁGI MODULUS, vagy más néven Young-modulus. A feszültség és a rugalmassági modulus mértékegysége lehet például  $\text{kN/cm}^2$ ,  $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$ ,  $\text{kN/mm}^2 = \text{GPa}$ , ...stb. Ha a feszültséget a megnyúlás függvényében ábrázoljuk (1.11. ábra), akkor egy *anyagra jellemző* diagramot kapunk. A lineárisan rugalmas anyag egyetlen számadattal ( $E$ ) jellemezhető, például  $E_{\text{acél}} = 190 - 210 \text{ GPa}$ .



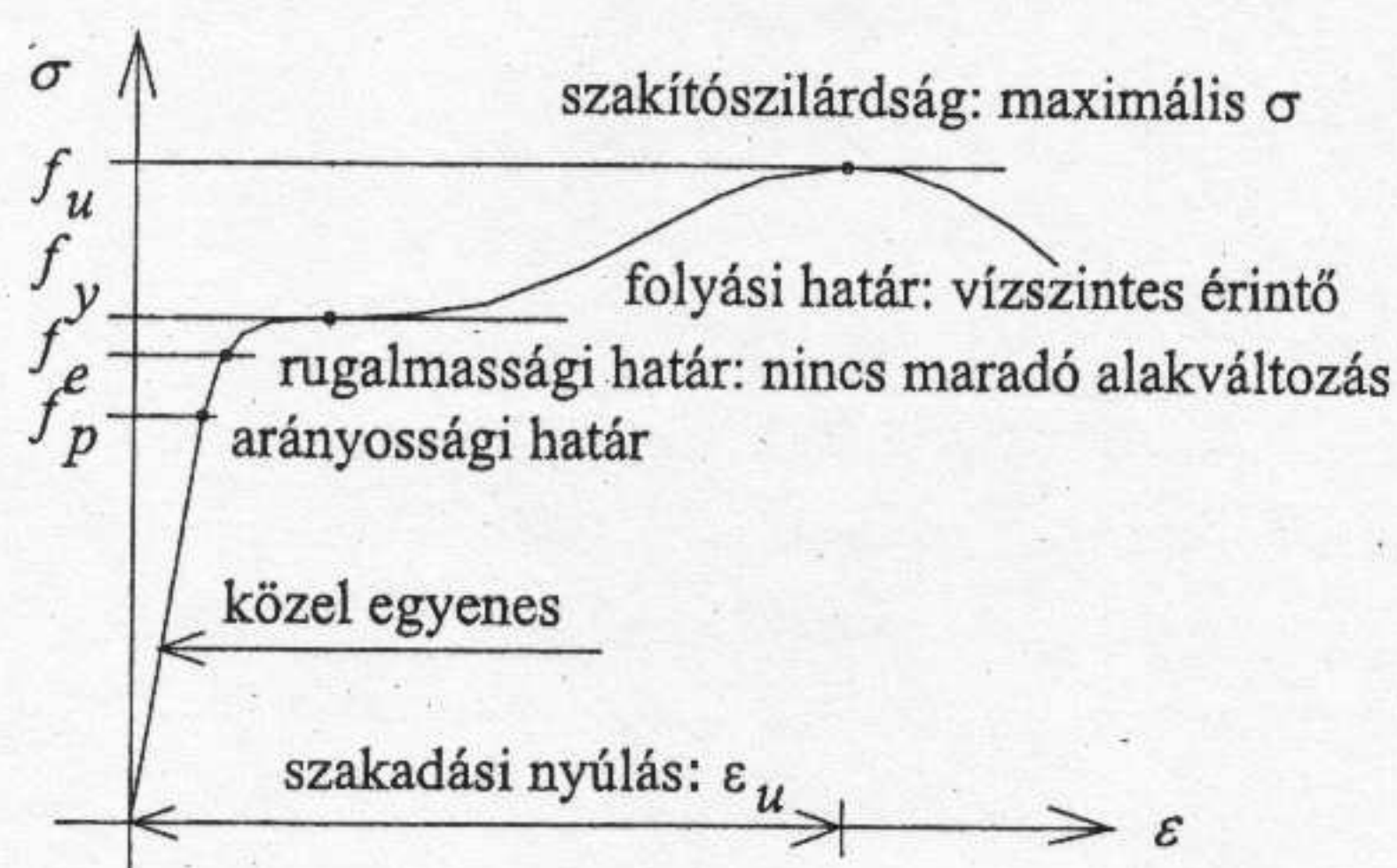
1.11. ábra.

### 1.3. Az anyagegyenlet és a $\sigma - \varepsilon$ diagram

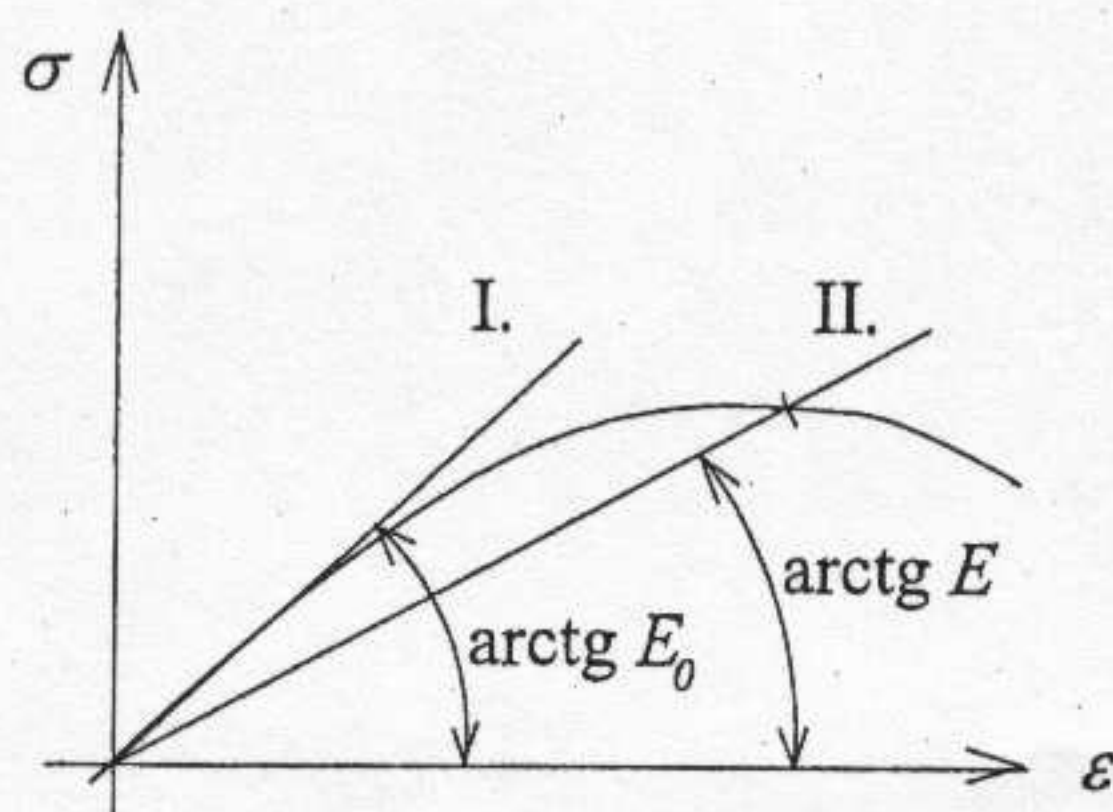
A  $\sigma = E\varepsilon$  összefüggést nevezzük Hooke-törvénynek<sup>1</sup>. Nevével ellentétben ez egy *axióma*, amely valós anyagokra csak korlátozott tartományban és közelítőleg teljesül. A  $\sigma - \varepsilon$  összefüggést más axiómákkal is leírhatjuk (pl.: képlékeny viselkedés, lásd később). A  $\sigma - \varepsilon$  összefüggést leíró axiómát *anyag-egyenletnek*, vagy *anyagtörvénynek* szokták nevezni. Valóságos anyagok  $\sigma - \varepsilon$  diagramja zárt alakban ( $\sigma = f(\varepsilon)$ ) nem adható meg, az ilyen kísérleti diagramokat *nevezetes pontjaival* írjuk le (1.12. ábra).

A Hooke-törvényt jó közelítéssel az  $R_p$  arányosági határig lehet használni. Más anyagoknál kevésbé egyértelmű a helyzet, például egy közepes szilárdságú beton esetét szemlélteti a 1.13. ábra. Ekkor az *I.* egyeneshez tartozó  $E_0$  kezdeti rugalmassági modulus csak *nagyon rövid* szakaszon közelíti jól az anyag viselkedését. Nagyobb intervallumban kapunk jó közelítést, ha a *húrhoz (II. egyenes)* tartozó rugalmassági modulust ( $E$ ) használjuk.

<sup>1</sup>Robert Hooke, 1653-1703, geometria professzor, Anglia

Folytácél  $\sigma$ - $\varepsilon$  diagramja

1.12. ábra.



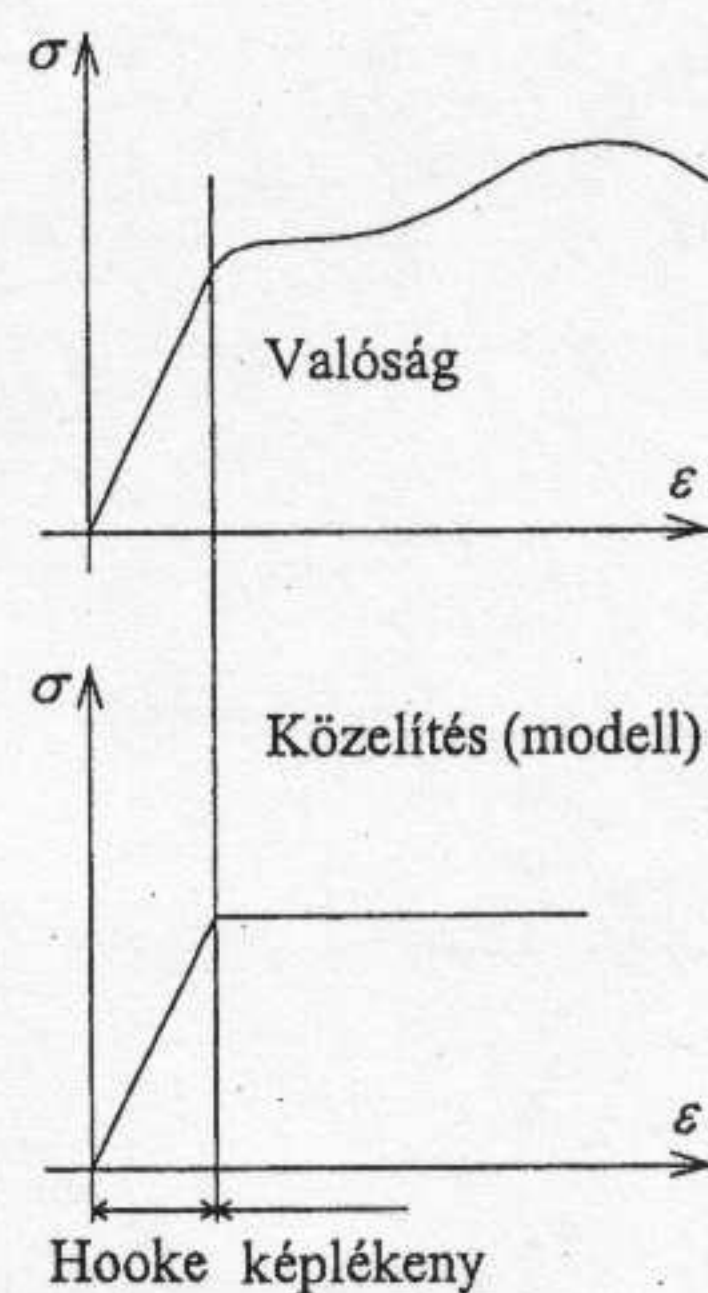
1.13. ábra.

A szerkezeti anyagok  $\sigma - \varepsilon$  diagramját az 1.14. ábrához hasonlóan más-más tartományban más-más anyagegyenlettel közelíthetjük

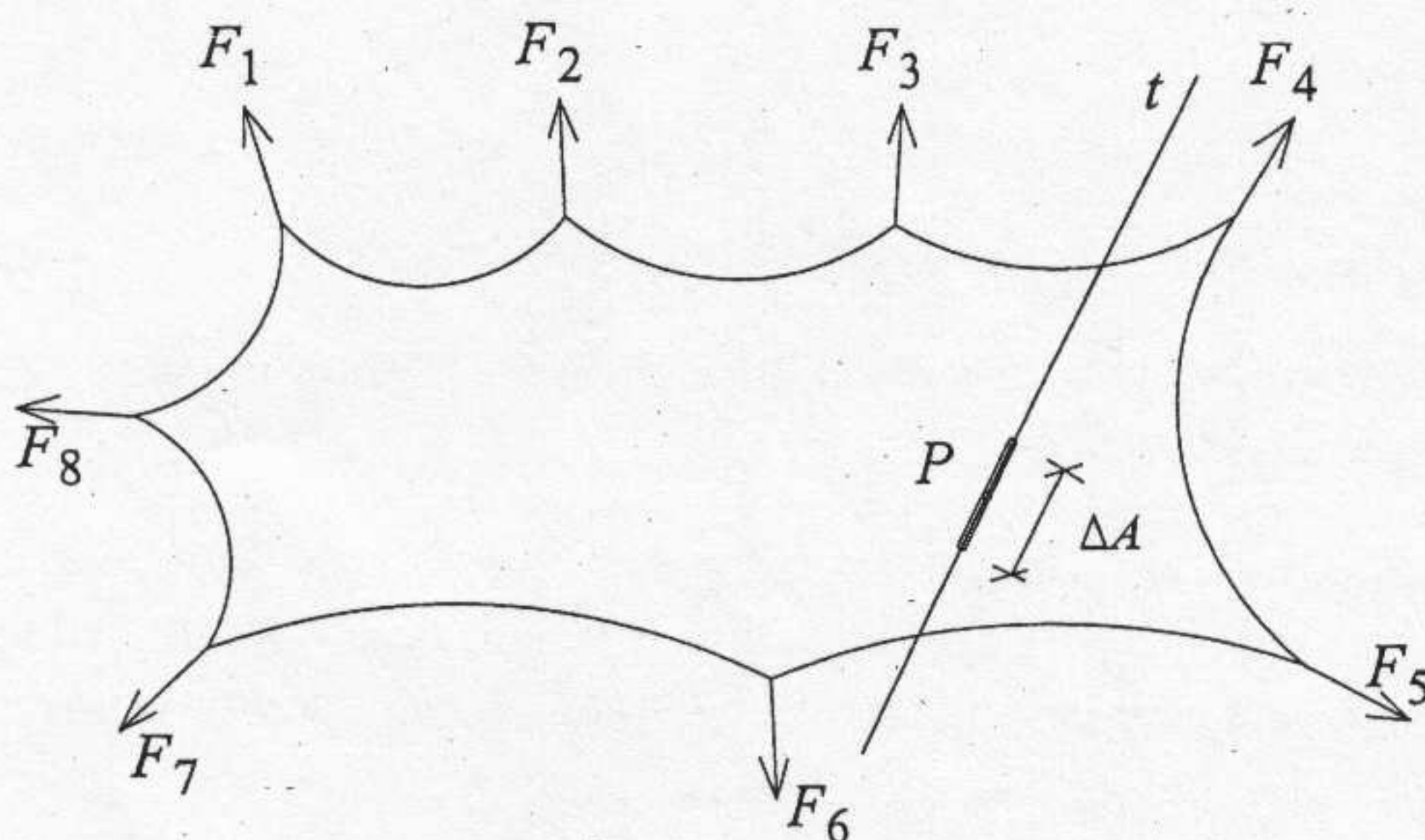
## 1.4. A feszültség általános meghatározása

Az eddigiekben használt feszültség-fogalom nem eléggé általános, hiszen feltételeztük, hogy a feszültségek egyenletesen oszlanak el a rúd keresztmetszetében és más - hallgatóságos - közelítéseket is tettünk.

Tekintsünk egy rugalmas testet, az egyszerűség kedvéért legyen 2 dimenziós (pl.: gumi lepedő) és terheljük egyensúlyi erőrendszerrel (1.15. ábra)! A testet egységnyi vastagságúnak képzeljük. Messünk bele a testbe egy választott  $P$  pontban egy választott  $t$  tengely mentén,  $\Delta A$  hosszúságban! A metszet szélei eltávolodnak egymástól, ennek megszüntetésére  $\Delta F$  erőre van



1.14. ábra.



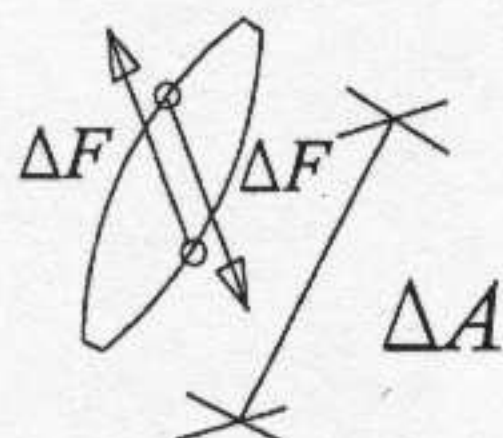
1.15. ábra.

szükség (1.16. ábra).

A tapasztalat azt mutatja, hogy ha  $\Delta A \rightarrow 0$ , akkor  $\Delta F \rightarrow 0$ , de

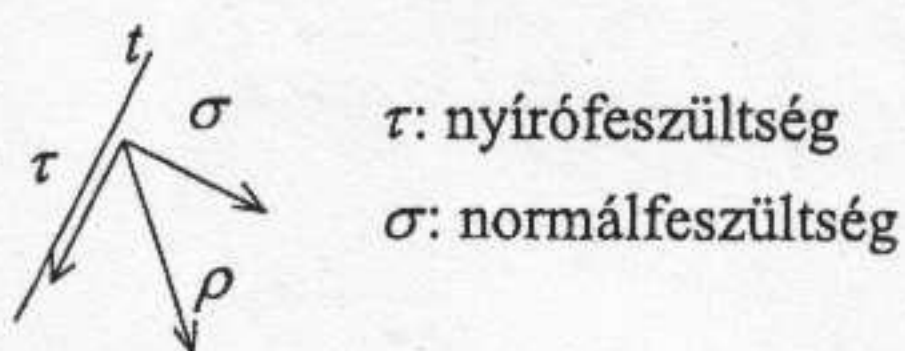
$$\frac{\Delta F}{\Delta A} \rightarrow \rho,$$

vagyis a hányados határértéke nem zérus. Ezt a (vektor!) határértéket nevezzük a  $P$  pontban a  $t$  irányú metszeten ébredő feszültségnek. A  $\rho$  feszültséget - más vektorokhoz hasonlóan - komponensekre bonthatjuk. Nevezetesen a  $t$ -vel párhuzamos komponenst nyírófeszültségnek nevezzük és  $\tau$ -val jelöljük, a



1.16. ábra.

merőleges komponenst normálfeszültségnek nevezzük és  $\sigma$ -val jelöljük (1.17. ábra).



1.17. ábra.

Megjegyzések a feszültség-definícióhoz:

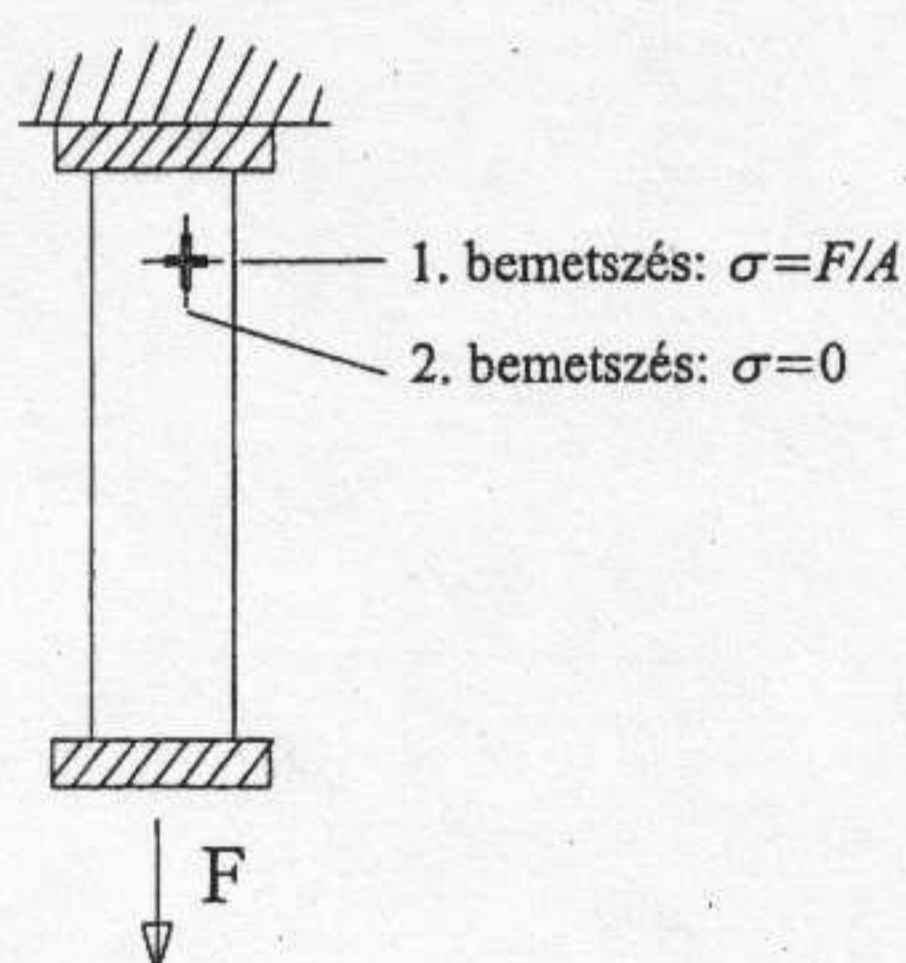
1. A definíció három-dimenziós esetben teljesen analóg, csak nehezebben szemléltethető.
2. Vegyük észre, hogy  $\rho$  a  $P$  pont helyzetétől és a  $t$  egyenes irányától egyaránt függ! Egy pontot az ott áthaladó összes irányhoz tartozó  $\rho$  feszültségek megadásával lehet jellemezni. Ennek legegyszerűbb módja egy  $\rho(\underline{n})$  függvény megadása, ahol  $\underline{n}$  a  $t$  irányt jellemző egységnyi normál-vektor. A későbbiekben részletesen tárgyaljuk ezt a függvényt.
3. A 2. megjegyzést jól illusztrálhatjuk a már vizsgált, központosan húzott rúd példáján (1.18. ábra).

## 1.5. Kitérő

### 1.5.1. Síkbeli feszültség állapot

A 2. megjegyzés szerint a sík egy pontját egy  $\rho(\underline{n})$  függvénnyel lehet jellemezni, ahol

- $\underline{n}$  a vizsgált irány (egység) normálisa,
- $\underline{\rho}$  a vizsgált irányú metszeten ébredő feszültség.



1.18. ábra.

A  $\rho(\underline{n})$  függvény *vektor-vektor* függvény, ennek legegyszerűbb típusa a *homogén lineáris* vektor-vektor függvény. Két dimenzióban így néz ki:

$$\underline{a} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{b},$$

ahol  $\underline{\underline{T}}$  a homogén lineáris vektor-vektor függvény, azaz egy tenzor. Az előző egyenlet kifejtve

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

ami a következő egyenletrendszernek felel meg:

$$a_1 = t_{11}b_1 + t_{12}b_2,$$

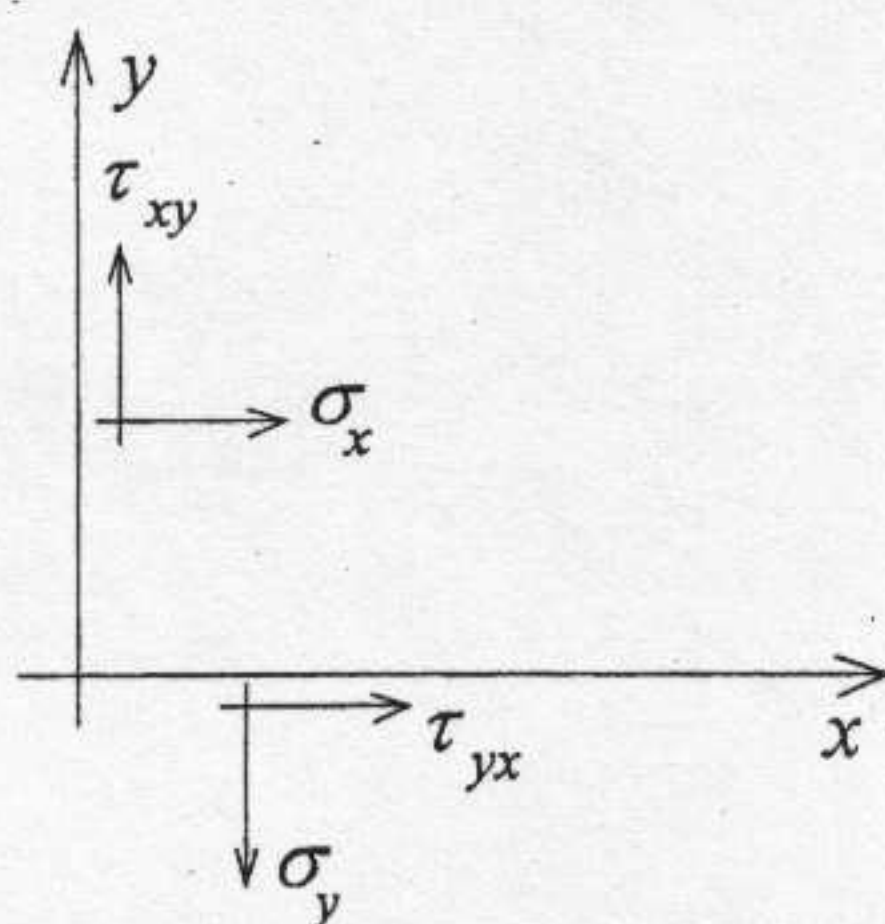
$$a_2 = t_{21}b_1 + t_{22}b_2.$$

Hasonlóan a vektorokhoz, a tenzor is megadható koordinátákkal, a tenzor koordinátái egy mátrixban írhatók le. Ha megváltoztatjuk a koordináta-rendszert, akkor (a vektor koordinátákhoz hasonlóan) a tenzor mátrixa is változik, a fizikai tartalom azonban ugyanaz marad.

### 1.5.2. A feszültségi tenzor

A *feszültségi tenzor* az  $[xy]$  koordináta-rendszerben a következő mátrixszal rendelkezik:

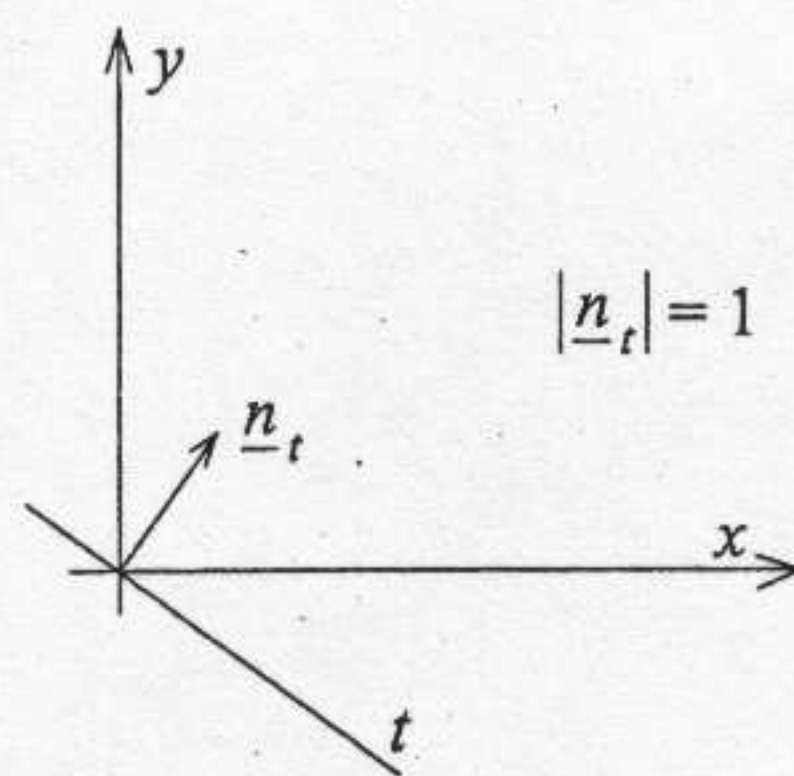
$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix},$$



1.19. ábra.

ahol  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  az  $x$ , illetve  $y$  normálisú metszeten ébredő normálfeszültségek,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  pedig a nyírófeszültség. Ezek szerint ha bármely, egymásra merőleges két metszeten ismertek a feszültségek, akkor tetszőleges irányban ki tudom számítani:

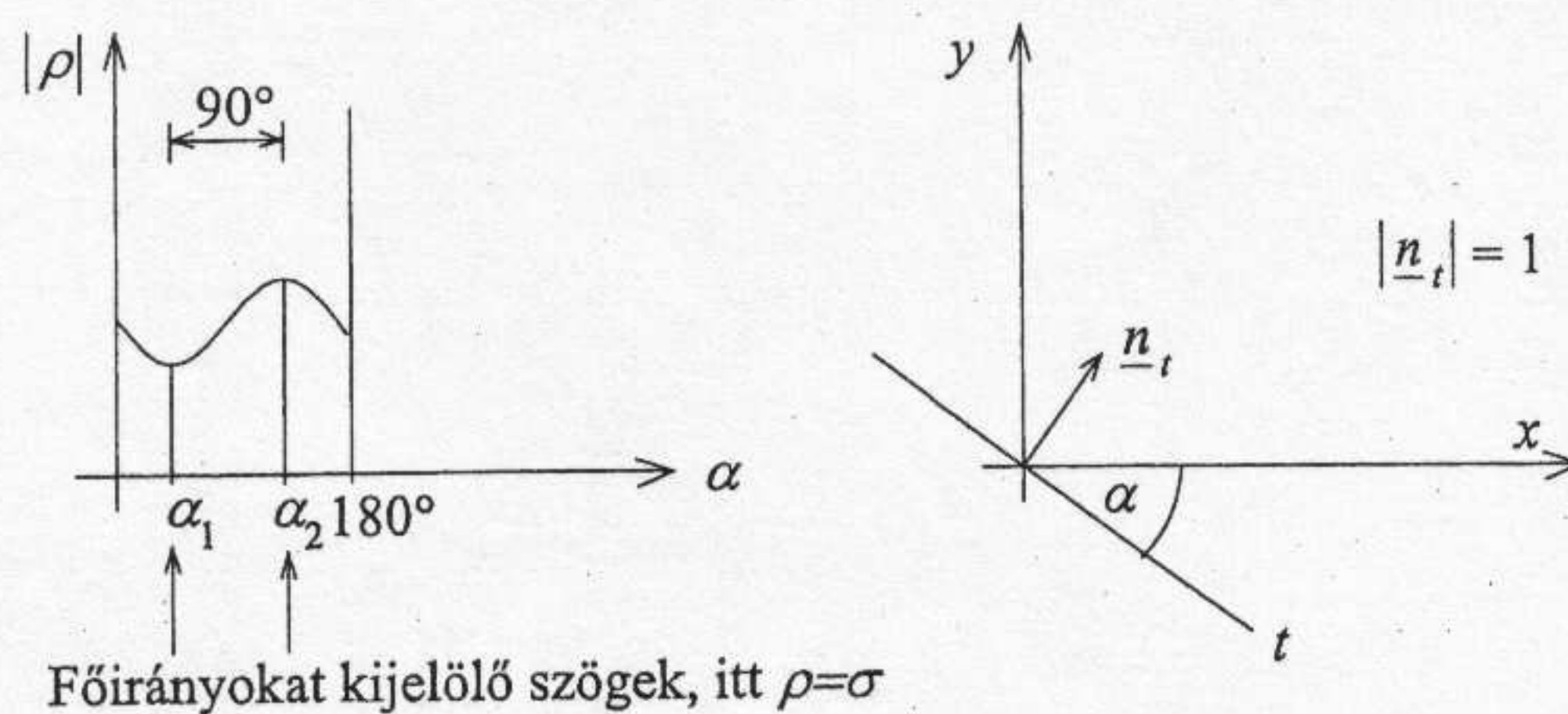
$$\underline{\rho}_t = \underline{T} \cdot \underline{n}_t$$



1.20. ábra.

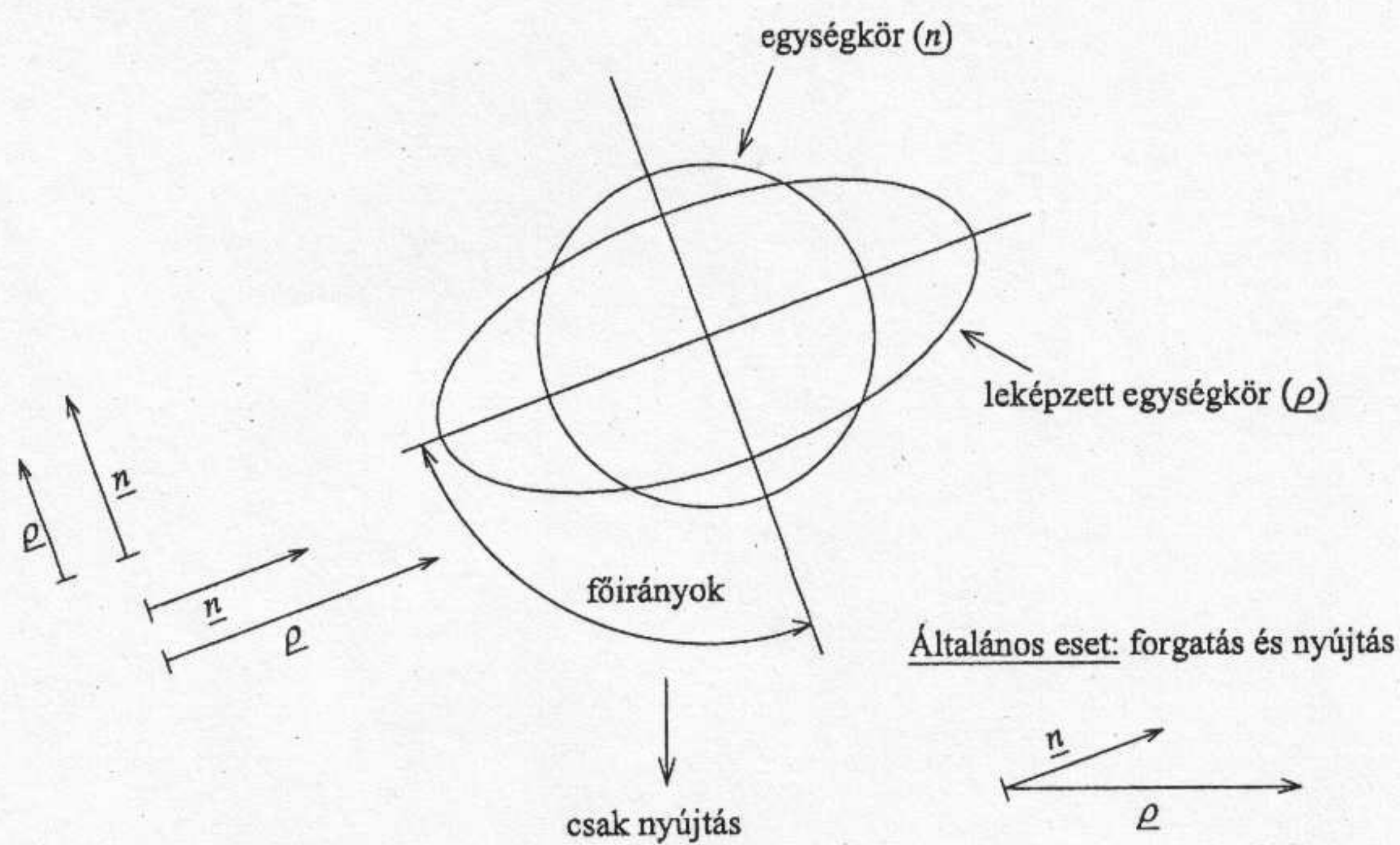
### 1.5.3. A $\underline{T}$ tenzor tulajdonságai

Minden tenzor rendelkezik főirányokkal. A főirányba eső bemenő ( $\underline{n}$ ) vektorhoz tartozó kimenő ( $\underline{\rho}$ ) vektor egymással párhuzamos, vagyis ezekben az irányokban a tenzor *nem forgat*, csak nyújt vagy zsugorít. A főirányokba eső kimenő ( $\underline{\rho}$ ) vektorok abszolút értéke a legkisebb, illetve a legnagyobb (1.21. ábra).



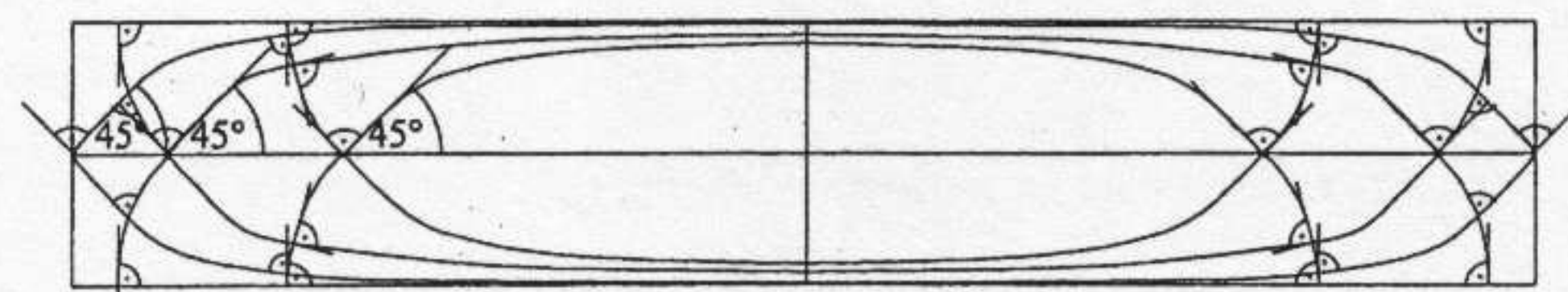
1.21. ábra.

A korábbiak szerint a főirányokban  $\tau_{xy} = 0$  és  $|\sigma|$  a szélső értékeit veszi fel. A szélsőértékek közül a nagyobbát  $\sigma_1$ -nek, a kisebbet  $\sigma_2$ -nek nevezzük. A tenzor működése szemléltethető azáltal, hogy lerajzoljuk az egységkör képét:

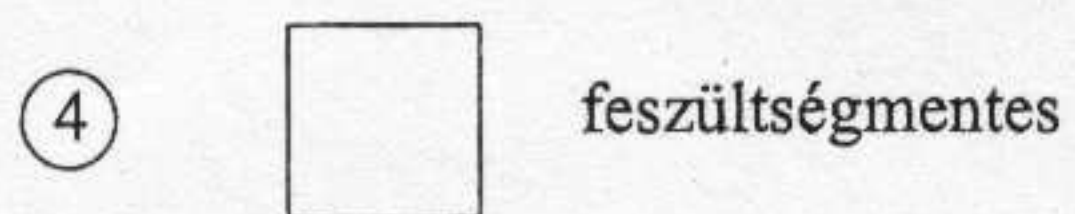
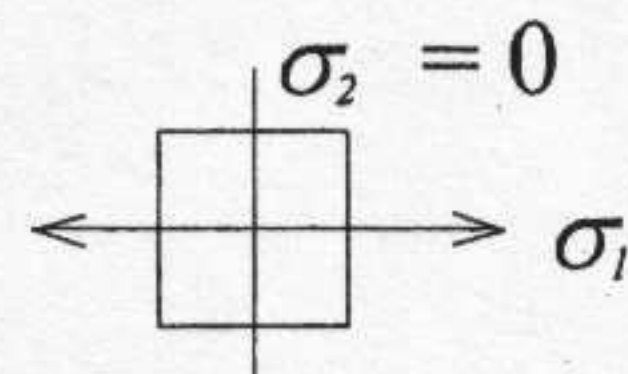
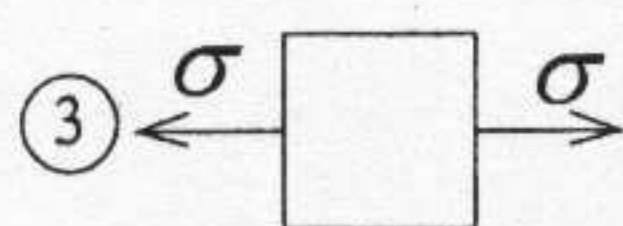
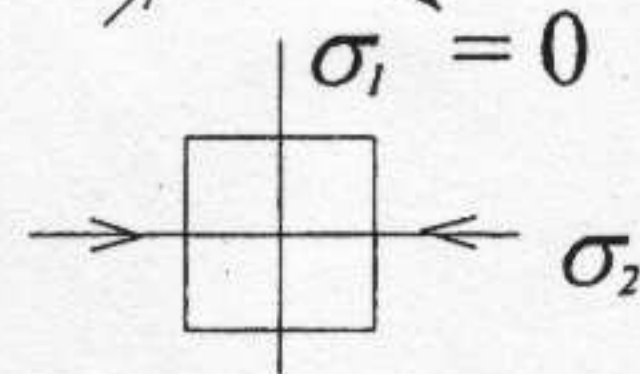
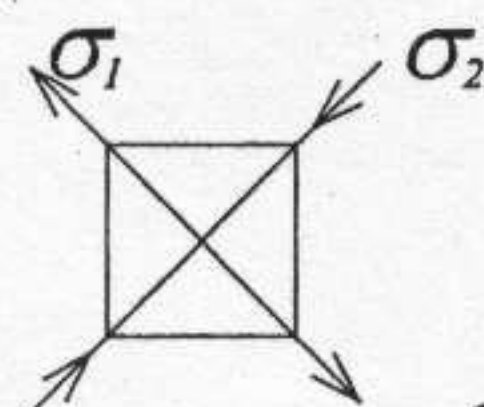
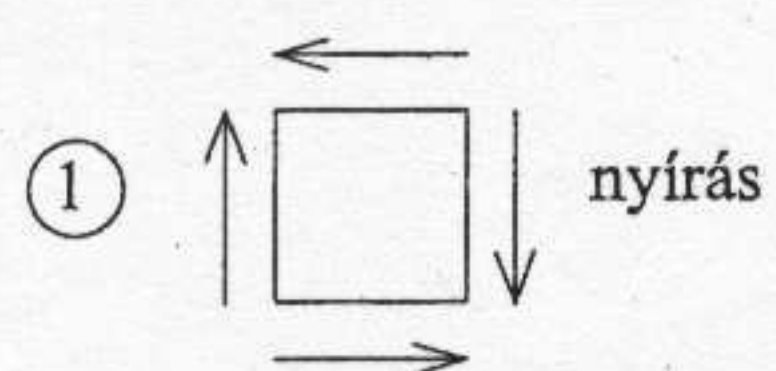
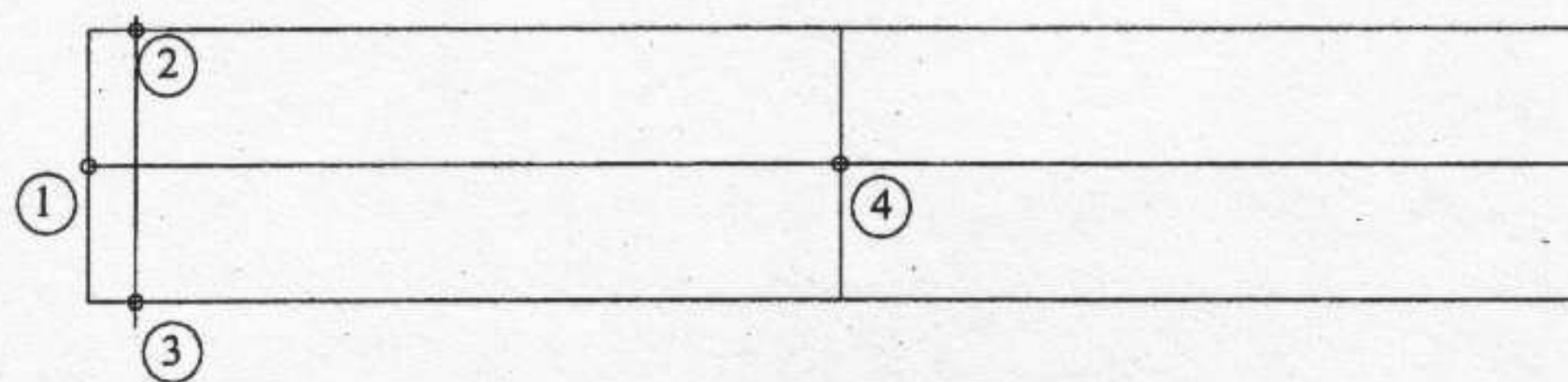


1.22. ábra.

A főfeszültségek segítségével megállapítható az anyagban keletkező legnagyobb igénybevétel. Azokat a görbéket, amelyeknek a főtengelyek az érintői, *főfeszültségi trajektóriáknak* nevezzük. Egyenletes teherrel terhelt gerendatartó esetén például így néznek ki:



Speciális pontok:



1.23. ábra.

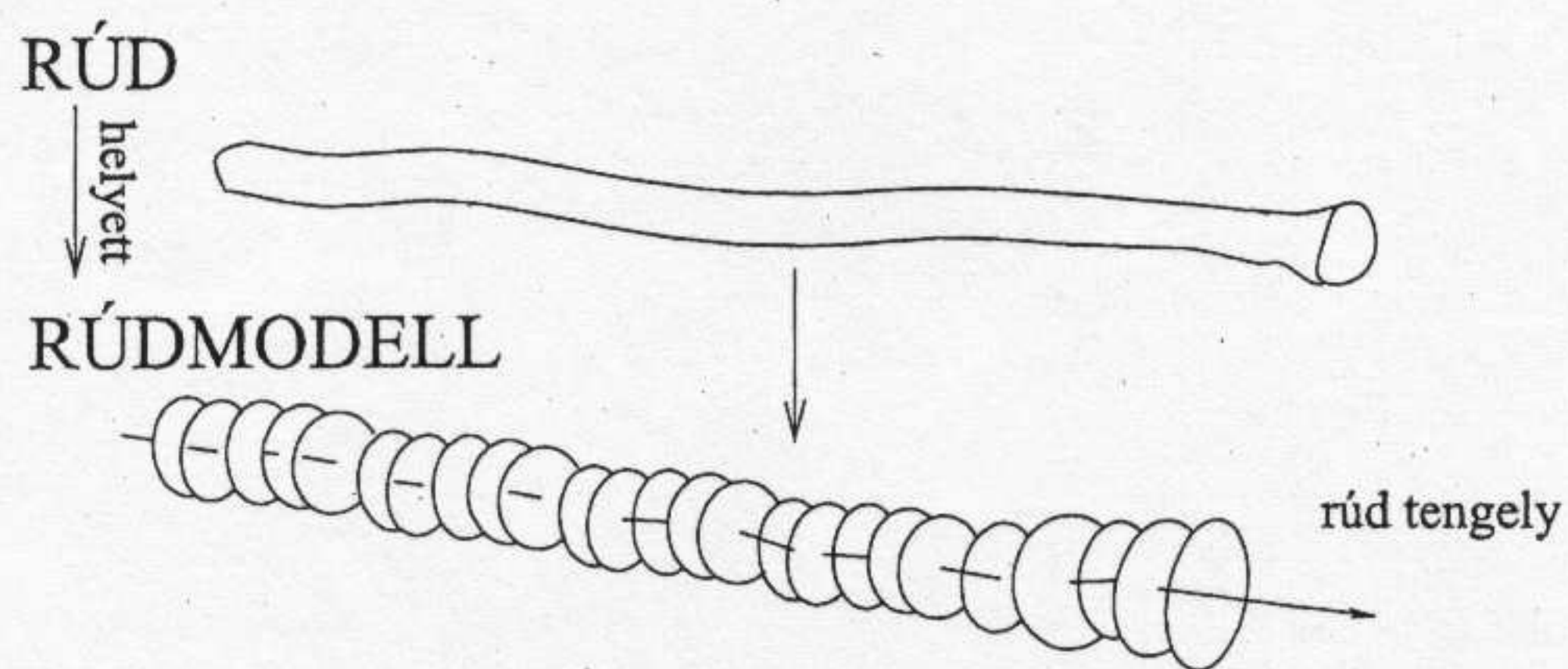


## 2. fejezet

# Feszültségek számítása a rúdmodellben

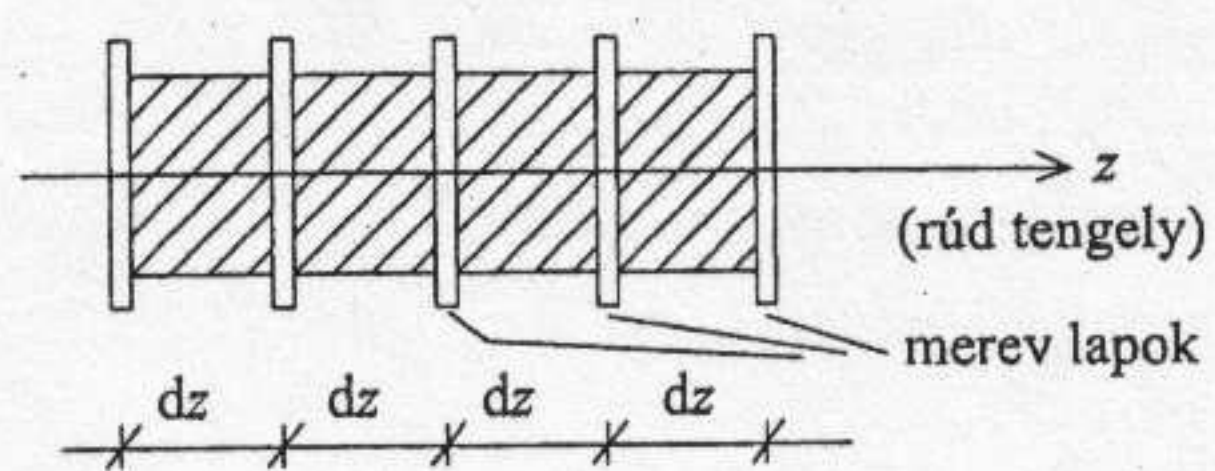
### 2.1. A rúdmodell

A feszültségek meghatározása egy általános test belsejében igen nehéz feladat, ezzel a *kontinuummechanika* foglalkozik. Céljainknak -egyelőre- egy jóval egyszerűbb eset vizsgálata is megfelel. A rúd olyan test, melynek két mérete elhanyagolható a harmadik mellett. A rúd következő modelljét fogjuk vizsgálni: a rudat merev lapok sorozatának képzeljük (2.1-2.2. ábra). Ez a feltételezés azzal egyenértékű, hogy a *rúdtengelyre* merőleges metszetelek síkok maradnak a deformáció után is (*Bernoulli-Navier hipotézis*). A Bernoulli-Navier hipotézis (a Hooke törvényhez hasonlóan) *axióma*, amely bizonyos határok között jól közelíti a kísérleti méréseket (2.3. ábra).



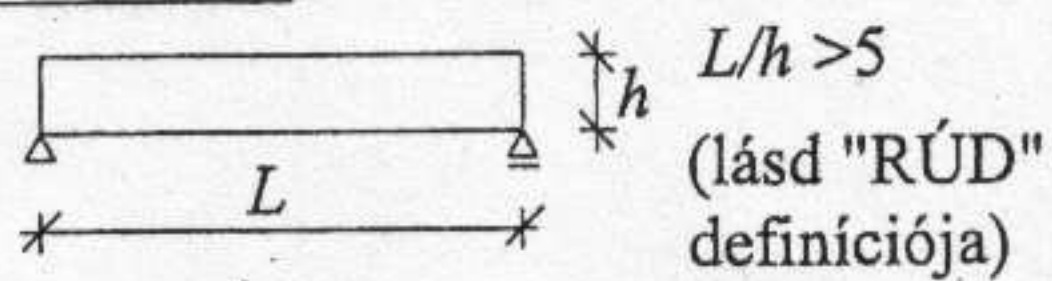
2.1. ábra.

SÍKBELI ESET



2.2. ábra.

GEOMETRIA:



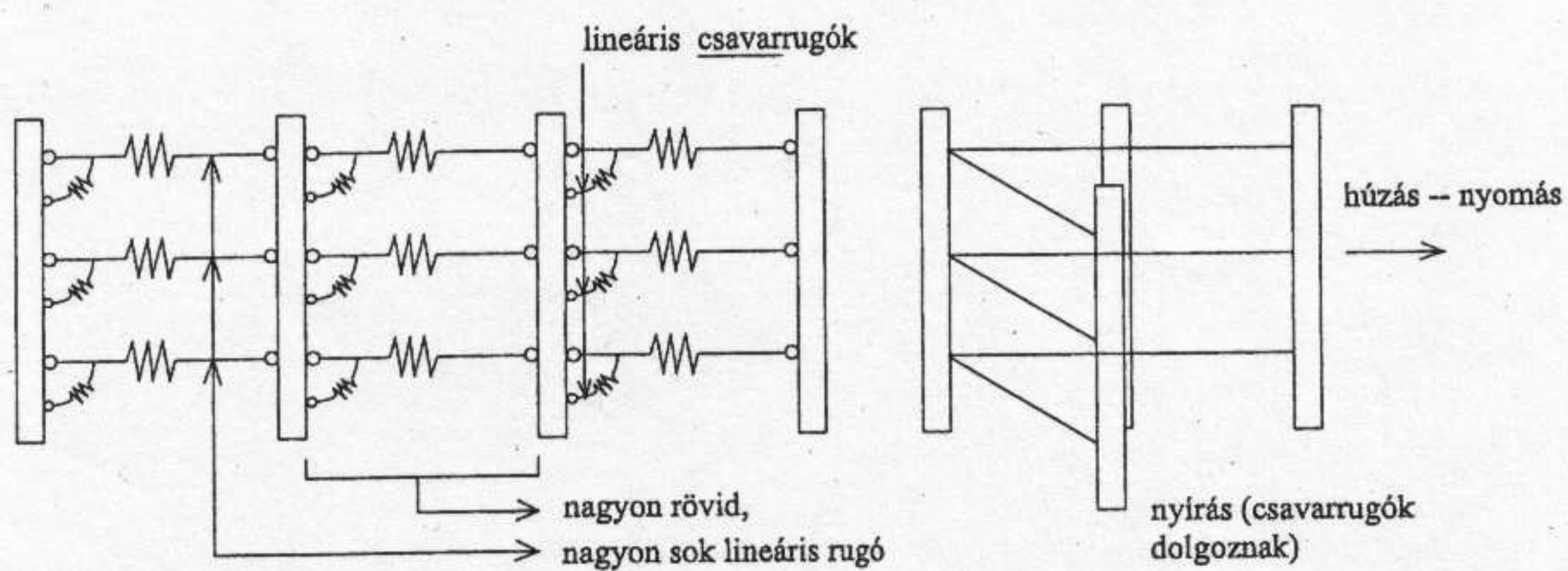
IGÉNYBEVÉTEL:

húzás - nyomás - hajlítás: jó  
nyírás - csavarás: problémás

2.3. ábra.

Szemléltetés:

Rugalmas anyag esetén a Bernoulli-Navier rúdmodellt így is elképzelhetjük:



2.4. ábra.

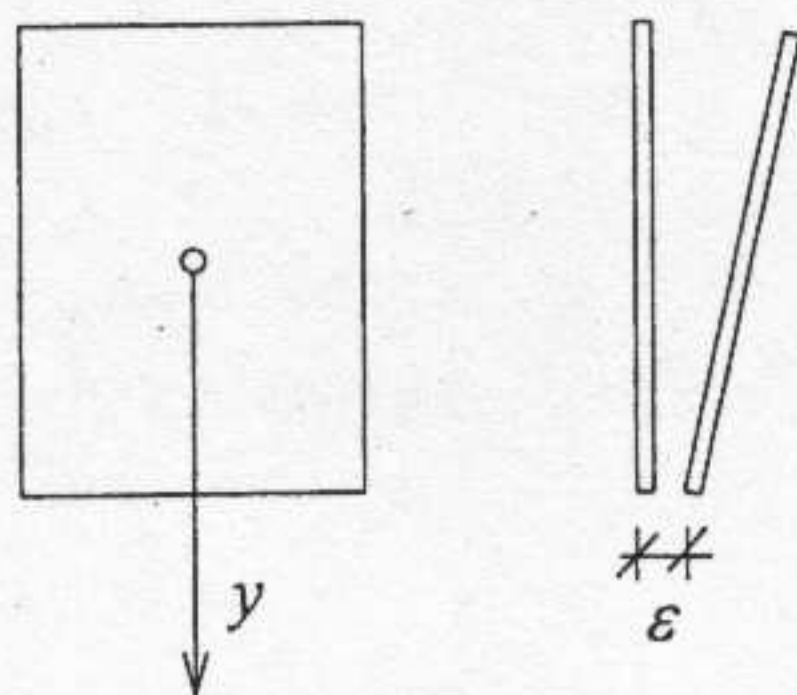
Feszültségek számításakor egy keresztmetszet-párt vizsgálunk. Három típusú egyenletet írhatunk fel:

1. Egyensúlyi egyenlet: a feszültségek (elemi kis rugók) egyensúlyt tartanak az igénybevételekkel:

$$(a) \int_A \sigma dA = F,$$

$$(b) \int_A \sigma dAy = M.$$

2. Geometriai egyenlet: Bernoulli-Navier hipotézis következtében a keresztmetszet sík (2.5. ábra).



2.5. ábra.

Síkbeli esetben:  $\varepsilon = ay + b$ ,

Térbeli esetben:  $\varepsilon = ay + bx + c$ .

3. Anyagegyenlet: a Hooke törvény, azaz  $\sigma = E\varepsilon$ .

## 2.2. Feszültségek számítása központos húzás esetén

Egyenletek:

1. Egyensúlyi:

$$(a) \int_A \sigma dA = F,$$

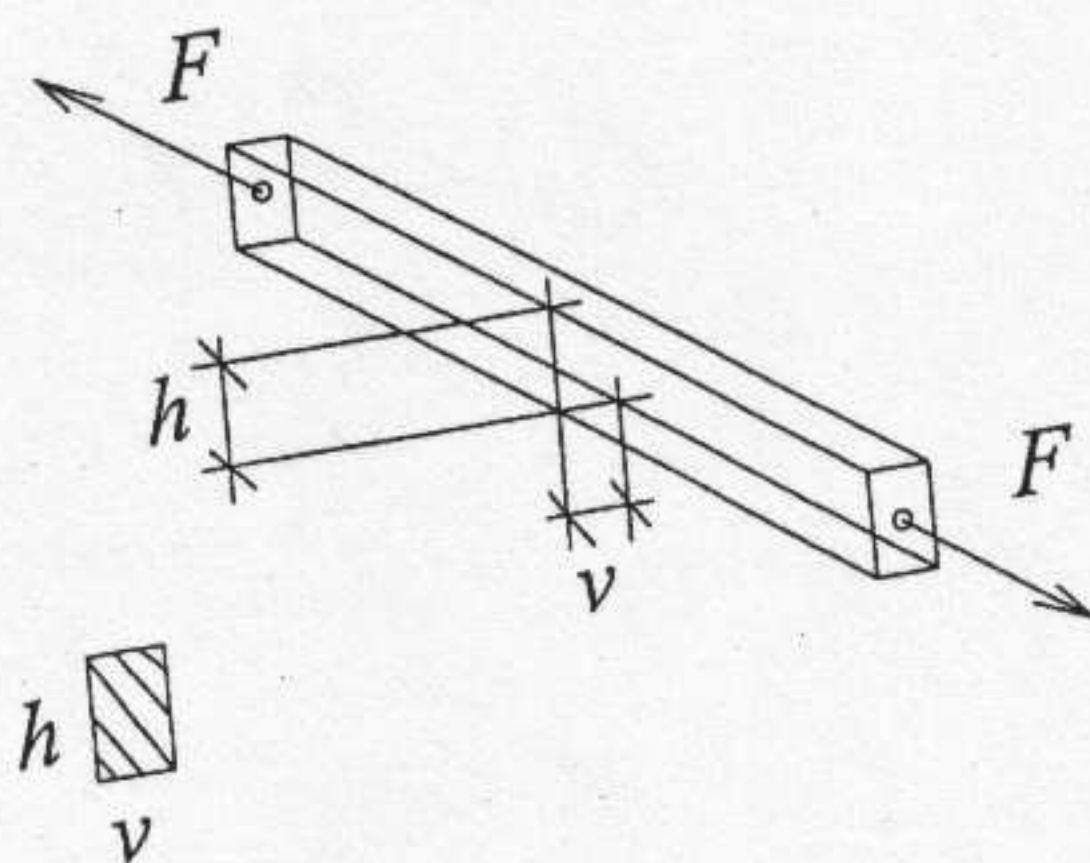
$$(b) \int_A \sigma y dA = 0.$$

2. Geometriai:

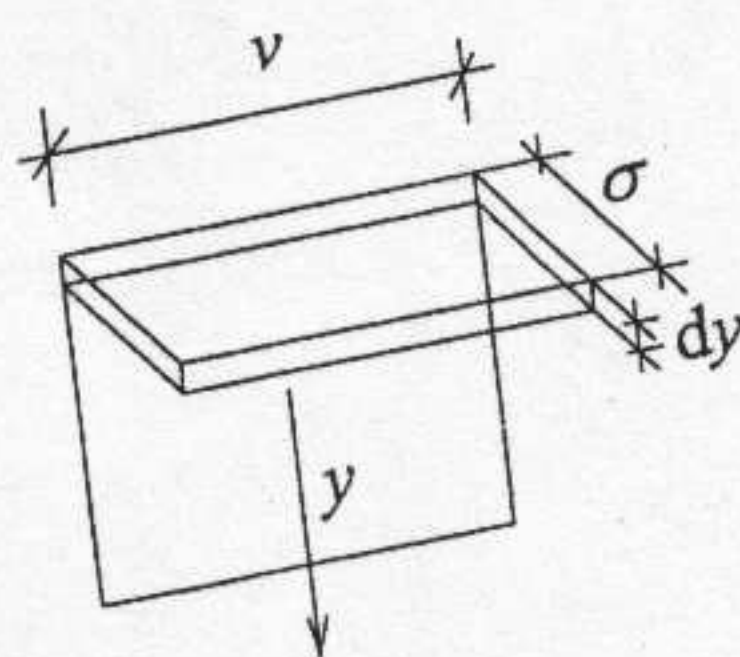
$$\varepsilon = ay + b.$$

3. Anyagegyenlet:

$$\sigma = E\varepsilon.$$



2.6. ábra.



2.7. ábra.

Ismeretlenek:  $a, b$ .

**Megoldás:** Az 1.(a) egyenletbe 3., majd a 2. egyenletet helyettesítve kapjuk:

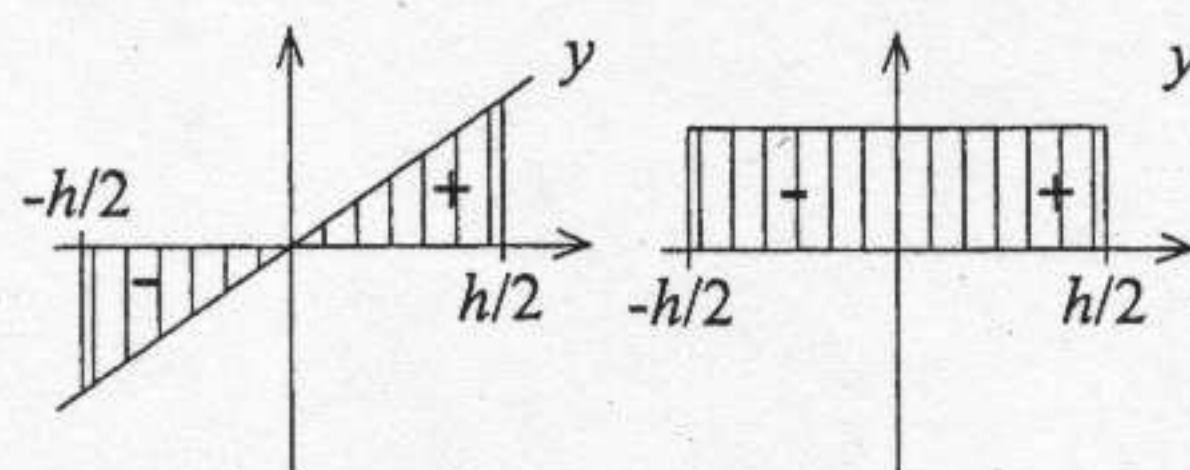
$$F = \int_A \sigma dA = E \int_A \varepsilon dA = E \int_A (ay + b) dA$$

Átrendezve:

$$\frac{F}{E} = a \int_A y dA + b \int_A dA = a S_x + b A$$

Mivel a súlyponti tengelyre a statikai nyomaték zérus ( $S_x = 0$ ), ezért

$$\frac{F}{E} = b A, \quad \rightarrow \quad b = \frac{F}{EA}$$



2.8. ábra.

Az 1.(b) egyenletbe 3., majd a 2. egyenletet helyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned}\int_A \sigma y dA &= E \int_A \varepsilon y dA = E \int_A (ay + b)y dA = 0 \\ E \int_A ay^2 dA + E \int_A by dA &= 0 \\ a \int_A y^2 dA &= 0 \rightarrow a = 0.\end{aligned}$$

Visszahelyettesítéssel:

$$\varepsilon = b = \frac{F}{EA}, \quad \sigma = \frac{F}{A}.$$

Ezt az eredményt korábban már *jóval* egyszerűbben is felírtuk. Miért jobb ez a bonyolult levezetés? Mert egy MODELL-ből vezettük le, világosan megfogalmaztuk, hogy melyek az AXIÓMÁK (egyensúly, Bernoulli-Navier hipotézis, Hooke törvény), és ezekből pontos matematikai úton kaptuk a vég-eredményt. Bonyolultabb igénybevételek esetén *ugyanezen* módszert fogjuk használni.

### 2.3. Képlékeny határerő számítása központos húzás esetén

Képlékeny viselkedés esetén nem a feszültséget keressük ( $\sigma = f_d$  mindenütt), hanem a határ-igénybevételt, jelen esetben ez  $F_{Rd,pl}$ .

**Egyenletek:**

1. Egyensúlyi:

$$(a) \int_A \sigma dA = F_{Rd,pl},$$

$$(b) \int_A \sigma y dA = 0.$$

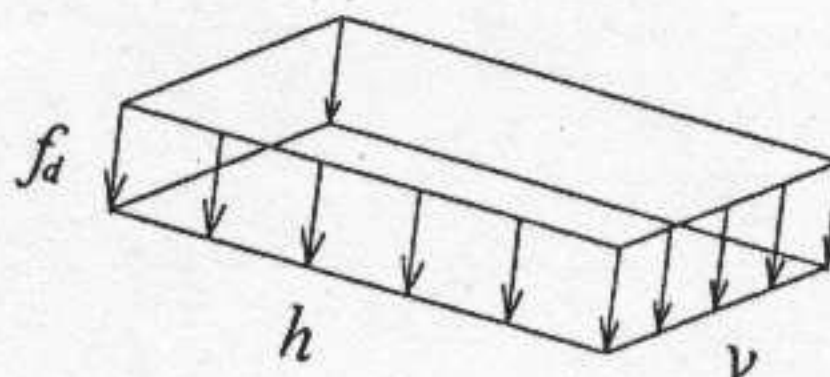
$$2. \text{ Geometriai: } \varepsilon = ay + b.$$

$$3. \text{ Anyagegyenlet: } \sigma = \text{konst!} = f_d.$$

Megoldás:

$$\int_A \sigma dA = f_d \int_A dA = f_d A = F_{Rd,pl}.$$

Megjegyzések. A 2. (geometriai) egyenletet nem használtuk a megoldás során, hiszen 3. szerint a nyúlások és feszültségek függetlenek. Mindazonáltal a Beroulli-Navier hipotézis képlékeny állapotban is érvényes. Hasonló módon nem volt szükségünk az 1.b.) egyenletre, azonban behlyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az a feltétel teljesül. A megoldás szemléltetésére használatos az ún. feszültségi test, ennek két mérete hosszúság, például [cm] dimenziójú, harmadik mérete [kN/cm<sup>2</sup>], így térfogata erő, jelen példában [kN] dimenziójú (2.9. ábra).



2.9. ábra.

## 2.4. Feszültségek számítása tiszta nyírás esetén

A tiszta nyírás a hajlítás nélküli nyírást jelenti, például egy szegecs-kötésben (2.10. ábra). A rúdmodell viselkedését a 2.11. ábra szemlélteti. Az anyagegyenlet nyírási deformációra a Hooke-törvény analógiájára:

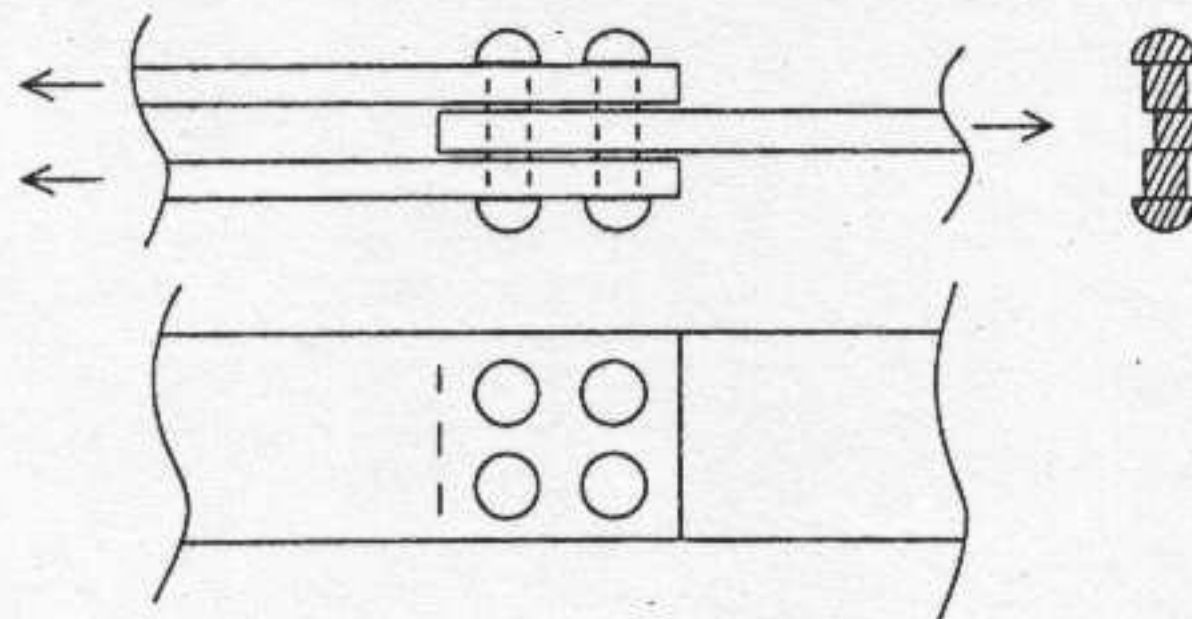
$$\tau = G\gamma,$$

ahol  $G$  a nyírási rugalmassági modulus. Az összefüggés  $G$  és  $E$  között

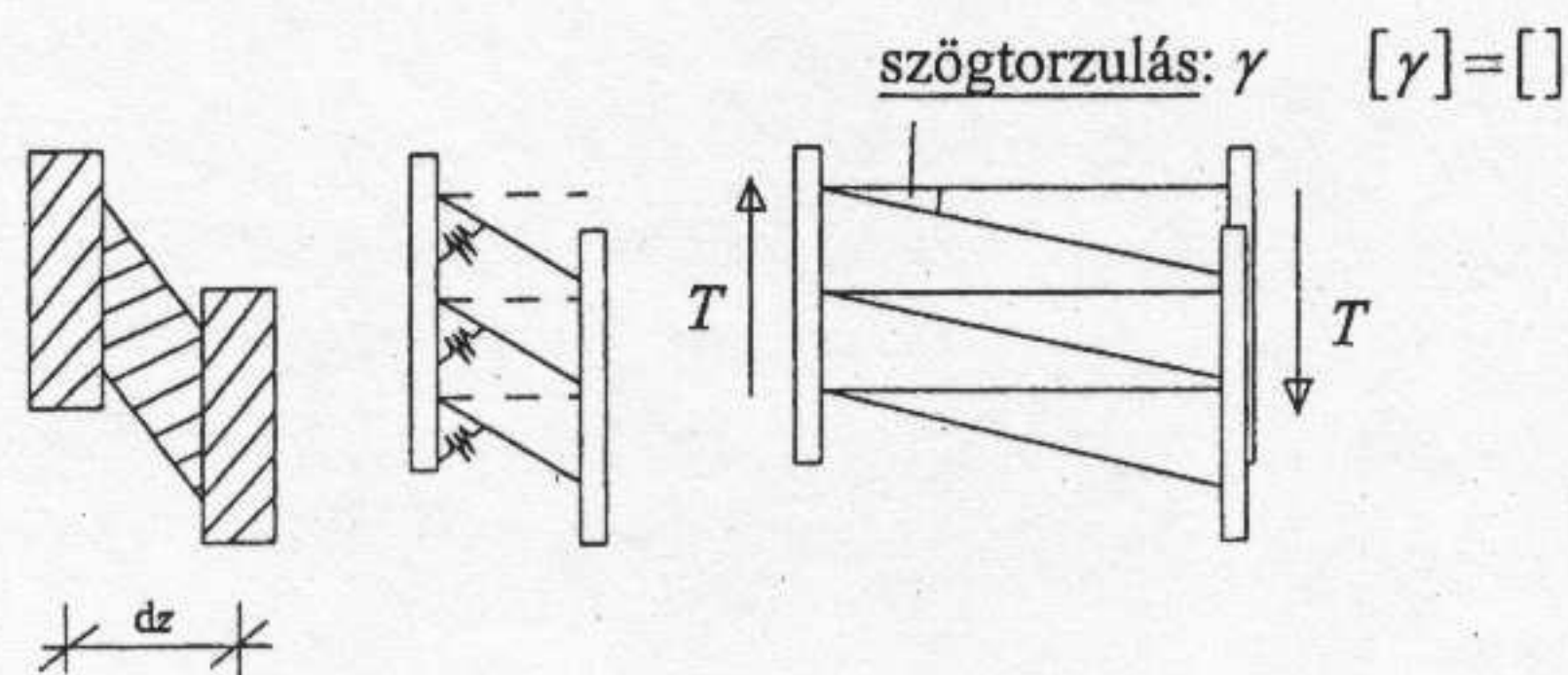
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

alakú, ahol  $\nu$  a Poisson szám.

Egyenletek:



2.10. ábra.



2.11. ábra.

1. Egyensúlyi:  $\int_A \tau dA = V.$
2. Geometriai:  $\gamma = \text{konst!} = a.$
3. Anyagegyenlet:  $\tau = G\gamma.$

Megoldás:

$$V = \int_A \tau dA = \int_A G\gamma dA = G \int_A a dA = aG \int_A dA = aGA.$$

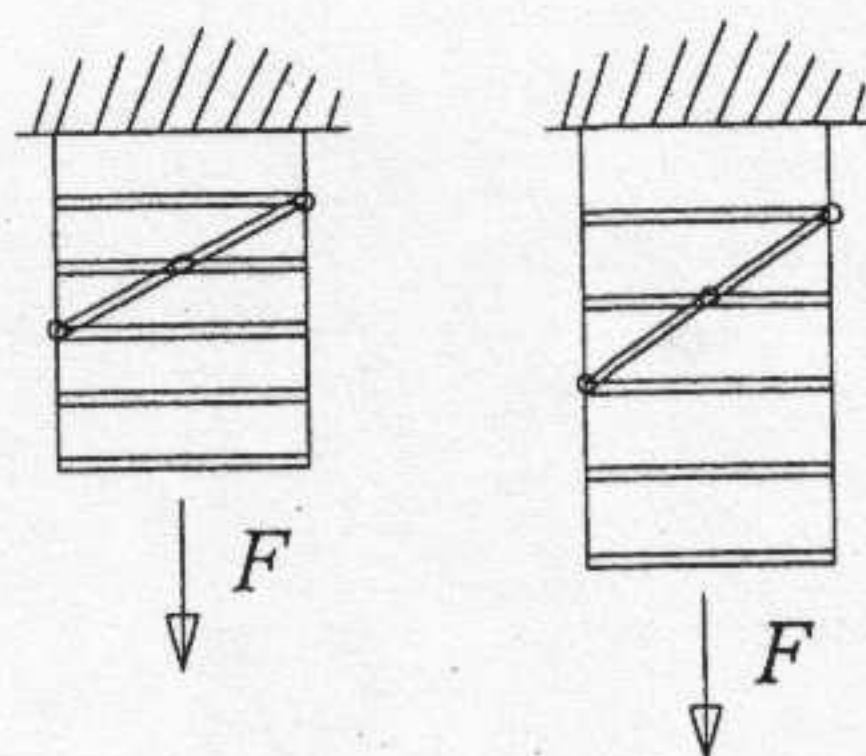
Azaz

$$a = \frac{V}{AG} = \gamma \quad \text{és} \quad \tau = \frac{V}{A}.$$

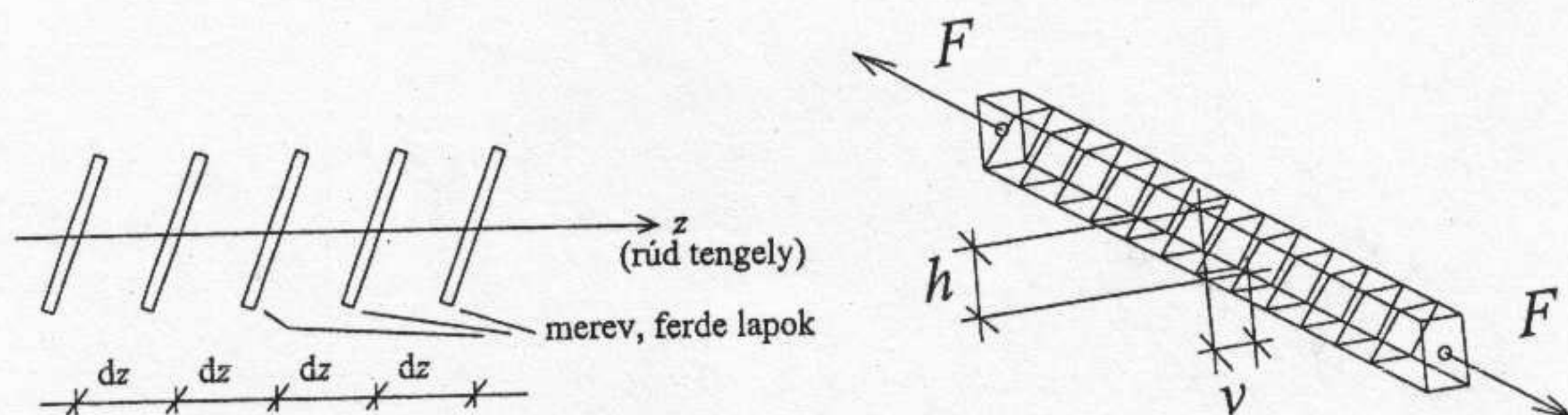
## 2.5. Ferde metszeteken fellépő feszültségek

Csak központos húzás esetén igaz, hogy ha a rúdtengelyre merőleges metszetek síkok maradnak, akkor a *ferde* metszetek is síkok maradnak. Ekkor tehát alkalmazható a 2.13. ábrán látható modell is. Jelölje  $\hat{A}$  a ferde metszet területét, azaz

$$\hat{A} = \frac{A}{\cos \alpha}.$$



2.12. ábra.



2.13. ábra.

Számítsuk ki a feszültségeket központos húzás esetén az eddigi módszerrel!  
Egyenletek:

1. Egyensúlyi:

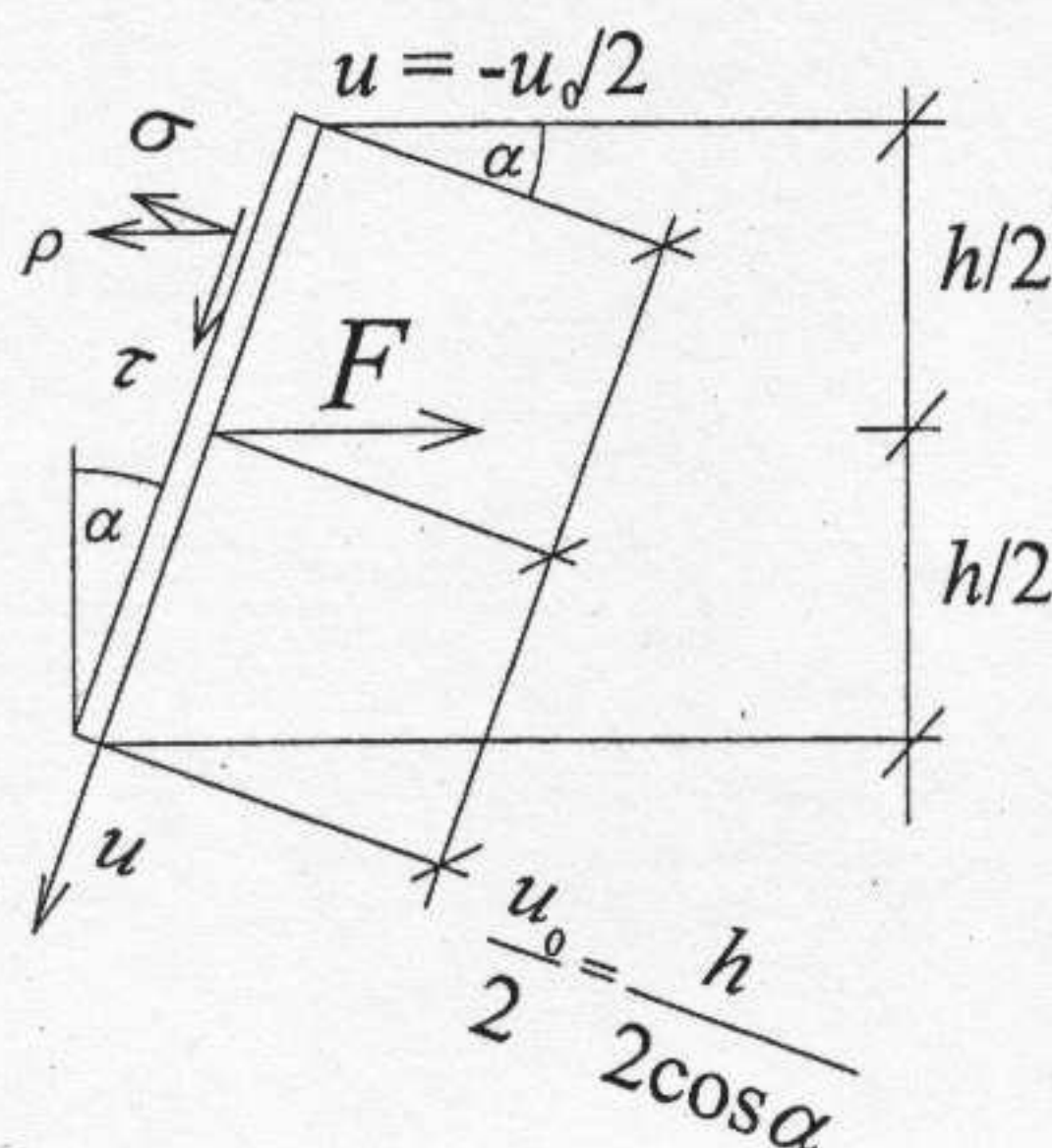
- (a) keresztmetszet síkjára merőleges:  $\int_A \sigma dA = F \cos \alpha$
- (b) keresztmetszet síkjával párhuzamos:  $\int_A \tau dA = F \sin \alpha$
- (c) nyomaték:  $\int_A \sigma u dA = 0$

2. Geometriai:

- (a)  $\varepsilon = au + b$
- (b)  $\gamma = c$

3. Anyagegyenlet

- (a)  $\sigma = E\varepsilon$
- (b)  $\tau = G\gamma$



2.14. ábra.

**Megoldás:** Az 1.(a), 1.(b) és 1.(c) egyenletekbe rendre a 3., majd a 2. egyenletek megfelelő tagját helyettesítjük:

$$\begin{aligned}
 F \cos \alpha &= \int_A \sigma dA = E \int_A \varepsilon dA = E \int_A (au + b) dA = \\
 &= Ea \int_A u dA + Eb \int_A dA = Eb \hat{A} \rightarrow b = \frac{F \cos \alpha}{E \hat{A}} \\
 \int_A \sigma u dA &= E \int_A \varepsilon u dA = E \int_A (au + b) u dA = \\
 &= Ea \int_A u^2 dA + Eb \int_A u dA = 0 \rightarrow a = 0 \\
 F \sin \alpha &= \int_A \tau dA = G \int_A \gamma dA = Gc \int_A dA = \\
 &= Gc \hat{A} \rightarrow c = \frac{F \sin \alpha}{G \hat{A}}
 \end{aligned}$$

Visszahelyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{F \cos \alpha}{\hat{A}} = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha, \\
 \tau &= \frac{F}{A} \cos \alpha \sin \alpha, \\
 \tan \beta &= \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha,
 \end{aligned}$$

vagyis  $\rho$  párhuzamos a rúdtengellyel! Hogyan függ  $\sigma$  és  $\tau$   $\alpha$  értékétől? Ez már a feszültségi állapot vizsgálata. A normálfeszültségek esetében

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{F}{A} 2 \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0 \quad \text{ha} \quad \alpha = k \frac{\Pi}{2},$$

ahol  $k$  nemnegatív egész szám. Ez azt jelenti, hogy

$$\text{ha } \alpha = 0^\circ, \quad \text{akkor } \sigma = \frac{F}{A},$$

$$\text{ha } \alpha = 90^\circ, \quad \text{akkor } \sigma = 0.$$

A nyírófeszültségekre pedig

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = u'v - v'u = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{F}{A},$$

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = 0 \quad \text{ha} \quad \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos \alpha = + - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\Pi}{4} + -k \frac{\Pi}{2}$$

ahol  $k$  nemnegatív egész szám. Ez azt jelenti, hogy

$$\text{ha } \alpha = 45^\circ, \quad \text{akkor } \tau = \frac{F}{2A},$$

$$\text{ha } \alpha = -45^\circ, \quad \text{akkor } \tau = -\frac{F}{2A},$$

$$\text{ha } \alpha = 0^\circ, \quad \text{akkor } \tau = 0,$$

$$\text{ha } \alpha = 90^\circ, \quad \text{akkor } \tau = 0.$$

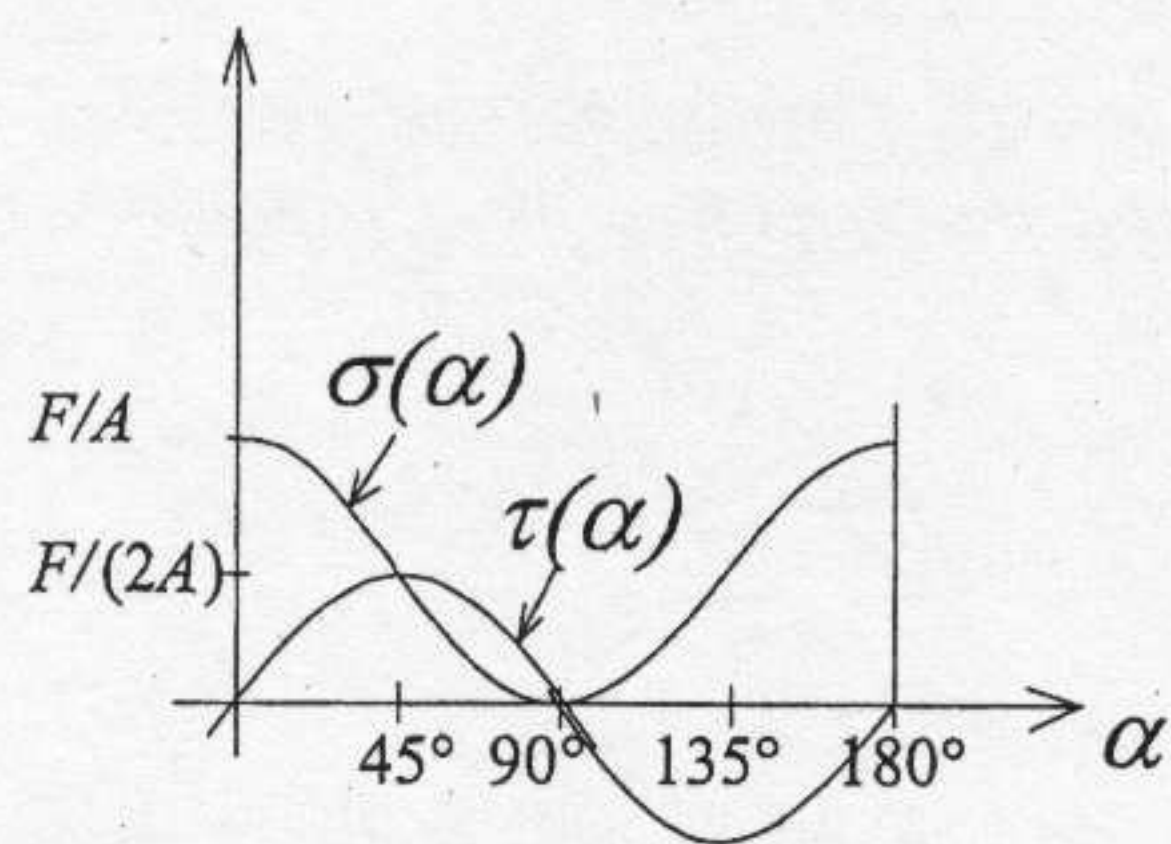
Figyeljük meg, hogy  $\alpha = 90^\circ$  esetén  $\sigma = \tau = 0$ ! Ez egy feszültségmentes sík,  $\rho$  a rúdtengellyel párhuzamos, a  $\sigma$  és a  $\tau$  feszültségek a 2.15. ábra szerint változnak az  $\alpha$  szög függvényében.

Példa gyakorlati hasznosításra: Húzott elem toldásakor, ha ferdén toldunk, akkor  $\sigma < F/A$ , tehát a kapcsoló anyag lehet gyengébb az alapanyag-nál. Ugyanakkor nyírásra is méretezni kell (2.16. ábra)!

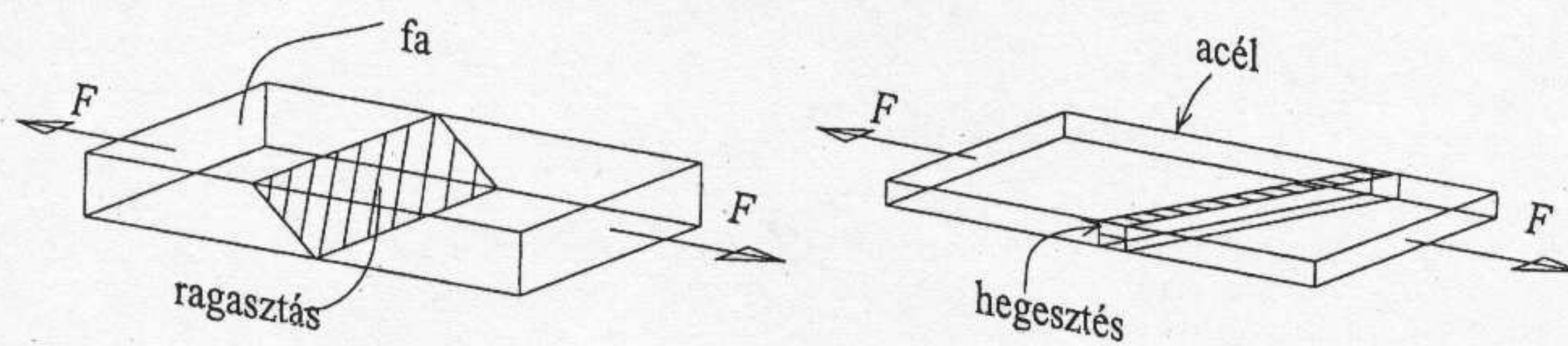
## 2.6. Tiszta hajlítás rugalmas alapon

### 2.6.1. Egyenes hajlítás

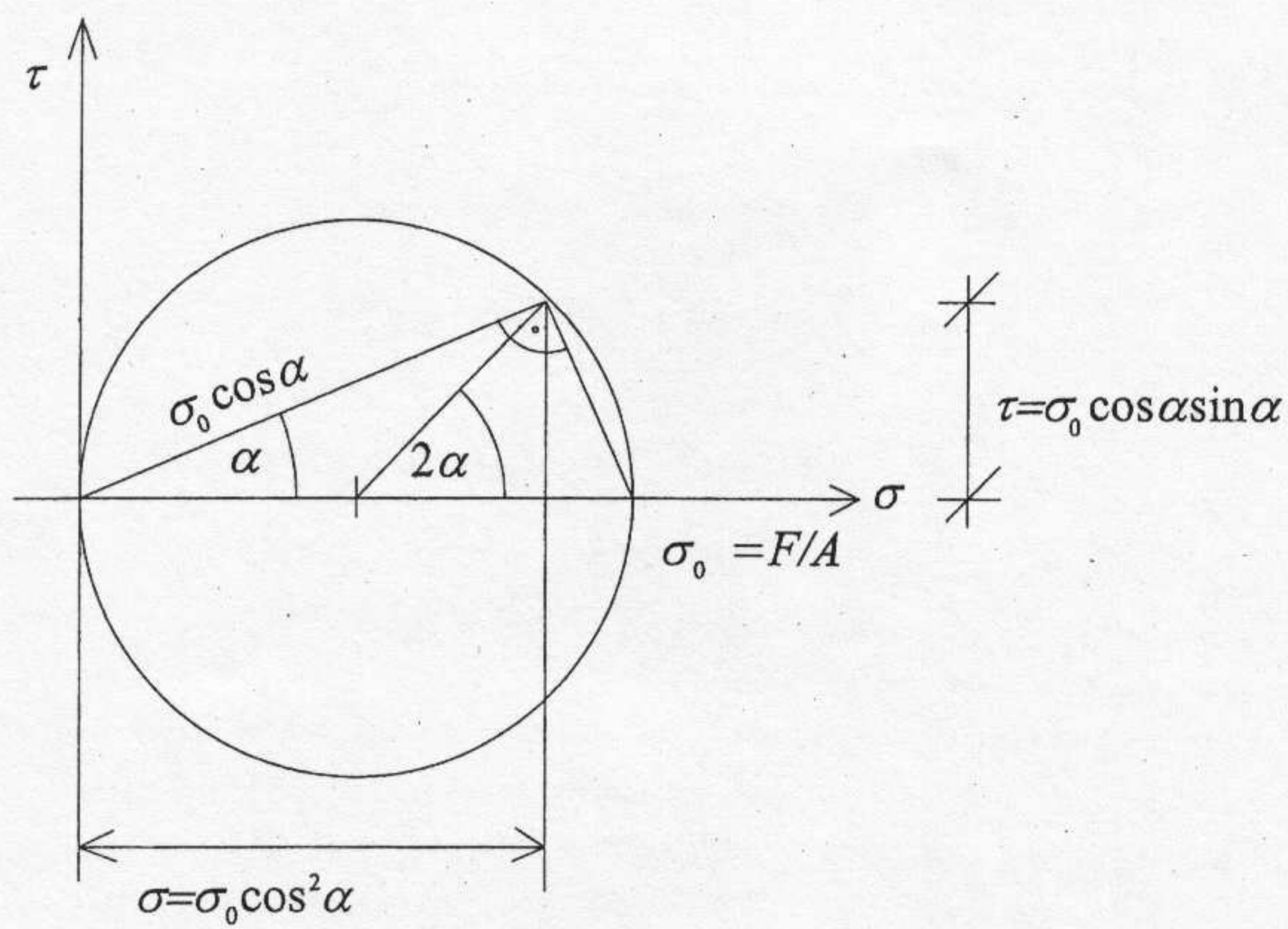
Egyenletek:



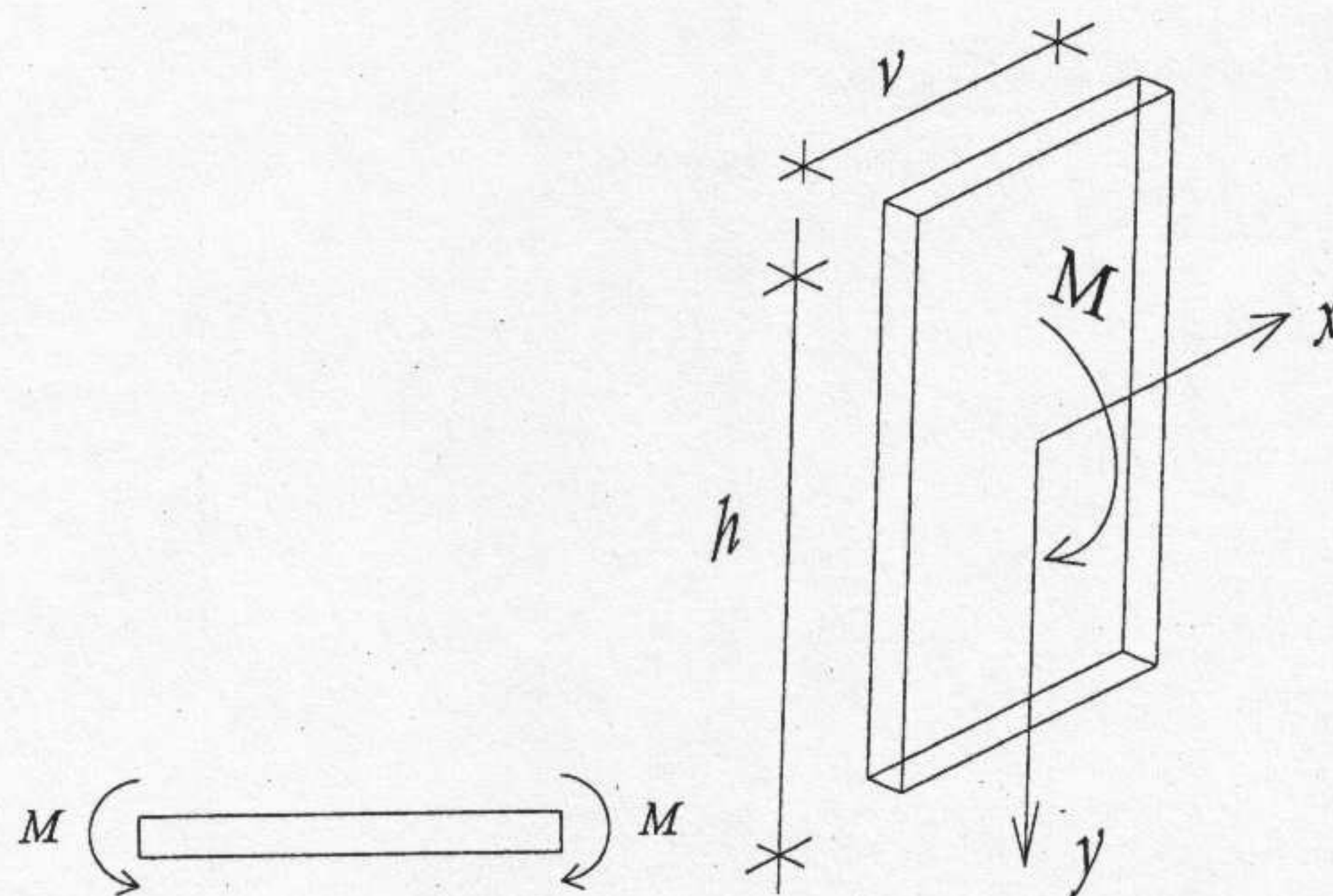
2.15. ábra.



2.16. ábra.



2.17. ábra.



2.18. ábra.

1. Egyensúlyi:

$$(a) \quad \int_A \sigma dA = 0$$

$$(b) \quad \int_A \sigma y dA = M$$

2. Geometriai:  $\varepsilon = ay + b$

3. Anyagegyenlet:  $\sigma = E\varepsilon$

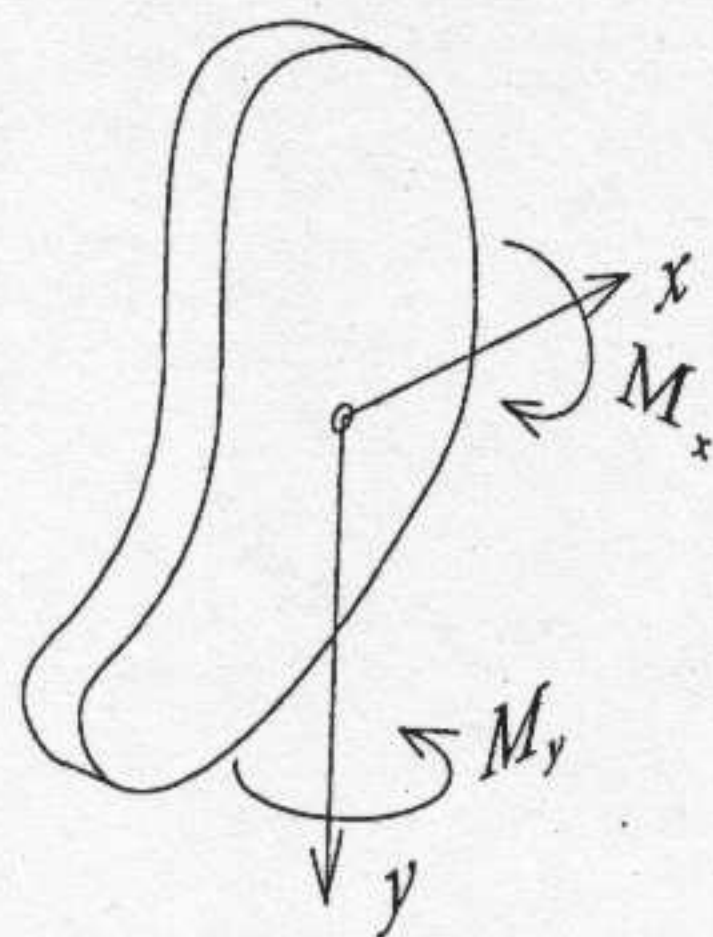
Megoldás:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma dA &= E \int_A \varepsilon dA = E \int_A (ay + b) dA = \\ &= Ea \int_A y dA + Eb \int_A dA = Ea S_x + EbA = EbA = 0 \rightarrow b = 0, \\ \int_A \sigma y dA &= E \int_A \varepsilon y dA = E \int_A (ay + b) y dA = \\ &= Ea \int_A y^2 dA + Eb \int_A y dA = Ea \int_A y^2 dA = M \rightarrow a = \frac{M}{E \int_A y^2 dA} \end{aligned}$$

ahol  $\int_A y^2 dA = I_x$  az inercianyomaték. Így

$$\varepsilon = \frac{My}{E \int_A y^2 dA}, \quad \text{és} \quad \sigma = \frac{My}{\int_A y^2 dA} = \frac{M}{I_x} y.$$

## 2.6.2. Ferde hajlítás



2.19. ábra.

Egyenletek:

1. Egyensúlyi:

$$(a) \int_A \sigma dA = 0$$

$$(b) \int_A \sigma y dA = M_x$$

$$(c) \int_A \sigma x dA = M_y$$

2. Geometriai:  $\varepsilon = ax + by + c$ 3. Anyagegyenlet:  $\sigma = E\varepsilon$ 

Megoldás:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma dA &= Ea \int_A x dA + Eb \int_A y dA + Ec \int_A dA = \\ &= EaS_x + EbS_y + EcA = EcA = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_A \sigma y dA &= Ea \int_A xy dA + Eb \int_A y^2 dA + Ec \int_A y dA = \\ &= EaD_{xy} + EbI_x = M_x \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \int_A \sigma x dA &= Ea \int_A x^2 dA + Eb \int_A xy dA + Ec \int_A x dA = \\ &= EaI_y + EbD_{xy} = M_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahol  $\int_A xy dA = D_{xy}$  a deviációs, vagy más néven terelőnyomaték. Az  $a$  és  $b$  tényezők meghatározásához a 2.1-2.2 egyenleteket kell megoldani:

$$a = \frac{1}{E} \frac{-M_x D_{xy} + M_y I_x}{I_x I_y - D_{xy}^2},$$

$$b = \frac{1}{E} \frac{M_x I_y - M_x D_{xy}}{I_x I_y - D_{xy}^2}.$$

A feszültségek meghatározására a következő adódik:

$$\sigma = \frac{-M_x D_{xy} + M_y I_x}{I_x I_y - D_{xy}^2} x + \frac{M_x I_y - M_x D_{xy}}{I_x I_y - D_{xy}^2} y \quad (2.3)$$

Ha  $M_y = 0$  és  $D_{xy} = 0$ , akkor  $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$ , az előző eset.

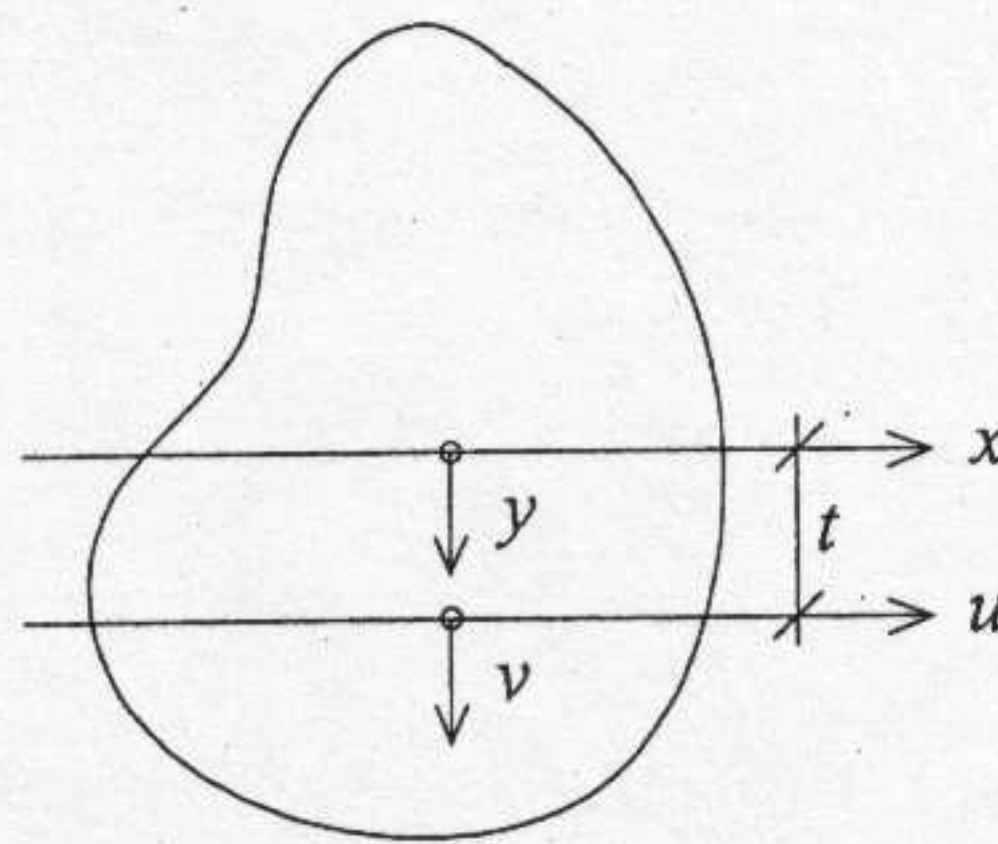
## 2.7. Másodrendű nyomatékok tulajdonságai és számításuk

Definíció:  $I_x = \int_A y^2 dA$ ,  $I_y = \int_A x^2 dA$ ,  $D_{xy} = \int_A xy dA$ .

A definíció alapján  $I_x, I_y > 0$ , inercianyomaték csak zérus méretű (pont) keresztmetszet esetén lehet zérus.

### 2.7.1. Tengely áthelyezés

Feladat:  $I_u$  meghatározása  $I_x$  és  $A$  ismeretében.



2.20. ábra.

Megoldás:

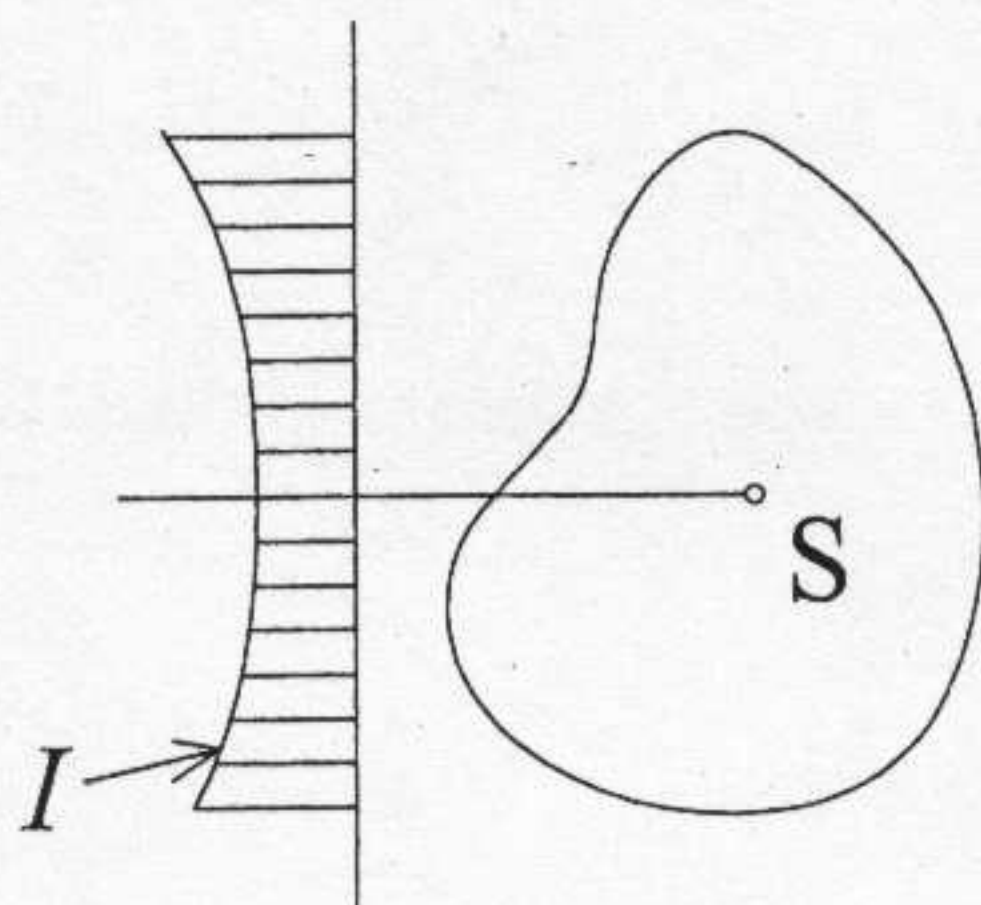
$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y - t)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A t^2 dA - 2 \int_A y t dA =$$

$$I_x + t^2 A - 2t S_x = I_x + t^2 A,$$

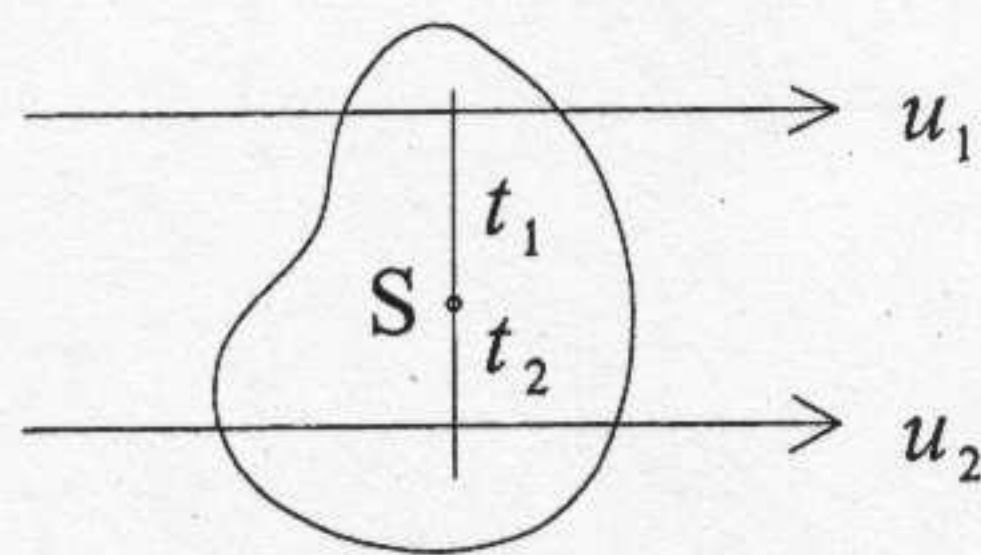
hiszen a súlyponti tengelyre  $S_x = 0$ . Átrendezve:

$$I_x = I_u - t^2 A.$$

A Steiner tétel szerint párhuzamos tengelyek közül mindig a súlyponti tengelyre a legkisebb az inercianyomaték (2.21. ábra).



2.21. ábra.



2.22. ábra.

Ha nem súlyponti tengelyről (vagy tengelyre) térünk át, akkor 3 tagból áll az összefüggés(2.22. ábra)!

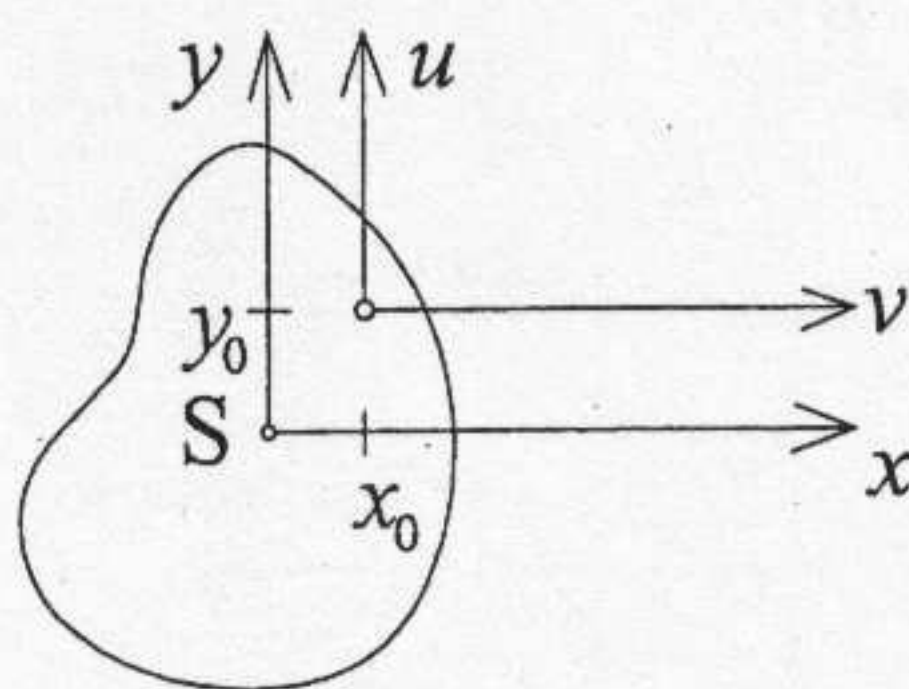
$$I_{u2} = I_{u1} - t_1^2 A + t_2^2 A = I_{u1} + A(t_2^2 - t_1^2),$$

azaz ha  $t_1 = t_2$  akkor  $I_{u1} = I_{u2}$ .

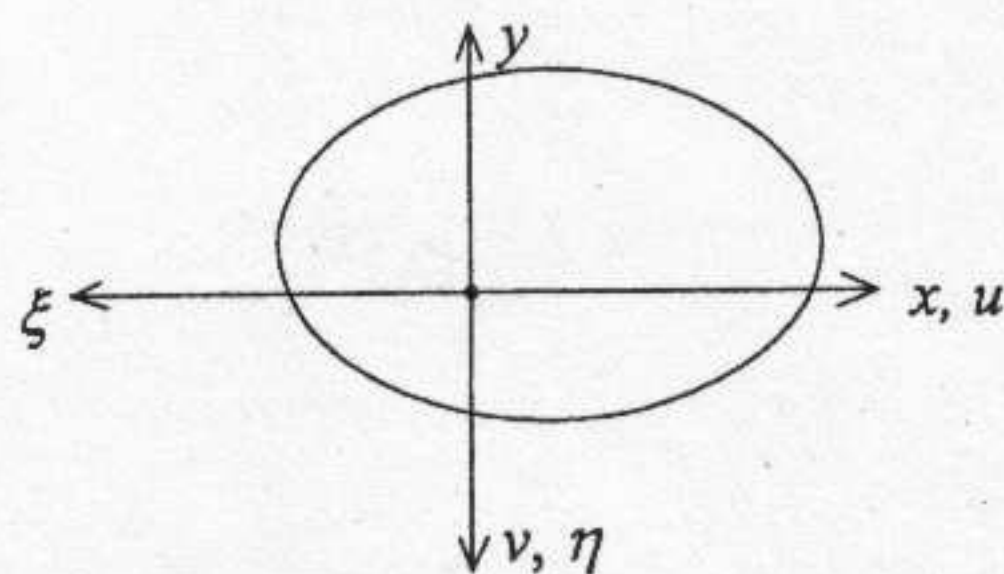
A Steiner tétel a deviációs nyomaték (2.23. ábra) esetére:

$$\begin{aligned}
 u &= x - x_0 & v &= y - y_0 \\
 \int_A uv dA &= \int_A (x - x_0)(y - y_0) dA = \\
 &= \int_A xy dA - x_0 \int_A y dA - y_0 \int_A x dA + x_0 y_0 \int_A dA = \\
 &= D_{xy} - x_0 S_x - y_0 S_y + x_0 y_0 A = D_{xy} + x_0 y_0 A,
 \end{aligned}$$

hiszen a súlyponti tengelyre  $S_x = S_y = 0$ .



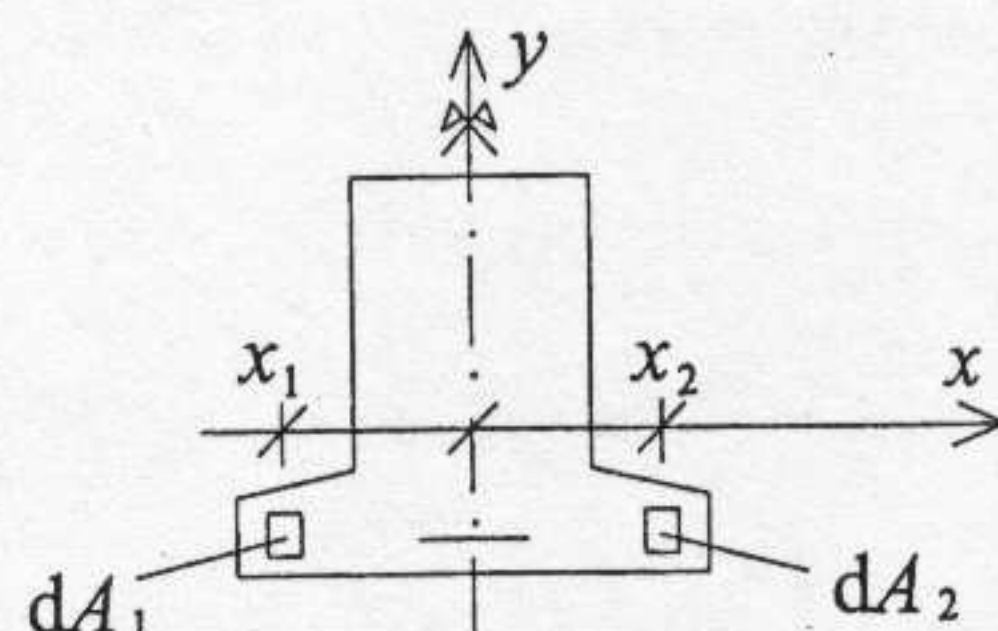
2.23. ábra.



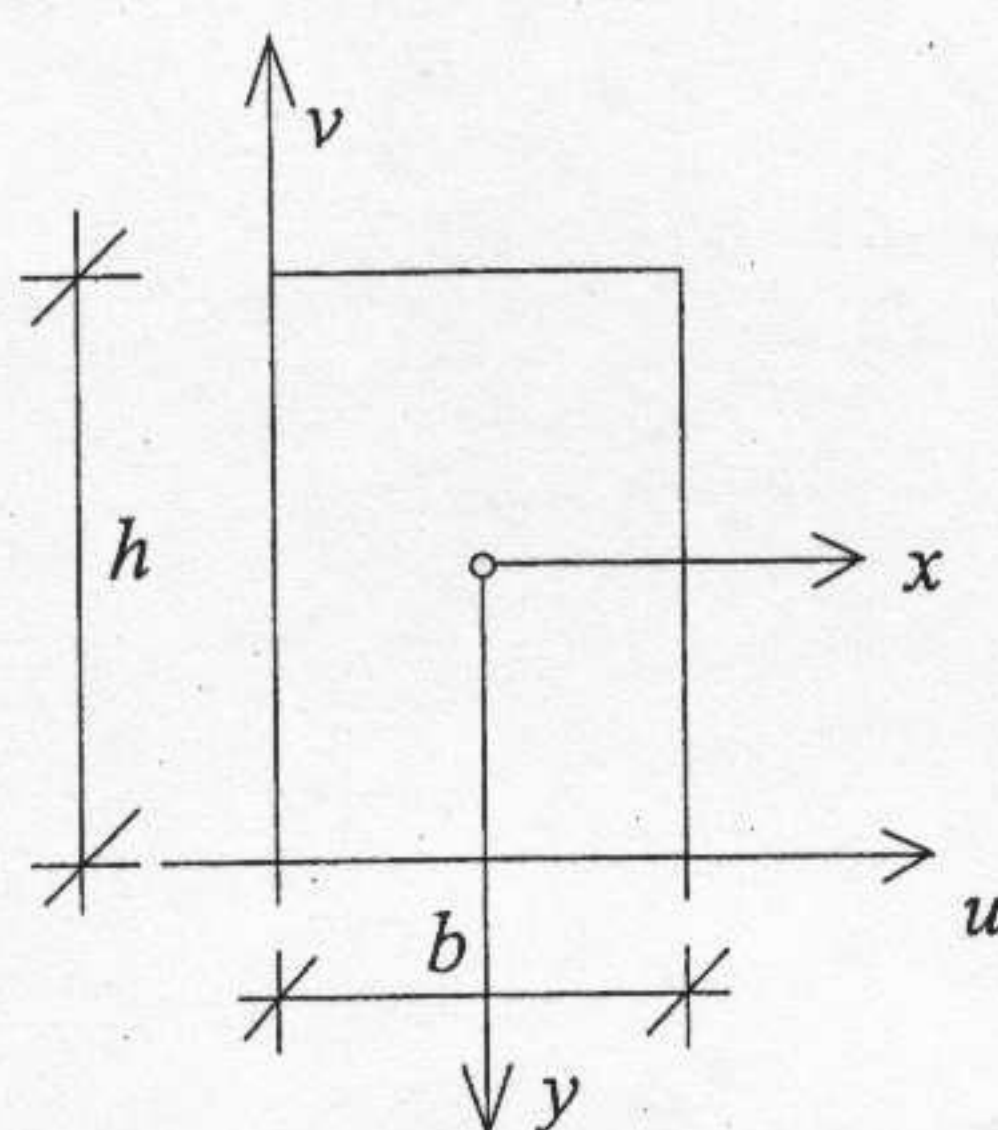
2.24. ábra.

A 2.24. ábra alapján  $D_{xy} = -D_{uv} = D_{\xi\eta}$ . A 2.25. ábra alapján szimmetrikus keresztmetszet esetén:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -x_2 & y_1 &= y_2 & x_1 y_1 &= -x_2 y_2, \\
 dA_1 x_1 y_1 + dA_2 x_2 y_2 &= 0, \\
 D_{xy} &= 0.
 \end{aligned}$$



2.25. ábra.



2.26. ábra.

## 2.7.2. Példa inercia-nyomaték kiszámítására

$$\begin{aligned}
 I_u &= \int_A v^2 dA = b \int_0^h v^2 dv = b \left[ \frac{v^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}, \\
 I_x &= I_u - bh \frac{h^2}{2} = \frac{bh^3}{12}, \\
 I_y &= \frac{hb^3}{12}.
 \end{aligned}$$

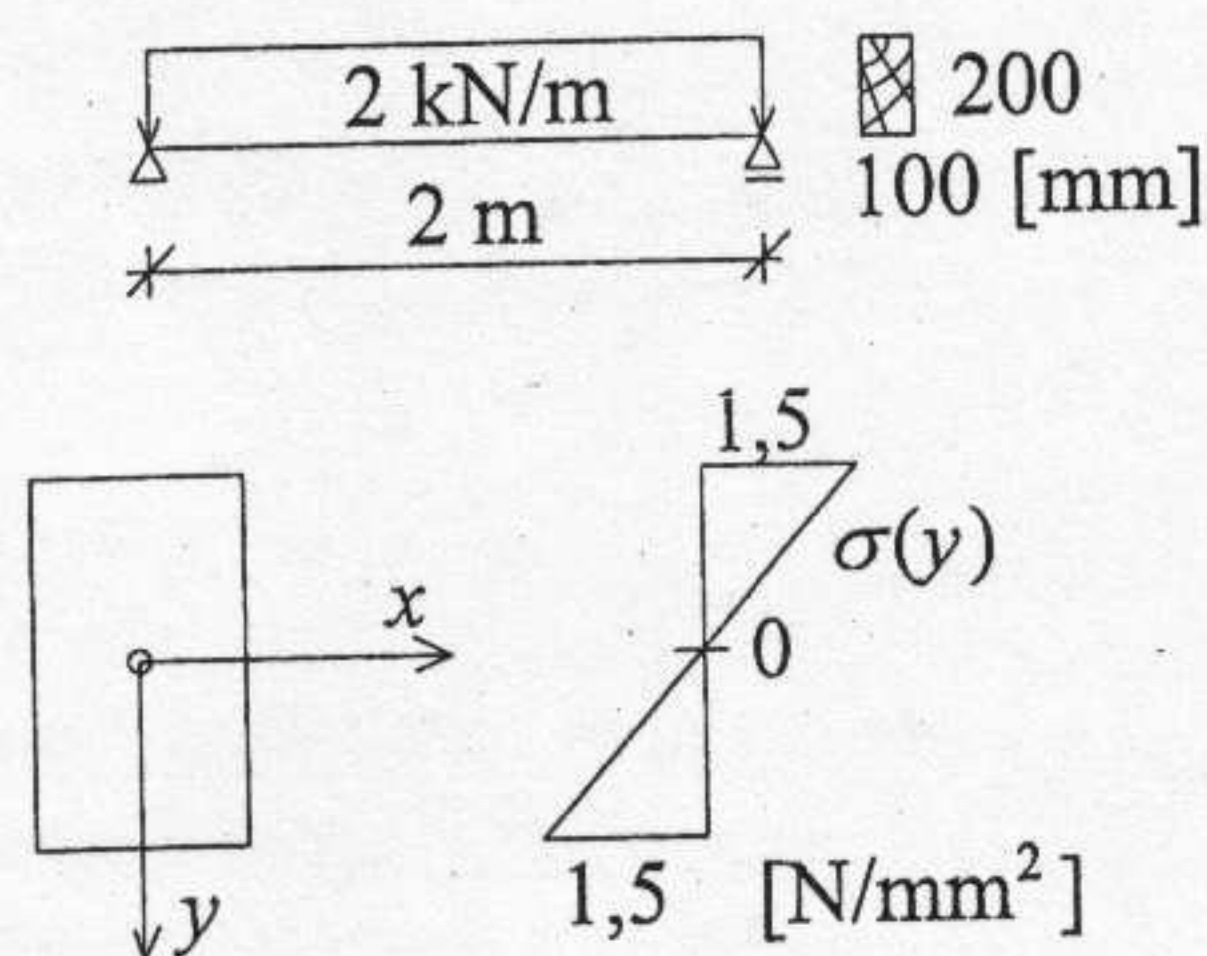
2.7.3. Példa  $\sigma$  kiszámítására

$$M_{Ed} = \frac{q_d l^2}{8} = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1 \text{ kNm} = 100 \text{ kNcm}$$

$$I_x = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = \frac{80000}{12} = 6666,67 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{100}{6666} 10 = 0,15 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma(y) = \frac{100}{6666} y = 0,015y$$



2.27. ábra.

## 2.8. A ferde hajlítás összefüggéseinek értelmezése

A 2.6.2 alpontban szereplő 2.1-2.2 egyenletek az alábbi formában is írhatóak:

$$EI \underline{n} = \underline{M},$$

ahol

$E$  a rugalmassági modulus (skalár),

$\underline{I}$  a keresztmetszet  $\begin{bmatrix} I_x & D_{xy} \\ D_{xy} & I_y \end{bmatrix}$  tehetetlenségi mátrixa,

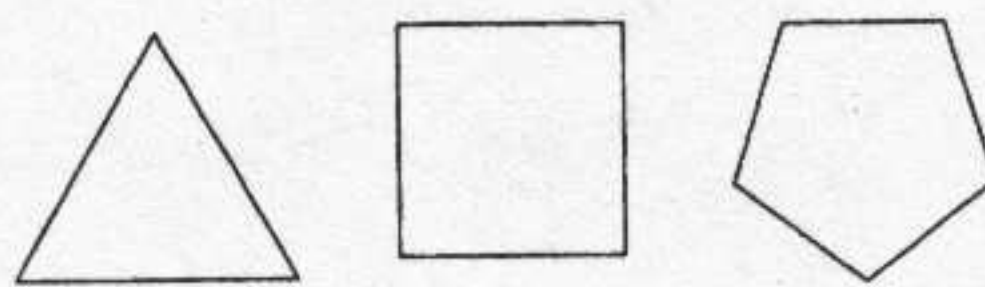
$\underline{n}$  a semleges tengely  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  normálvektora,

$\underline{M}$  a hajlítónyomaték  $\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix}$  vektora.

Ezek szerint a ferde hajlítás (lineárisan rugalmas esetben) felfogható egy lineáris vektor-vektor függvényként, mely egy  $\underline{n}$  normálvektorhoz egy  $\underline{M}$  nyomatékvektort rendel hozzá. (A  $\sigma$ -ra vonatkozó képletek bonyolultsága abból ered, hogy bennünket ezen függvény *inverze* érdekel, amely egy  $\underline{M}$  vektorhoz adja meg a semleges tengely  $\underline{n}$  normálisát.) Minden lineáris vektor-vektor függvény (tenzor) rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal (lásd még: 1.5.3. alpont):

1. Létezik 2, egymásra merőleges irány, amelyben a tenzor csak a bemenő vektor hosszát változtatja meg, irányát nem. Ebből következik, hogy van olyan  $[1, 2]$  koordináta-rendszer, ahol az  $\underline{I}$  mátrix  $\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$  alakú. Ezeket az  $[1, 2]$  irányokat *főirányoknak* nevezzük, az  $I_1, I_2$  inerciákat pedig *főinerciáknak*. A főirányok  $[1, 2]$  koordináta-rendszerében a terelő nyomaték  $D_{12} = 0$ .
2. Vagy 2 főirány van, vagy végtelen.

Korábban megállapítottuk, hogy szimmetria-tengellyel egybeeső koordináta-rendszerben  $D_{xy} = 0$ . Ezek szerint ez egyben főtengely-koordináta-rendszer. Ha a keresztmetszetnek van 2 olyan szimmetria tengelye, melyek egymásra nem merőlegesek, akkor ebből 4 főirány létezése következne, a b.) tulajdonság alapján azonban akkor *minden irány főirány*. Ilyen keresztmetszet például minden *szabályos* poligon (2.28. ábra).

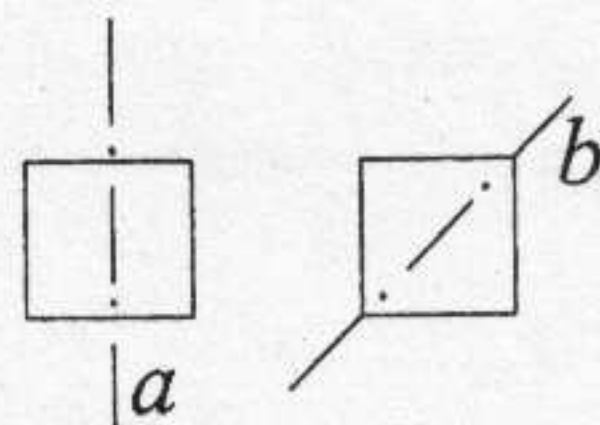


2.28. ábra.

**Megjegyzés:** Ezek szerint például a négyzet inercianyomatéka minden tengelyre azonos. Ez *nem* azt jelenti, hogy egy négyzet keresztmetszetű rudat egyformán nehéz a 2.29. ábra szerinti  $a$  és  $b$  tengely körül hajlítani, hanem azt, hogy az általunk használt *modell* (Bernoulli-Navier hipotézis, Hooke-törvény) nem tud különbséget tenni a szabályos sokszögek és a kör között.

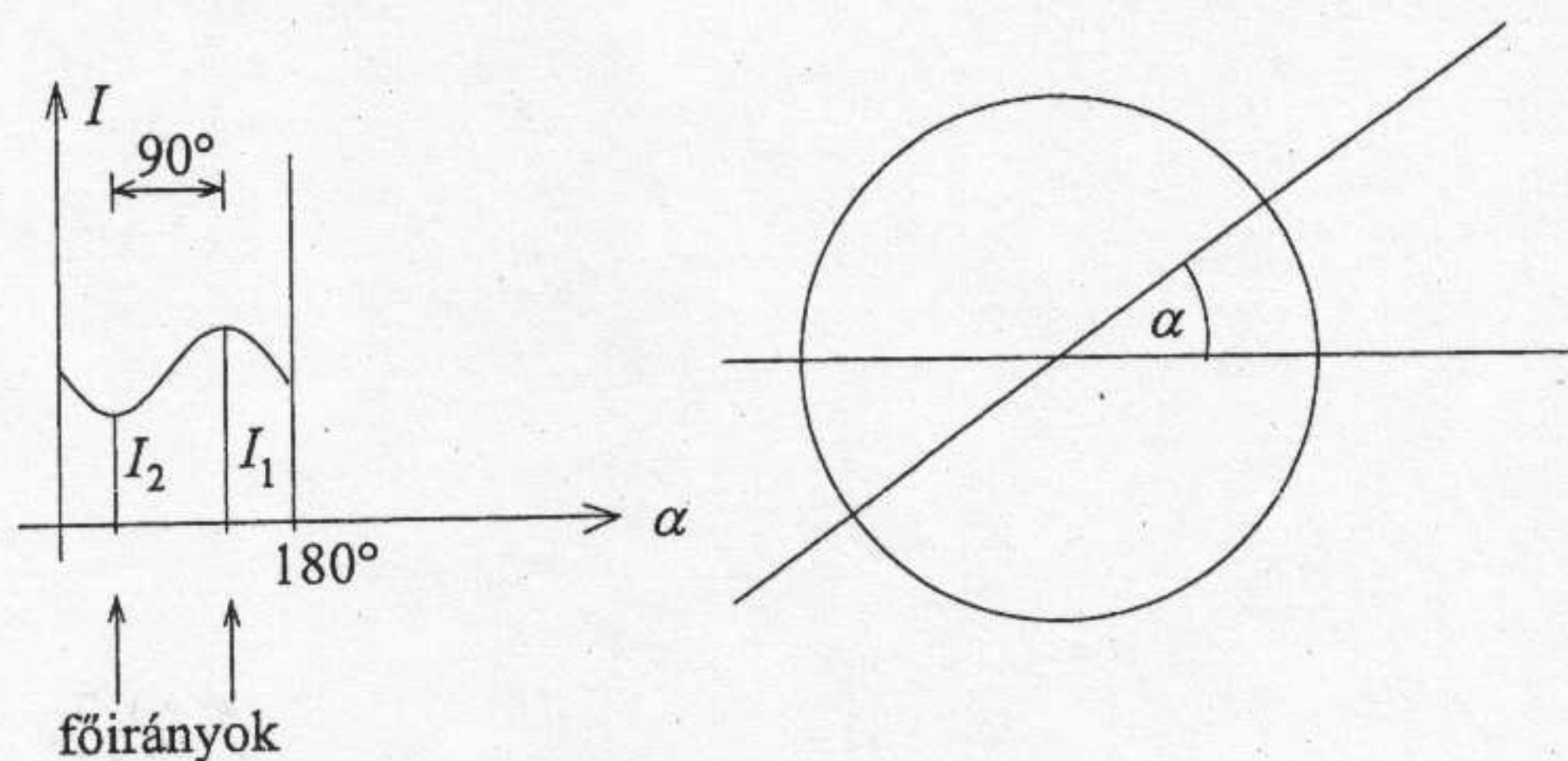
**A főtengelyek további tulajdonságai:**

Az  $I$  inercia felírható egy  $\alpha$  szög  $I(\alpha)$  függvényeként, 2.30. ábra alapján az  $I(\alpha)$  függvény a főirányokban veszi fel szélsőértékeit. Mivel a főirányokban



2.29. ábra.

$D_{xy} = 0$ , ezért a  $\sigma$ -ra levezetett 2.3 képlet jelentősen leegyszerűsödik ilyen koordináta-rendszerben:



2.30. ábra.

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}x + \frac{M_x}{I_x}y,$$

ami nem más, mint két egyenes hajlítás egymásrahalmazása. Ezek szerint általános (ferde) hajlítás esetén két út követhető:

1. Ha a keresztmetszet szimmetrikus, akkor a főirányok ismertek. Célszerű az  $\underline{M}$  vektort ebben a koordináta-rendszerben felbontani és a feszültségeket 2 egyenes hajlítás egymásrahalmazásával számolni.
2. Ha a keresztmetszet nem szimmetrikus, és a főirányok más forrásból nem ismertek, akkor célszerű a 2.3 képletet alkalmazni.

A főirányok helyzete mindig meghatározható a

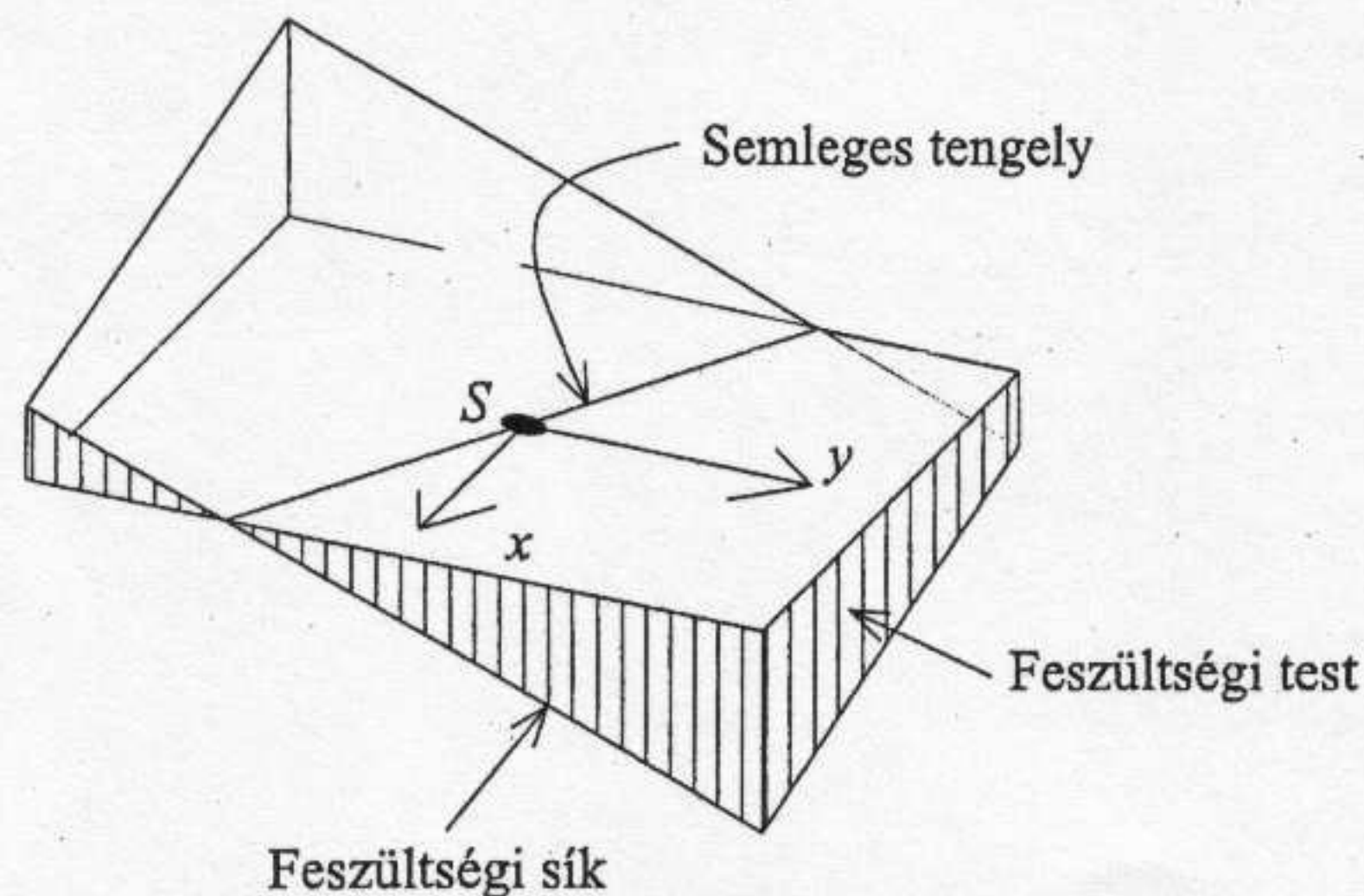
$$\tan 2\varphi_0 = \frac{-2D_{xy}}{I_x - I_y}$$

képletből, amelyben  $\varphi_0$  a nagyobbik inerciához tartozó tengely és az 1. fő-tengely közötti szöget jelöli. (Az eredeti tengelyt óramutatóval ellentétesen kell  $\varphi_0$ -al elforgatni.)

## 2.9. Feszültségábra ferde hajlítás esetén

Tegyük fel, hogy a főtengek ismertek. A semleges tengely egyenlete:

$$\frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{I_x M_y}{I_y M_x}x$$



2.31. ábra.

A semleges tengely a feszültségi sík és a keresztmetszet síkjának áthatása (2.31. ábra), ezért a semleges tengelyre merőlegesen vetítve a  $\sigma$ -ábra egyetlen vonal (2.32. ábra). Mivel a súlypontban  $\sigma = 0$ , ezért elvileg elegendő egyetlen  $\sigma$  érték kiszámítása, a többinek illeszkednie kell az egyenesre.

## 2.10. Képlékeny hajlítás

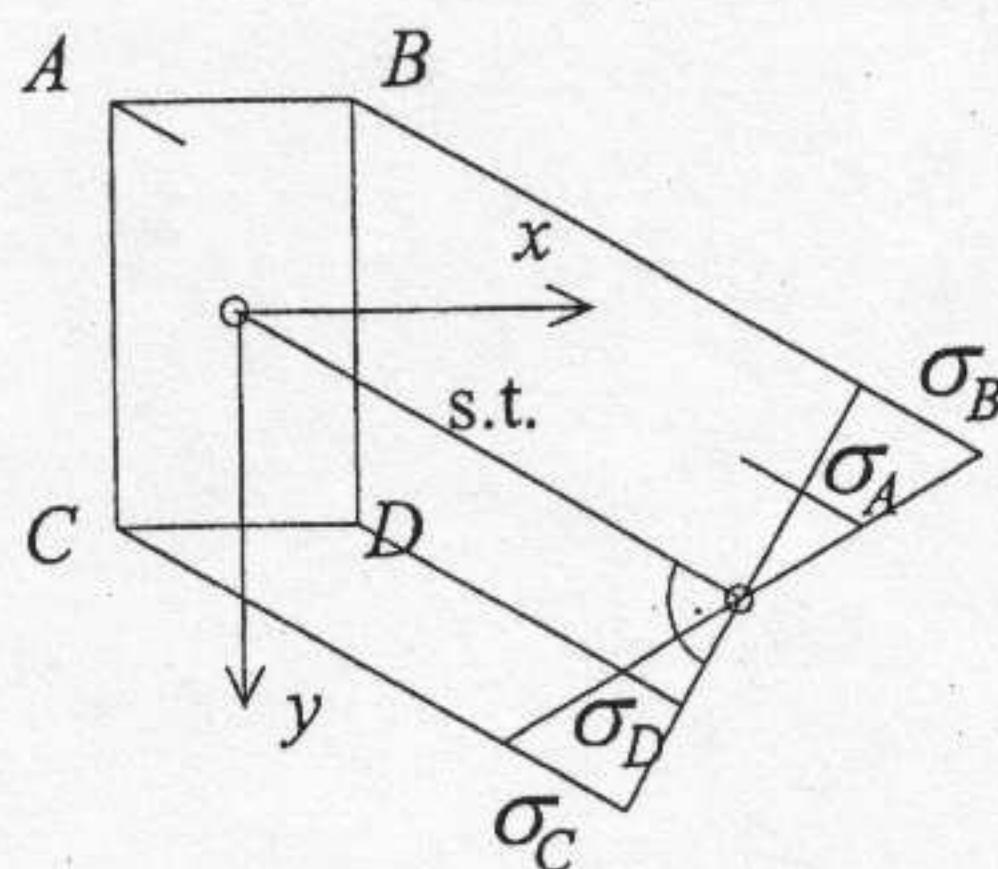
Egyenletek:

1. Egyensúlyi:

$$(a) \int_A \sigma dA = 0$$

$$(b) \int_A \sigma y dA = M_x$$

$$(c) \int_A \sigma x dA = M_y$$



2.32. ábra.

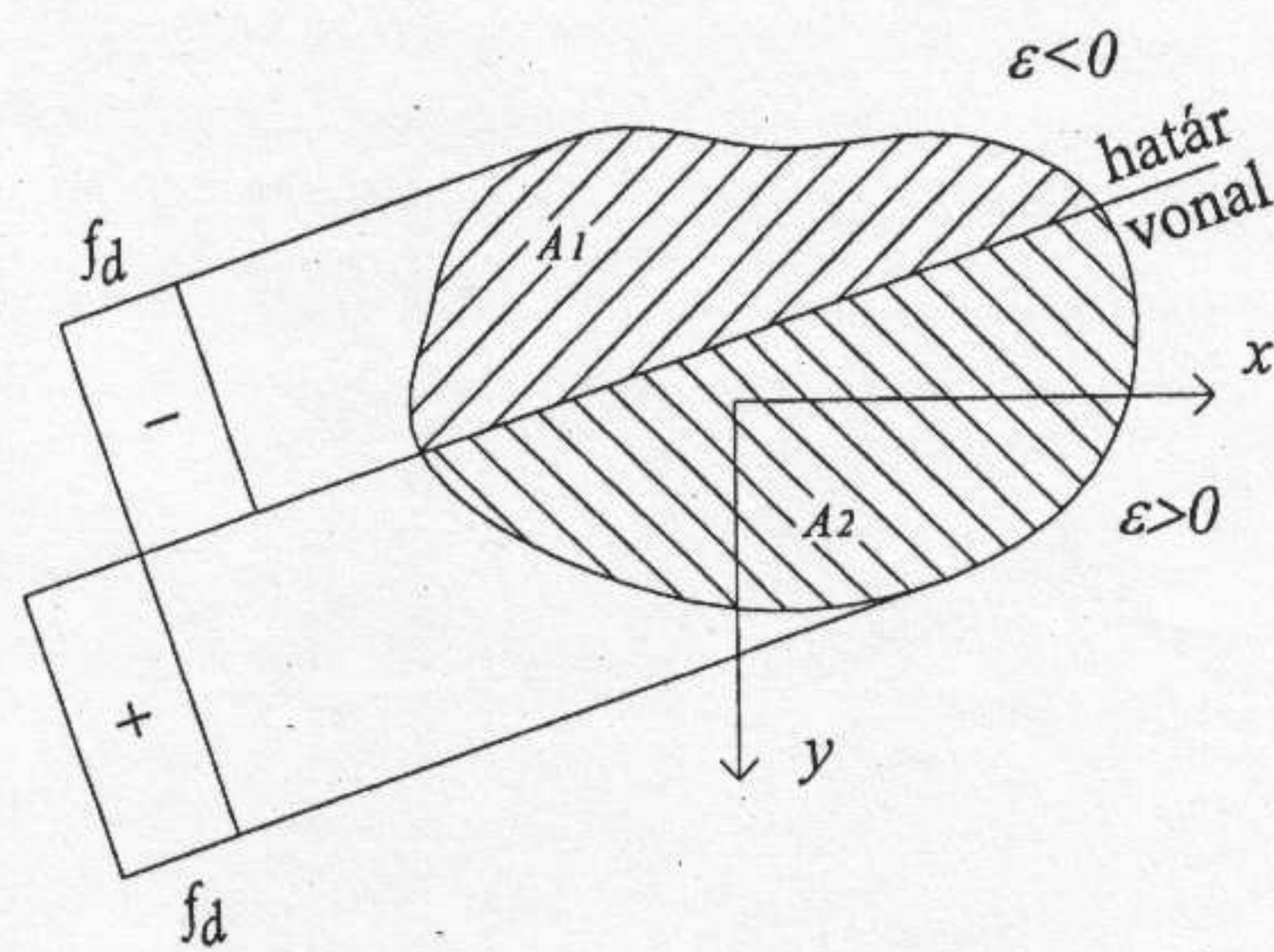
2. Geometriai:  $\varepsilon = ax + by + c$

3. Anyagegyenlet:  $\sigma = \text{sgn}(\varepsilon)f_d$

Megoldás: az ún. határvonal egyenlete a 2. egyenletből:

$$\varepsilon = 0 \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Ez egy egyenes, amely nem megy át feltétlenül a súlyponton (2.33. ábra).



2.33. ábra.

Az egyenes egyik oldalán  $\varepsilon > 0$ , másik oldalán  $\varepsilon < 0$ , tehát az 1.a és 3. egyenletek felhasználásával

$$\begin{aligned}\int_{A_1} \sigma_H dA + \int_{A_2} -\sigma_H dA &= 0 \\ \int_{A_1} dA + \int_{A_2} -dA &= 0 \\ A_1 &= A_2\end{aligned}$$

Tehát a határvonal *területfelező*. A határvonal helyét 1.b és 2. egyenletek segítségével lehet meghatározni.

### 2.10.1. Rugalmas-képlékeny átmenet egyenes hajlítás esetén

Az átmenetet a 2.34. ábra mutatja, a képlékeny tartalék:

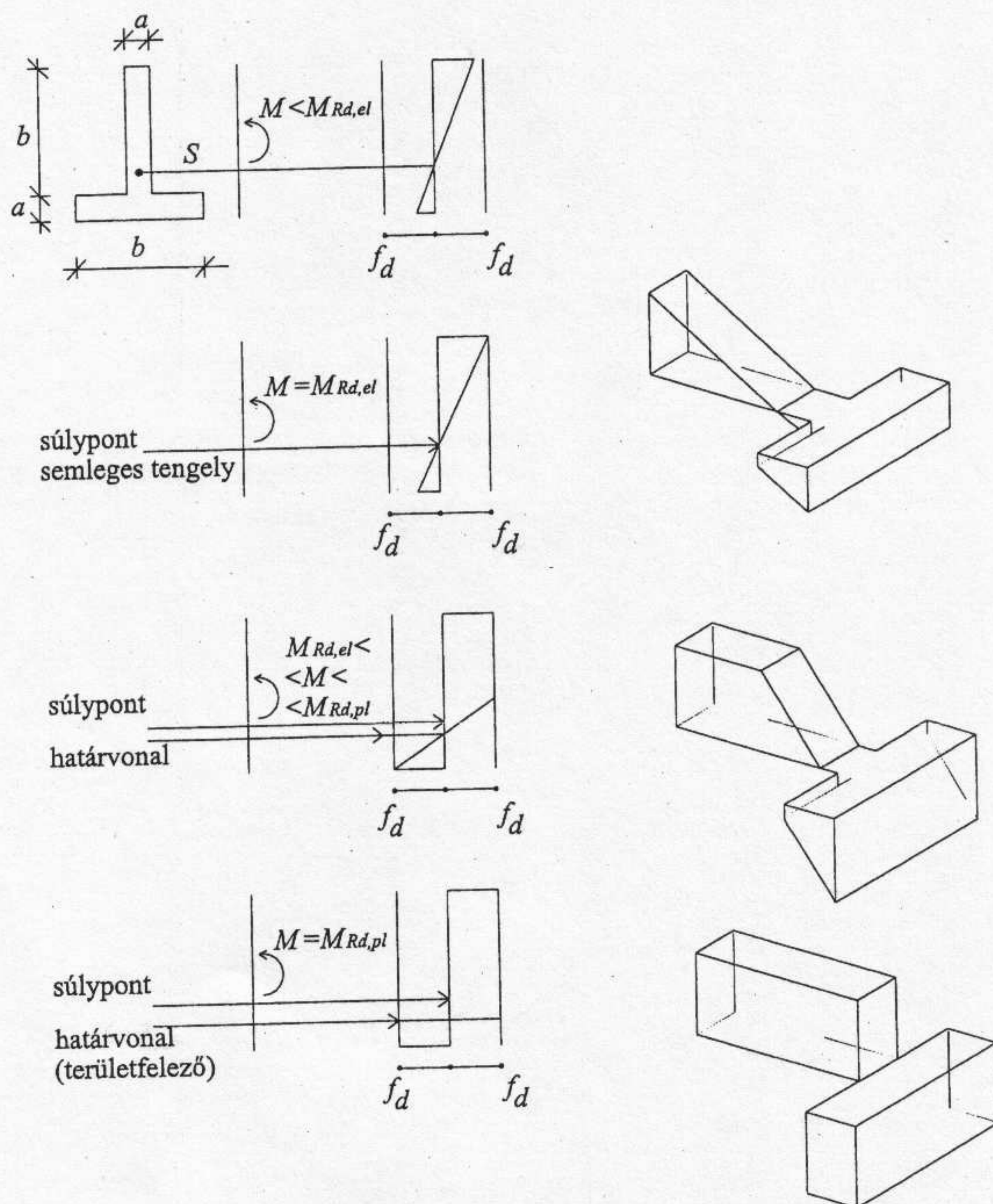
$$100 \left( \frac{M_{Rd,pl}}{M_{Rd,el}} - 1 \right),$$

két jellemző keresztmetszet képlékeny tartalékára mutat példát a 2.35. ábra.

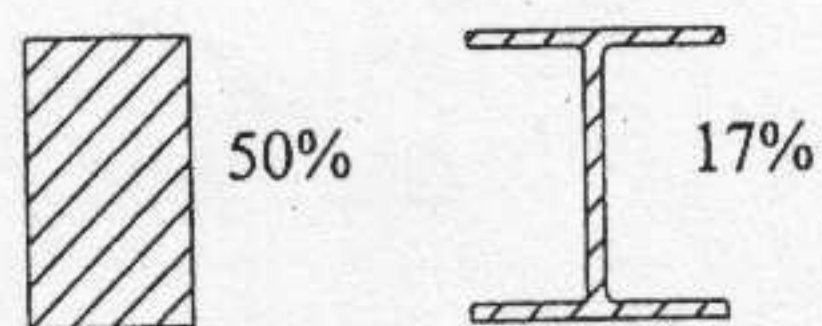
### 2.10.2. Rugalmas-képlékeny átmenet a tartó szempontjából

Statikailag határozott szerkezet (pl. 2.36. ábra) esetében amennyiben egy keresztmetszet (jelen esetben ez a középső keresztmetszet) teljesen megfolyik, azaz ott *képlékeny csukló* alakul ki, a szerkezet leszakad.

Statikailag határozatlan szerkezet esetében a 2.37. ábra szerint az  $n$ -szer határozatlan szerkezet állékony maradhat  $n$  csukló keletkezéséig.



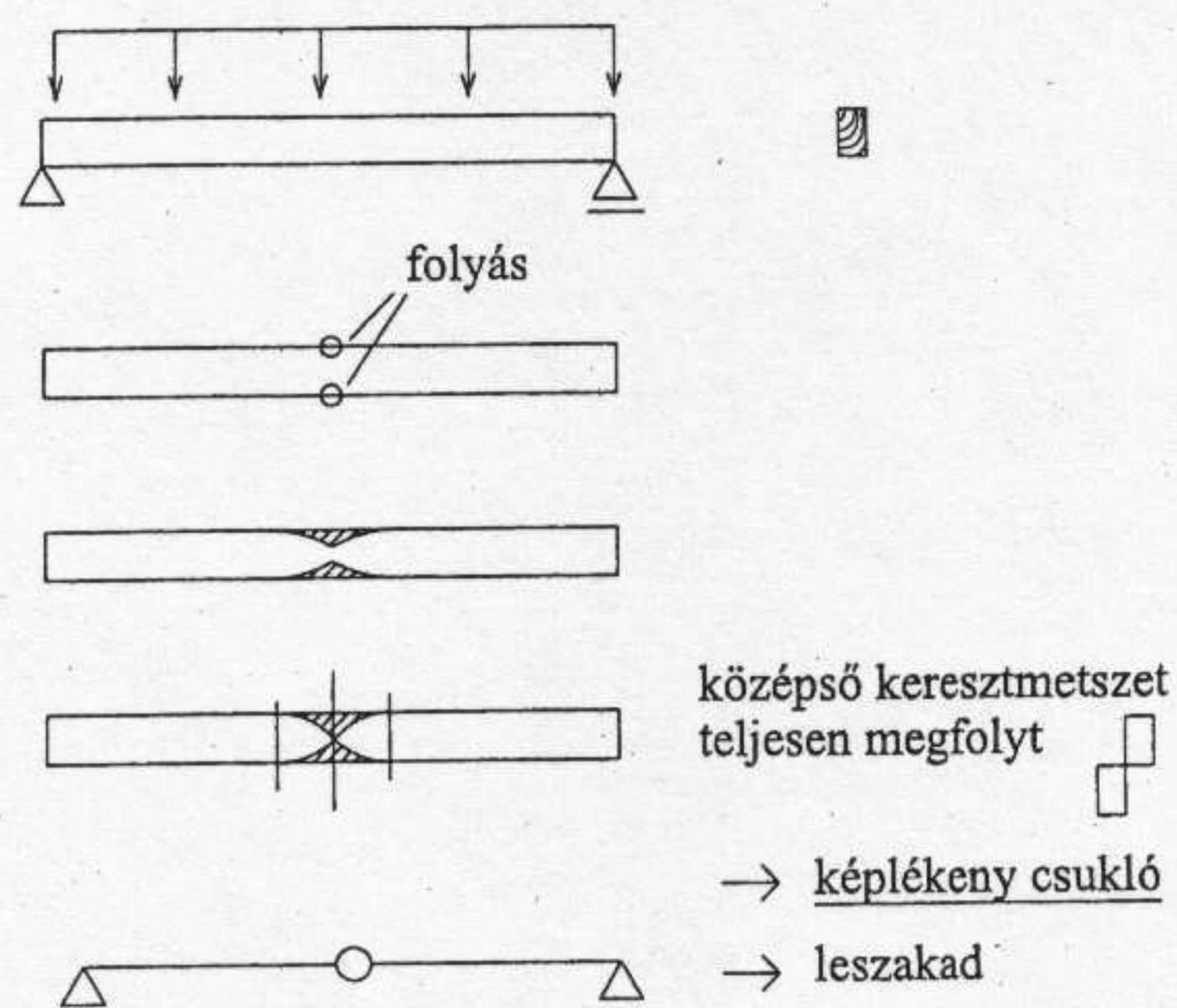
2.34. ábra.



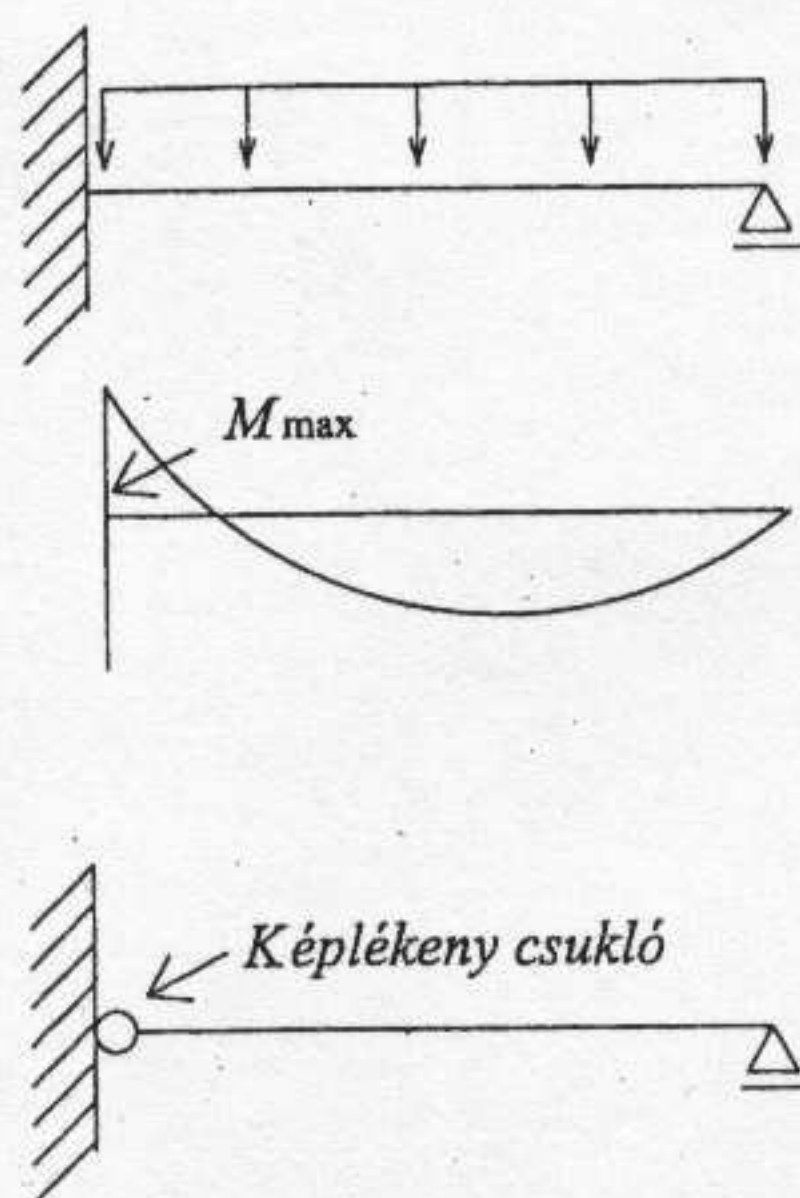
2.35. ábra.

## 2.11. Hajlítással egyidejű nyírás

Nyírás hatására a kezdetben sík keresztmetszetek torzulnak, a Bernoulli-Navier hipotézis nem érvényes. A  $\sigma$  feszültségeket a Bernoulli-Navier mo-



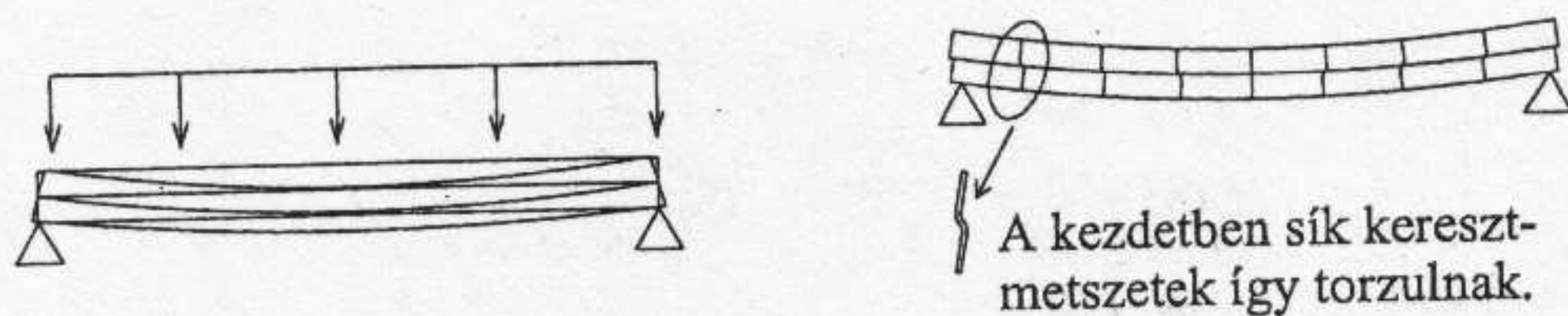
2.36. ábra.



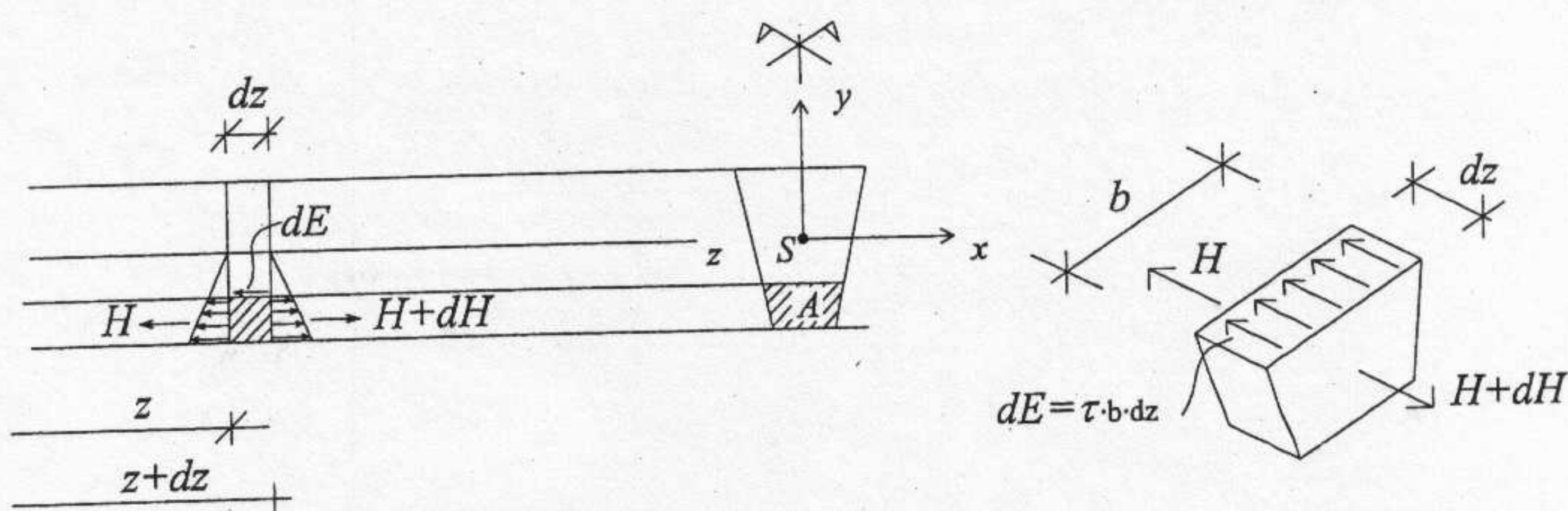
2.37. ábra.

dellből vesszük át, ami ellentmondás, a számítás nem "konzisztens". Azért csináljuk mégis így, mert más modell alkalmazása lényegesen bonyolultabb lenne.

Ha a keresztmetszet nem sík, akkor nincs geometriai egyenlet, nem egy keresztmetszetet vizsgálunk, hanem csak egy elemi hasábot (2.39. ábra).



2.38. ábra.



2.39. ábra.

$$\sigma(z) = \frac{M(z)}{I_x} y$$

$$H = \int_A \sigma(z) dA = \frac{M(z)}{I_x} \int_A y dA$$

$$H + dH = \int_A \sigma(z + dz) dA = \frac{M(z + dz)}{I_x} \int_A y dA$$

$$\int_A y dA = S_x$$

$$dE = \tau b dz = H + dH - H = \frac{S_x}{I_x} (M(z + dz) - M(z))$$

$$\tau = \frac{S_x}{b I_x} \frac{M(z + dz) - M(z)}{dz} = \frac{S_x}{b I_x} \frac{dM}{dz} = \frac{S_x V}{b I_x},$$

ahol  $\tau$  a vízszintes metszeten fellépő csúsztatófeszültség  $\text{kN/cm}^2$ . Ezt a kép-

letet Zsuravszkij vezette le. A csúsztatóerő:

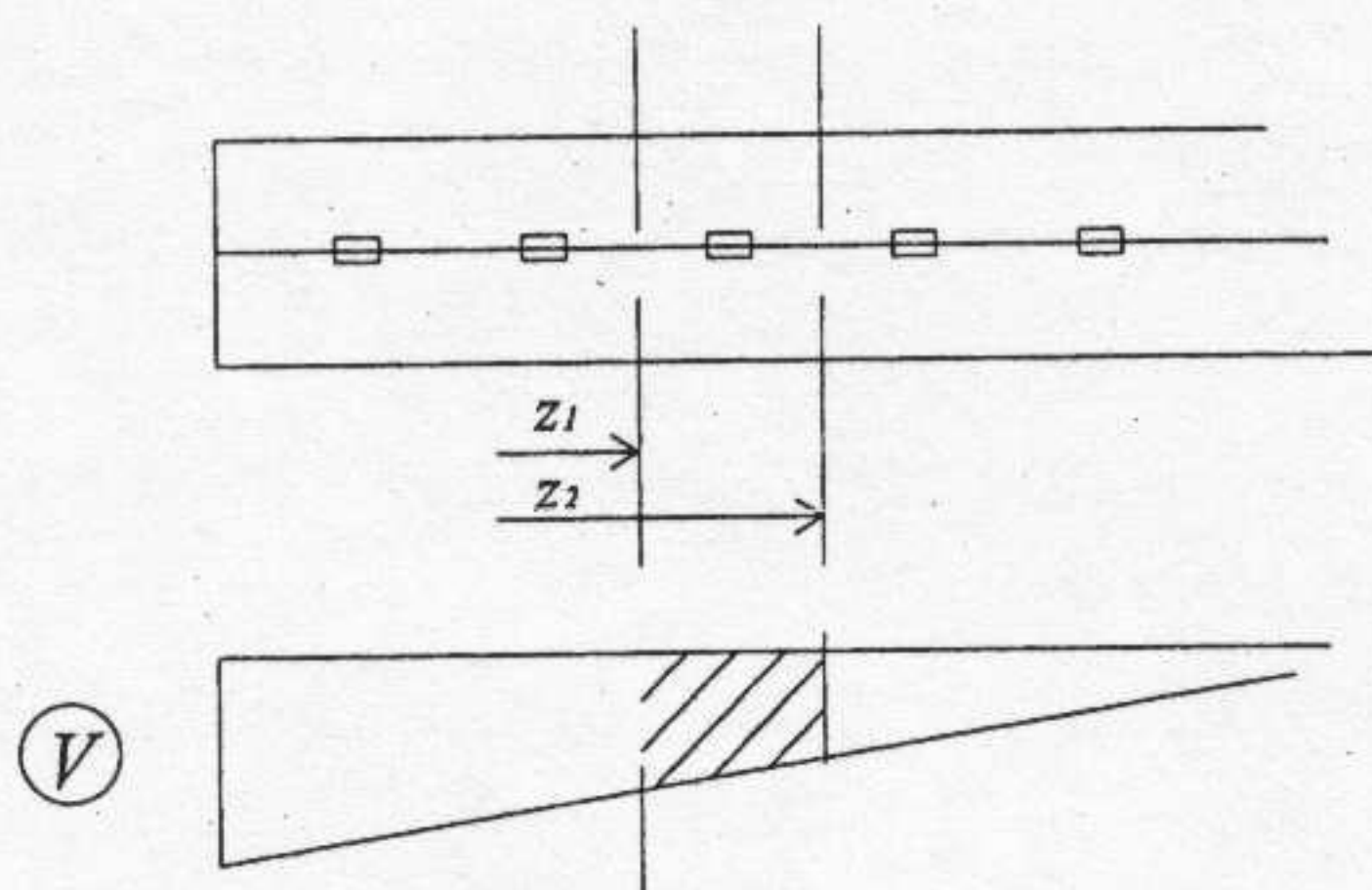
$$dE = \tau b dz = \frac{S_x V}{I_x} dz$$

$$E = \frac{S_x}{I_x} \int_A V dz$$

A fajlagos csúsztatóerő:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{S_x V}{I_x}.$$

Példa: 2.40. ábrán látható fogazott gerenda egy fogára jutó csúsztatóerő:



2.40. ábra.

$$E_{\text{fog}} = \int_{z_1}^{z_2} V dz \frac{S_x}{I_x}$$

Melyik keresztmetszet-rész statikai nyomatéka  $S_x$ ? A 2.41. ábra szerint az elcsúszni akaró keresztmetszet rész statikai nyomatékát jelöli.

**Függőleges metszeten ébredő  $\tau$  feszültségek.**

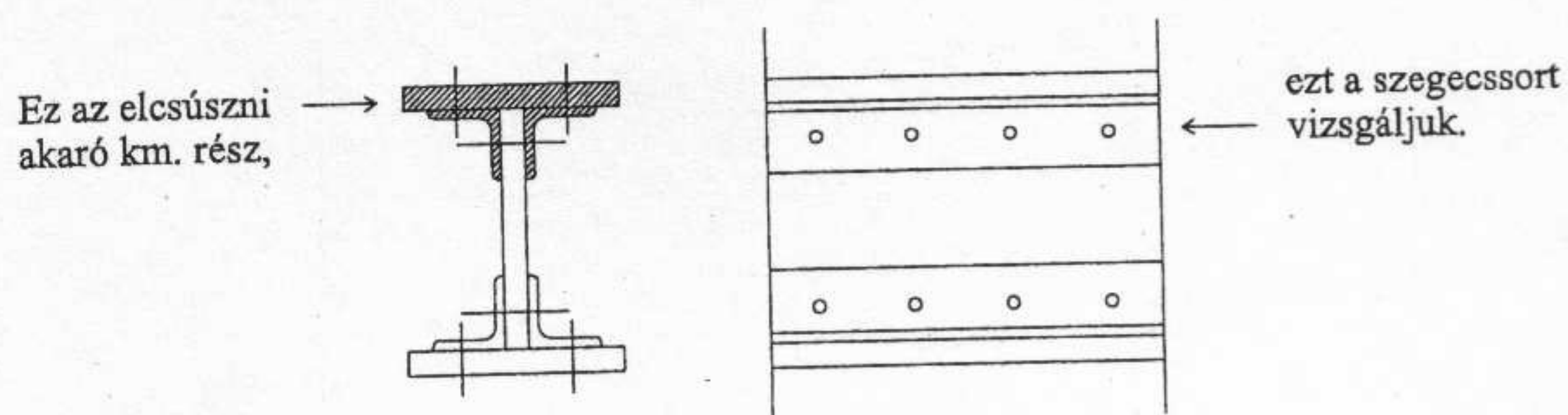
$$\tau_{yz} dz dy = \tau_{zy} dy dz$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy},$$

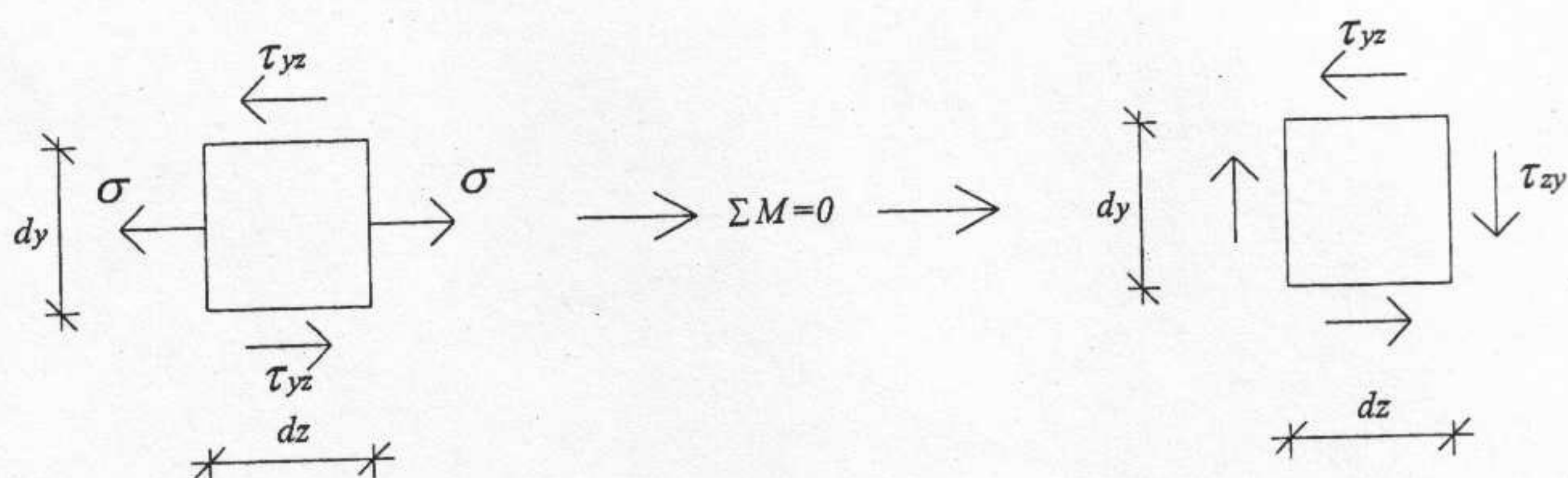
ez a nyírófeszültségek dualitása.  $\frac{V}{I_x}$  konstans a keresztmetszetben, így

$$\tau(y) = \frac{V}{I_x} \frac{S_x(y)}{b(y)}.$$

Ha  $b$  is konstans, akkor  $\tau_{\max}$   $S_{x,\max}$  helyén, azaz a súlypontban ébred.



2.41. ábra.



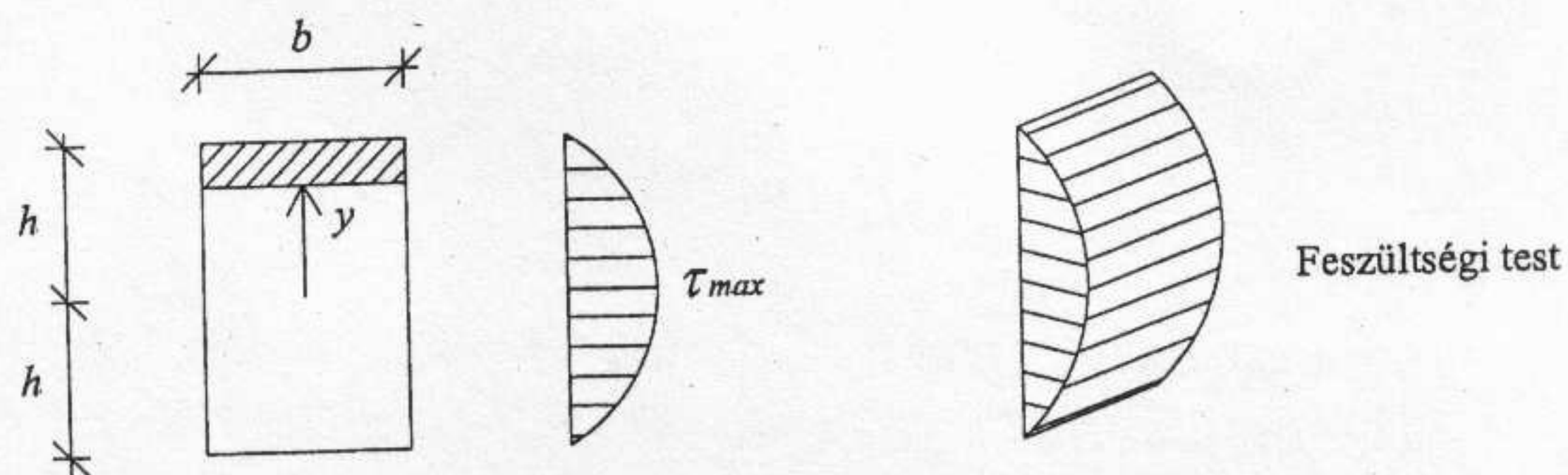
2.42. ábra.

### 2.11.1. Példák a nyírófeszültség számítására

- Téglalap:

$$\tau(y) = \frac{V}{I_x b} S_x(y) = \text{const} \cdot b(h-y) \frac{y+h}{2} = c_2 - c_1 y^2$$

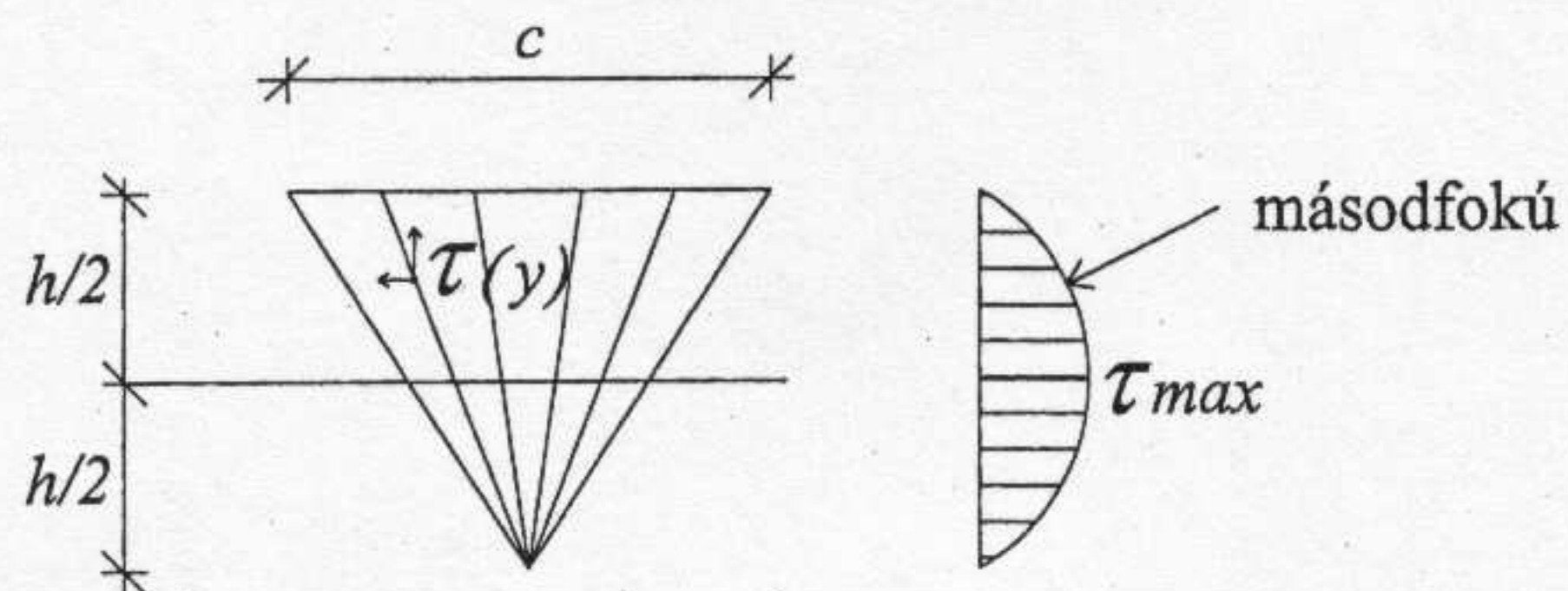
$$\tau_{\max} = c_2 = \frac{3V}{2bh} = \frac{3}{2} \tau_{\text{átlag}}$$



2.43. ábra.

- Háromszög:

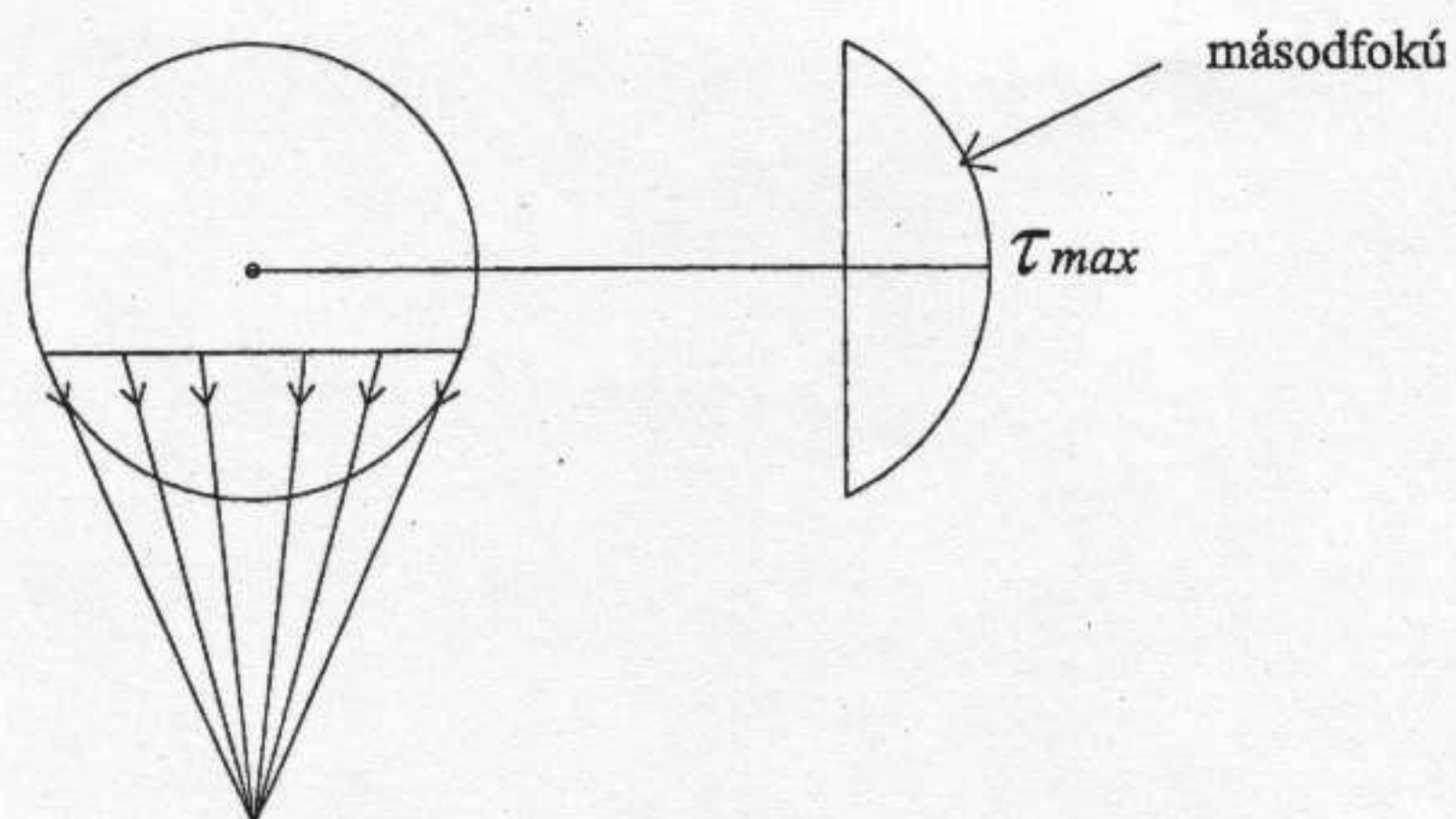
$$\tau_{max} = \frac{3V}{ch} = \frac{3}{2}\tau_{\text{átlag}}$$



2.44. ábra.

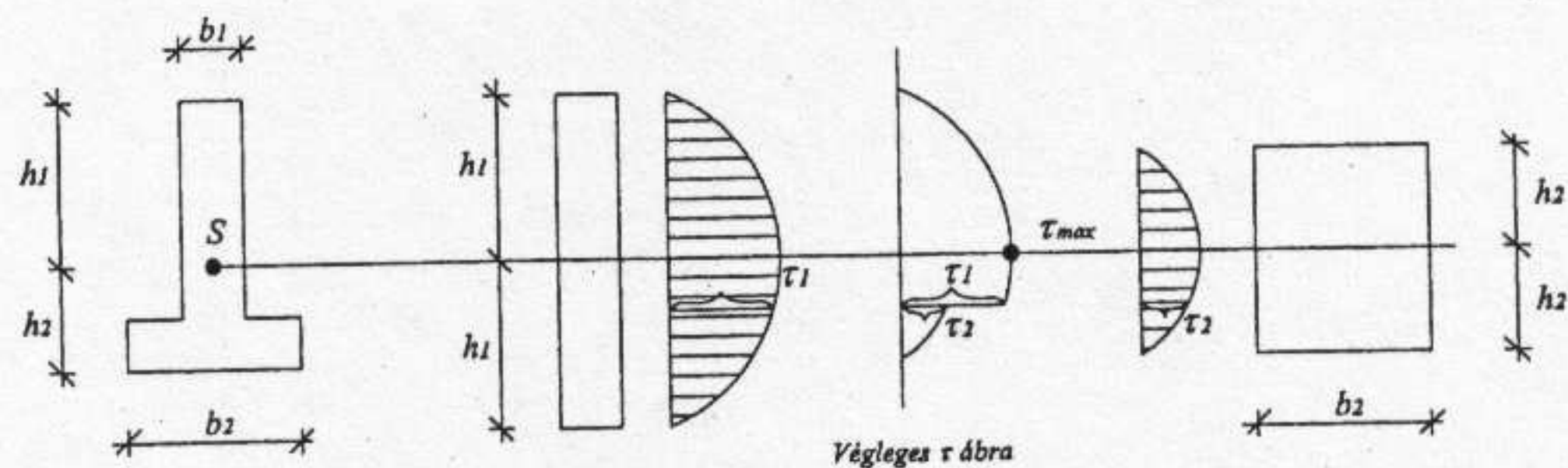
- Kör:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{r^2 \pi} = \frac{4}{3} \tau_{\text{átlag}}$$

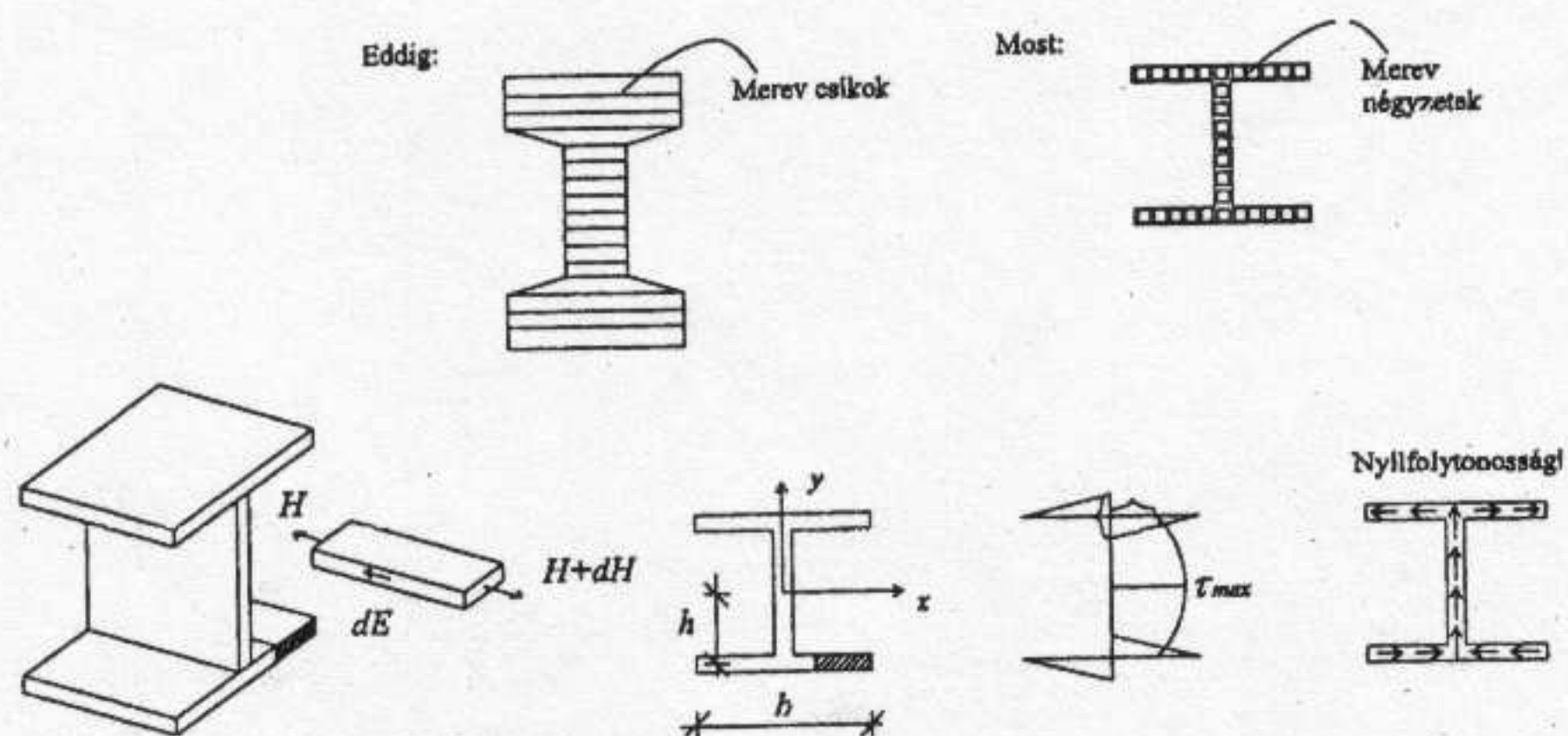


2.45. ábra.

- Összetett szelvények: A  $\tau(y)$  ábra bármely oldalról (alulról, vagy felülről) rajzolható, a megrajzolt szakasz független a továbbiaktól (kivéve a súlypont helyzetét).
- Vékonyfalú szelvények: A  $\tau$  nyírófeszültség mindig párhuzamos a szelvény középvonalával.



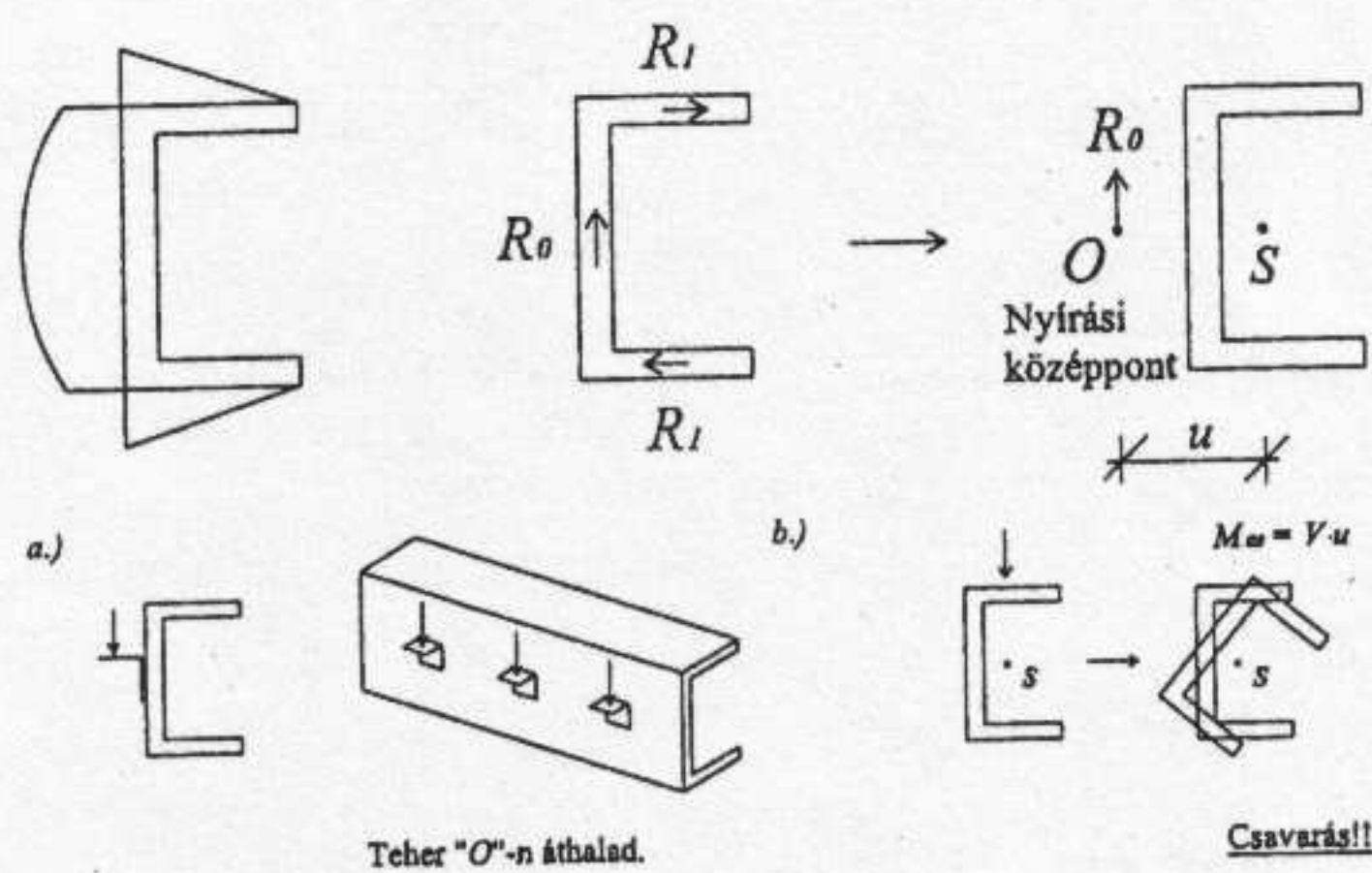
2.46. ábra.



2.47. ábra.

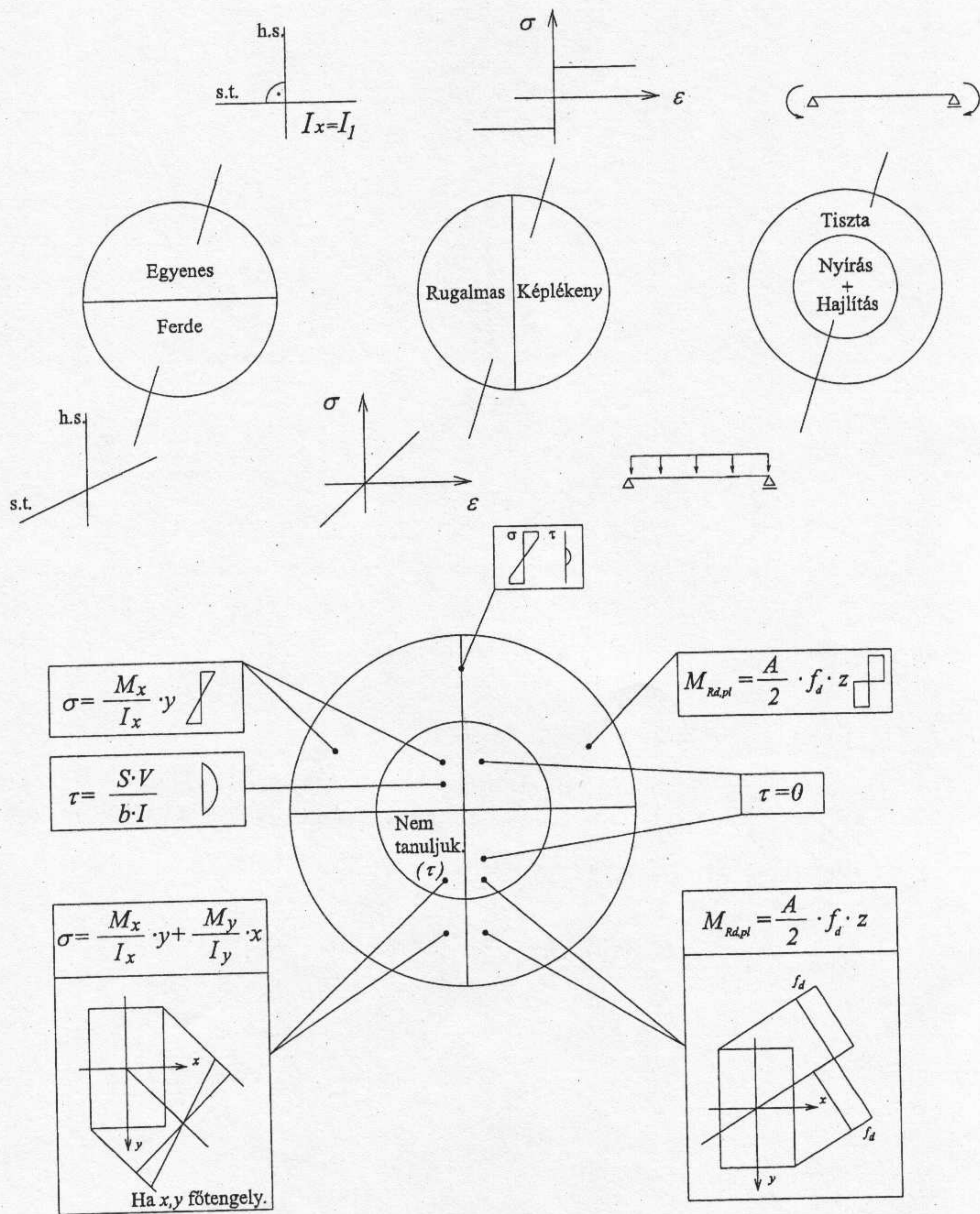
### 2.11.2. Nyírási középpont

Nem szimmetrikus keresztmetszeteknél a nyírófeszültségek eredője a keresztmetszet súlypontjára csavarónyomatékot fejt ki. A nyírási középpont a nyírófeszültségek eredőjének helye.



2.48. ábra.

## 2.12. Hajlítás - összefoglalás



2.49. ábra.

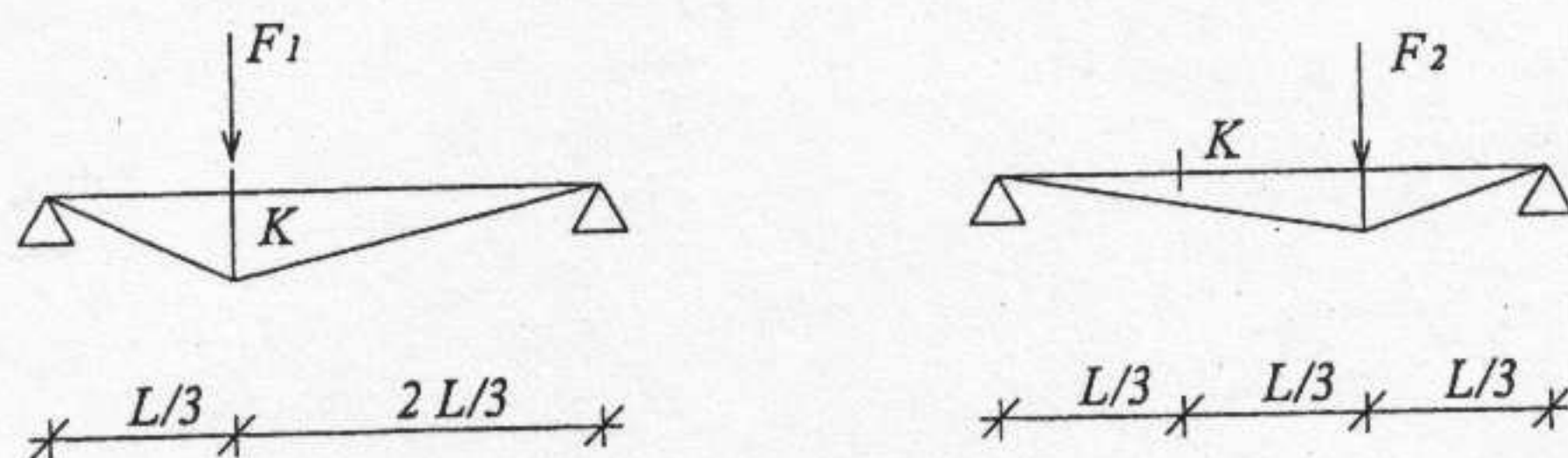
## 2.13. Lineáris szuperpozíció

Legyen  $y = f(x) = ax$ , ekkor  $f(x^1) + f(x^2) = f(x^1 + x^2)$ , hiszen  $ax^1 + ax^2 = a(x^1 + x^2)$ . Ez akkor is igaz, ha  $a$  és  $x$  vektorok ( $y$  skalár):

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} & \underline{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & y &= \underline{a} \cdot \underline{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ f(x^1) + f(x^2) &= a_1 x_1^1 + a_2 x_2^1 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = \\ &= a_1 (x_1^1 + x_1^2) + a_2 (x_2^1 + x_2^2) = \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 + x_1^2 \\ x_2^1 + x_2^2 \end{bmatrix} = \underline{a} (\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) \end{aligned}$$

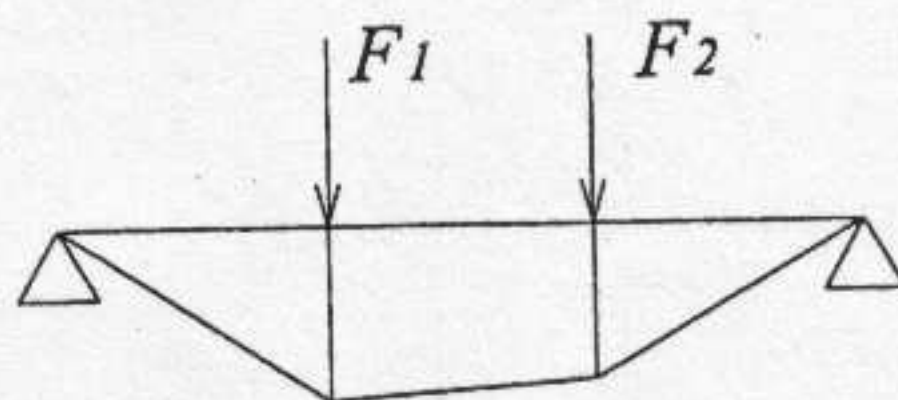
Ez a lineáris szuperpozíció elve.

Példa:



2.50. ábra.

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{2F_1}{3} \frac{L}{3} = \frac{2F_1 L}{9} \\ \underline{a} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{9}L \\ \frac{1}{9}L \end{bmatrix} & \underline{x} &= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} & y &= M_k & \underline{x}^1 &= \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \underline{x}^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix} \\ f(\underline{x}^1) + f(\underline{x}^2) &= \frac{1}{9}(2F_1 + F_2) = f(\underline{x}^1 + \underline{x}^2) \end{aligned}$$



2.51. ábra.

## 2.14. A lineáris szuperpozíció elvének alkalmazása rugalmas feszültségek számításakor

Eddigi eredmények:

$$1. \sigma = \frac{F}{A} \quad \text{központos húzás / nyomás}$$

$$2. \sigma = \frac{M_x}{I_x} y \quad \text{egyenes hajlítás}$$

$$(\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad \text{ferde hajlítás})$$

Az iménti jelölésekkel:

$$\underline{y} = \sigma \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ \frac{y}{I_x} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} \quad \underline{x}^1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}$$

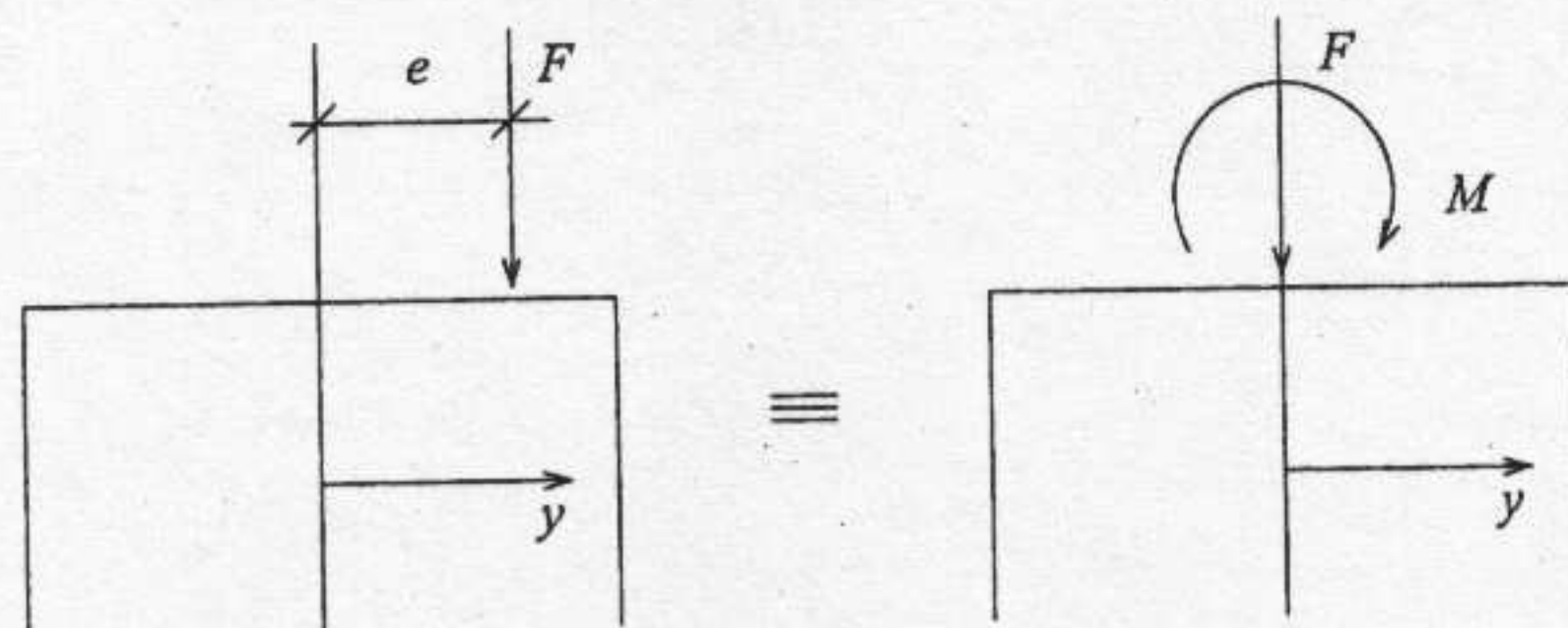
Így

$$f(\underline{x}^1) = \underline{a} \underline{x}^1,$$

$$f(\underline{x}^2) = \underline{a} \underline{x}^2.$$

A feszültségek számítása központos húzás/nyomás esetén (egyirányú központosság):

$$\sigma = f(\underline{x}^1 + \underline{x}^2) = f(\underline{x}^1) + f(\underline{x}^2) = \frac{F}{A} + \frac{M_x}{I_x} y.$$



2.52. ábra.

A semleges tengely egyenlete:

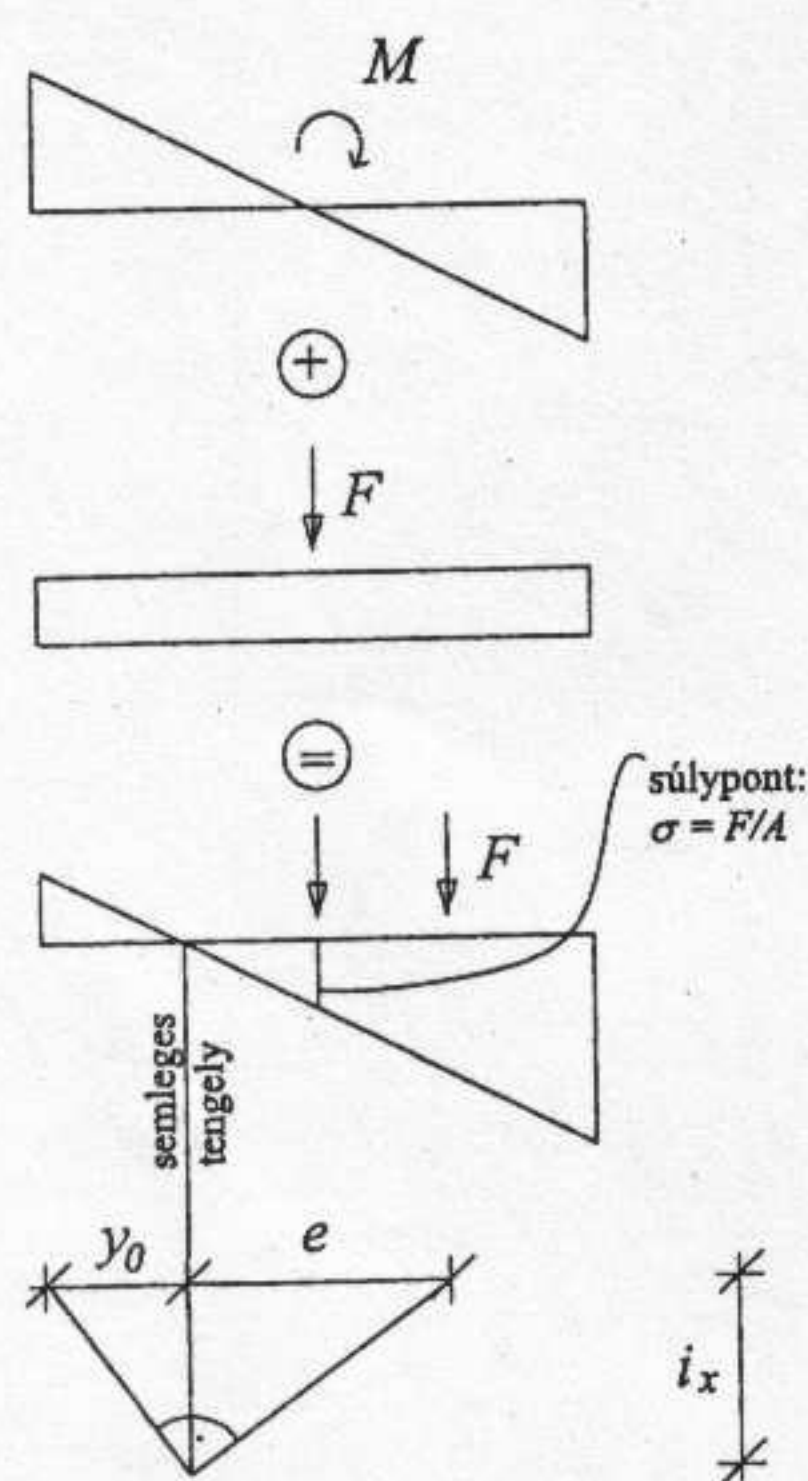
$$\sigma = F \left( \frac{1}{A} + \frac{ey}{I_x} \right) = 0$$

$$\frac{1}{A} = -\frac{ey_0}{I_x}$$

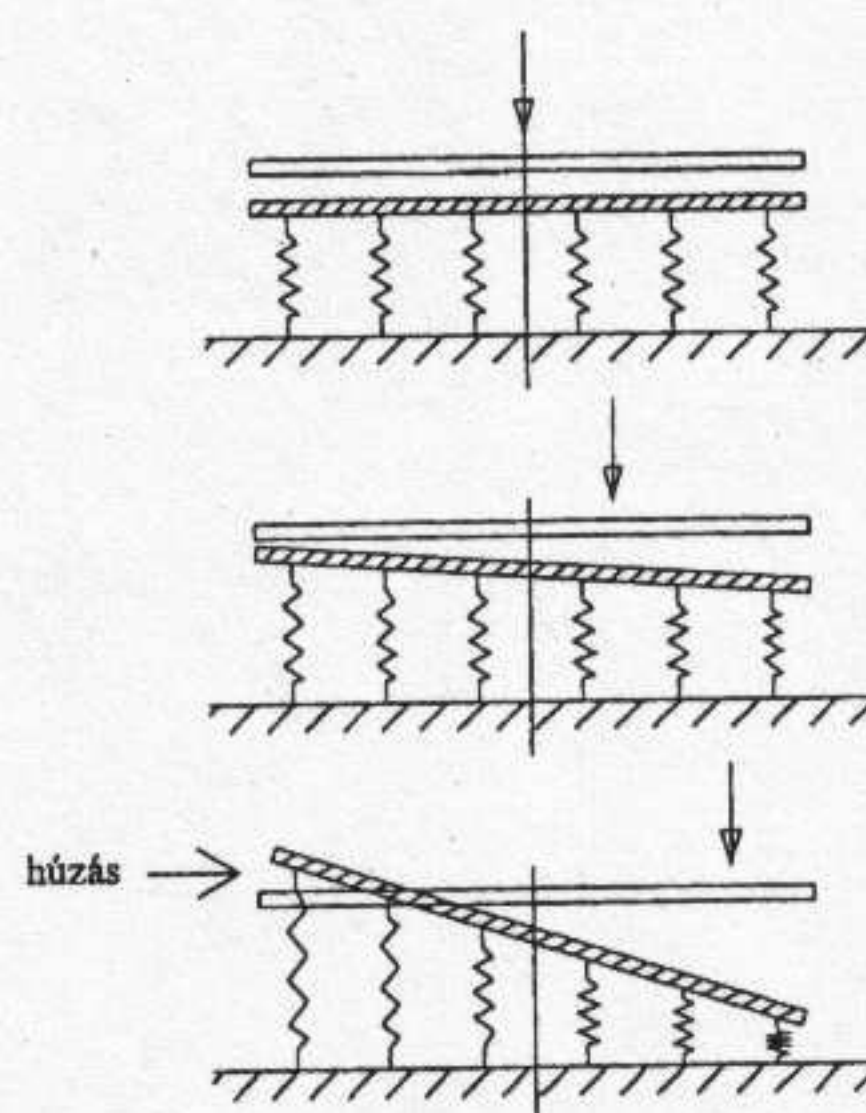
$$y_0 = -\frac{I_x}{Ae} = -\frac{i_x^2}{e},$$

ahol  $i_x$  jelöli az inerciasugarat. A 2.53. ábra szerint  $i_x = \sqrt{y_0 e}$ . Szélső esetben  $y_0 = 0 \rightarrow e = \infty \rightarrow F = 0 \rightarrow$  tiszta hajlítás. Másik lehetőség, hogy  $e = 0 \rightarrow y_0 = \infty \rightarrow$  központos húzás/nyomás.

Feszültségábra



Analógia



2.53. ábra.

Kétirányú (ferde) központoság:  $\sigma = \frac{F}{A}$   $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$   $\sigma = \frac{M_y}{I_y} x$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ \frac{y}{I_x} \\ \frac{x}{I_y} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} F \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad \underline{x}^1 = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_y \end{bmatrix}$$

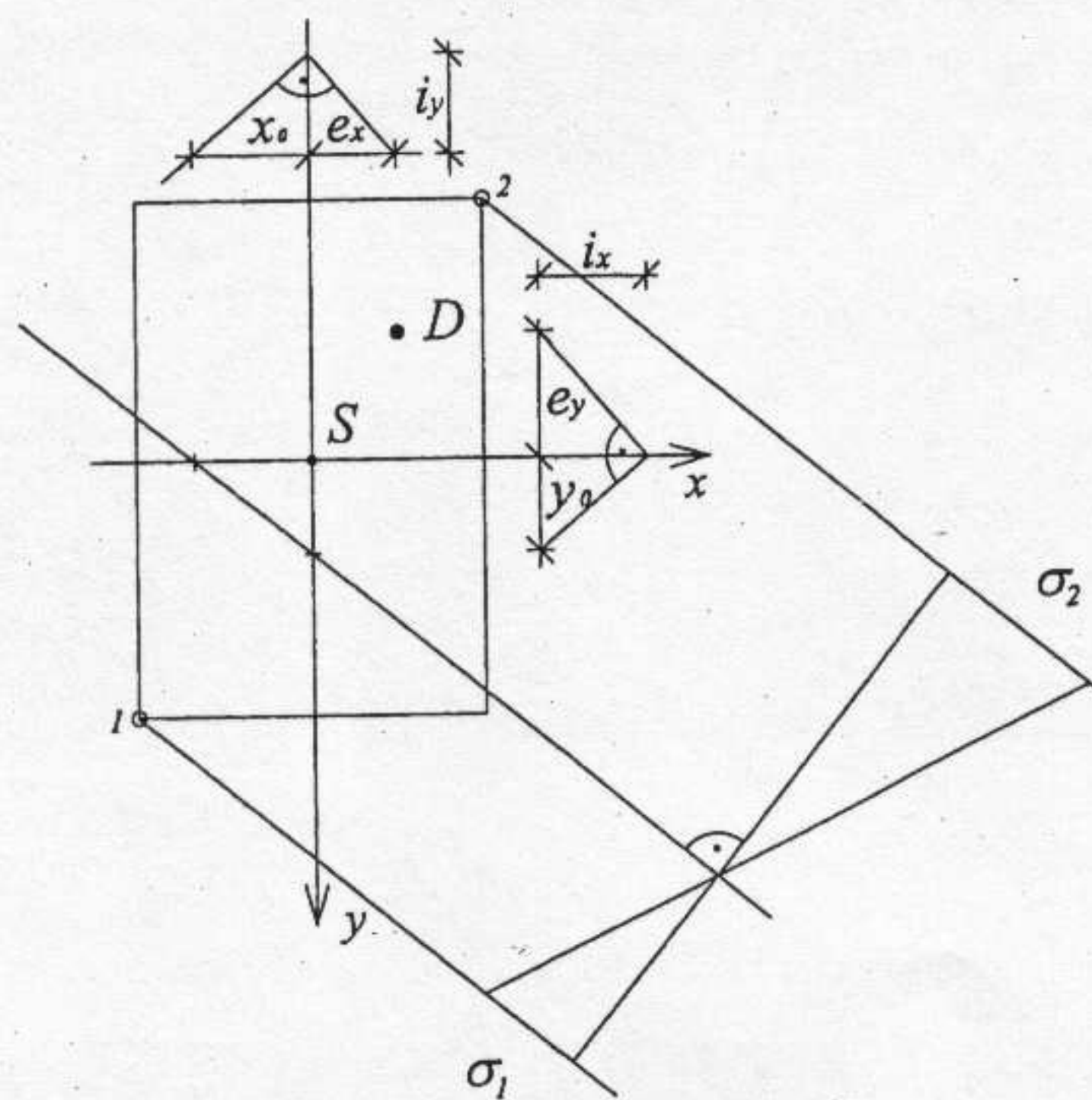
$$f(\underline{x}_1) + f(\underline{x}_2) + f(\underline{x}_3) = f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3) = \frac{F}{A} + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x =$$

$$= F \left( \frac{1}{A} + \frac{e_y y}{I_x} + \frac{e_x x}{I_y} \right)$$

A semleges tengely:

$$\frac{1}{A} + \frac{e_y y}{I_x} + \frac{e_x x}{I_y} = 0,$$

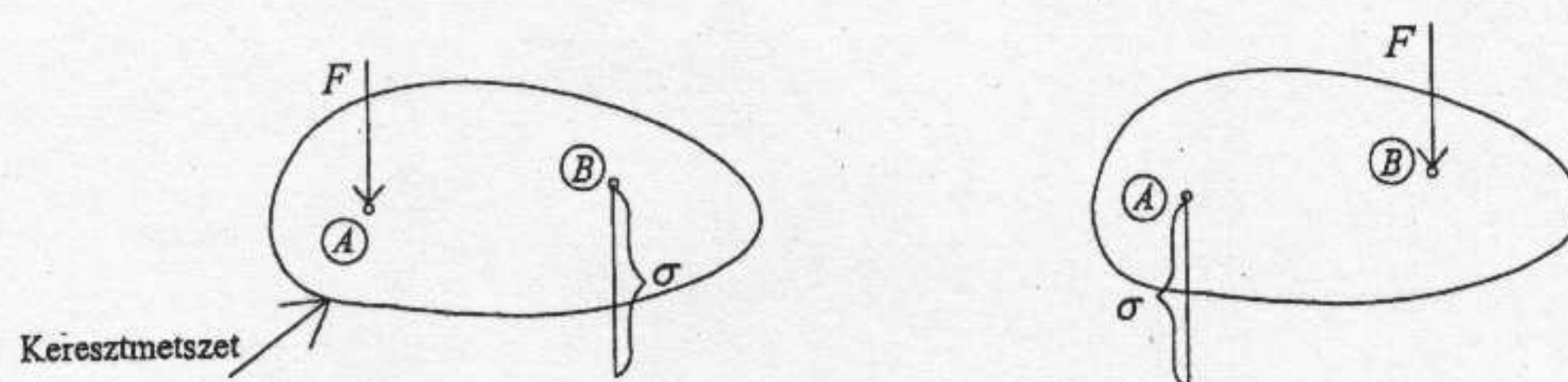
tengelymetszetek:



2.54. ábra.

$$y_0 = 0 \rightarrow x e_x = -i_y^2, \quad x_0 = 0 \rightarrow y e_y = -i_x^2.$$

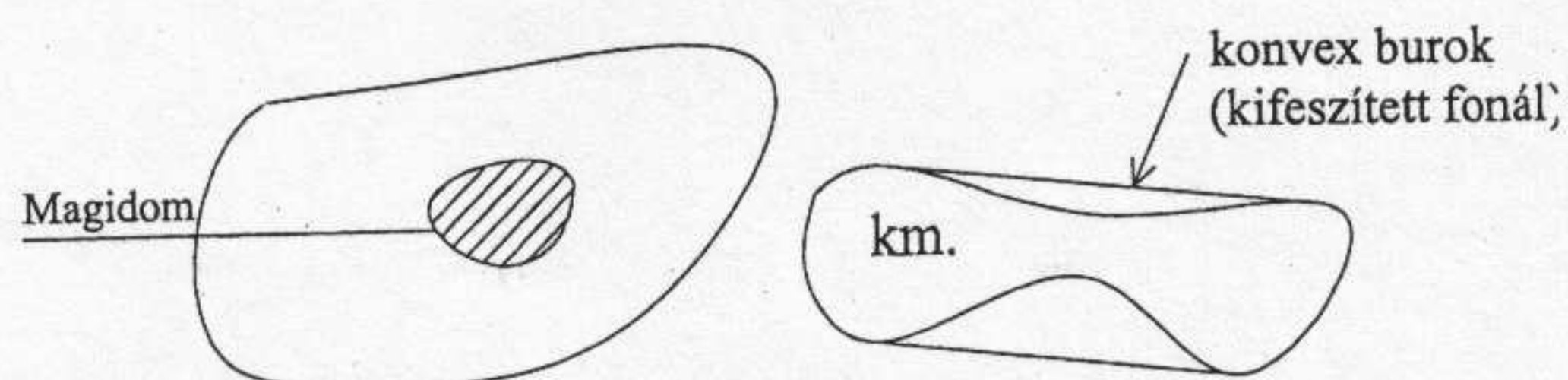
A képlet szimmetrikus,  $e_y$  és  $y$ , illetve  $e_x$  és  $x$  felcserélhetőek (2.55. ábra).



2.55. ábra.

## 2.15. A keresztmetszet pontjainak osztályozása

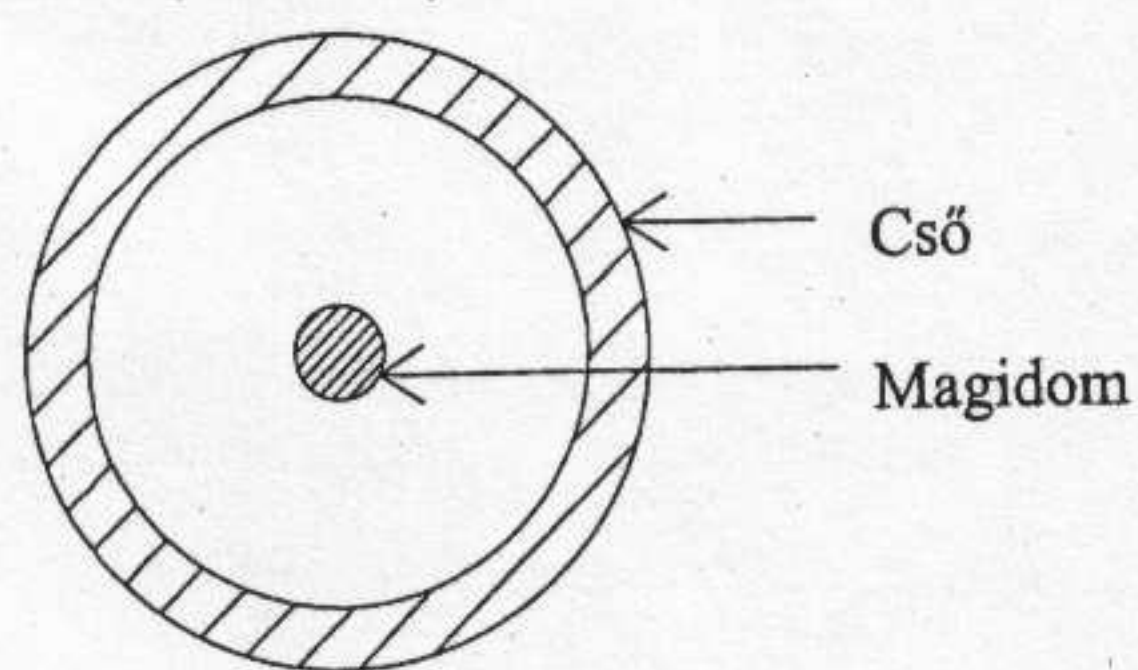
A magidom határa azon pontok mértani helye, amelyeken támadó erő esetén a semleges tengely érinti a keresztmetszet *konvex burkát*. A magidomon belül támadó erő esetén a keresztmetszeten csak egynemű feszültségek ébrednek.



2.56. ábra.

A magidom tulajdonságai:

1. *Mindig* konvex idom,
2. lehet (részben, vagy egészben) a keresztmetszeten kívül, de mindig a konvex burkon belül van (például: cső keresztmetszet, 2.57. ábra).



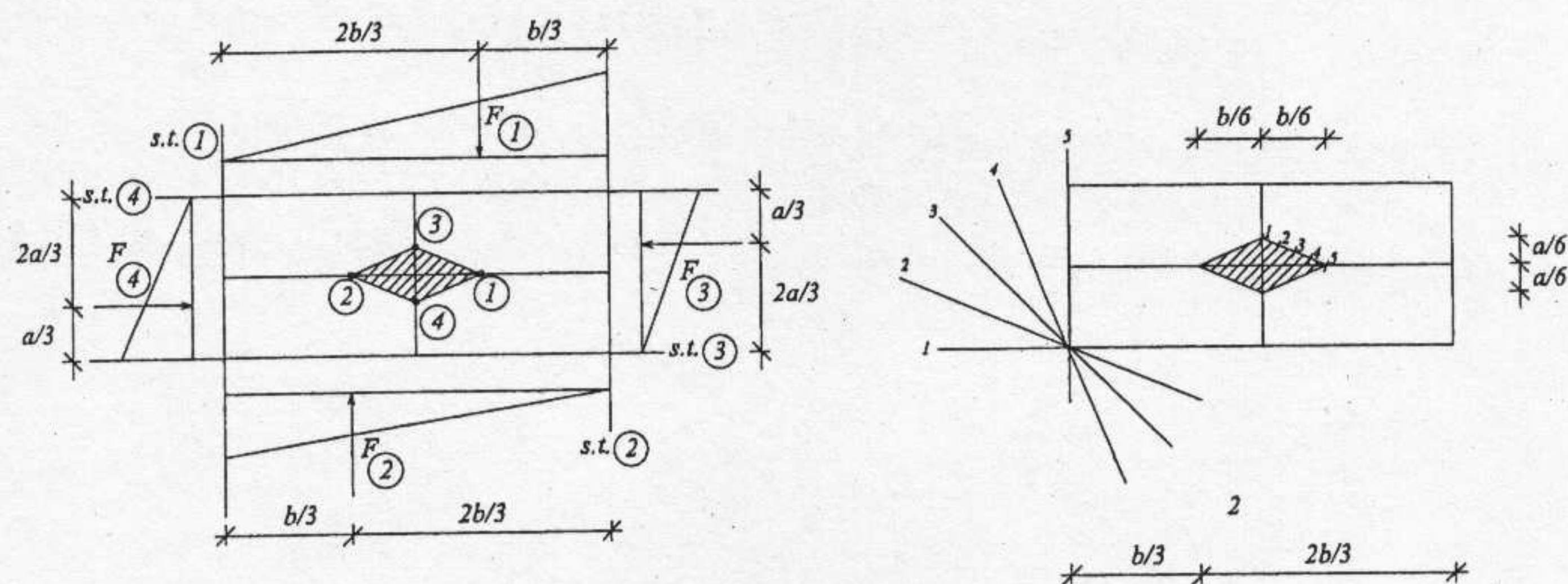
2.57. ábra.

Példa: téglalap keresztmetszet

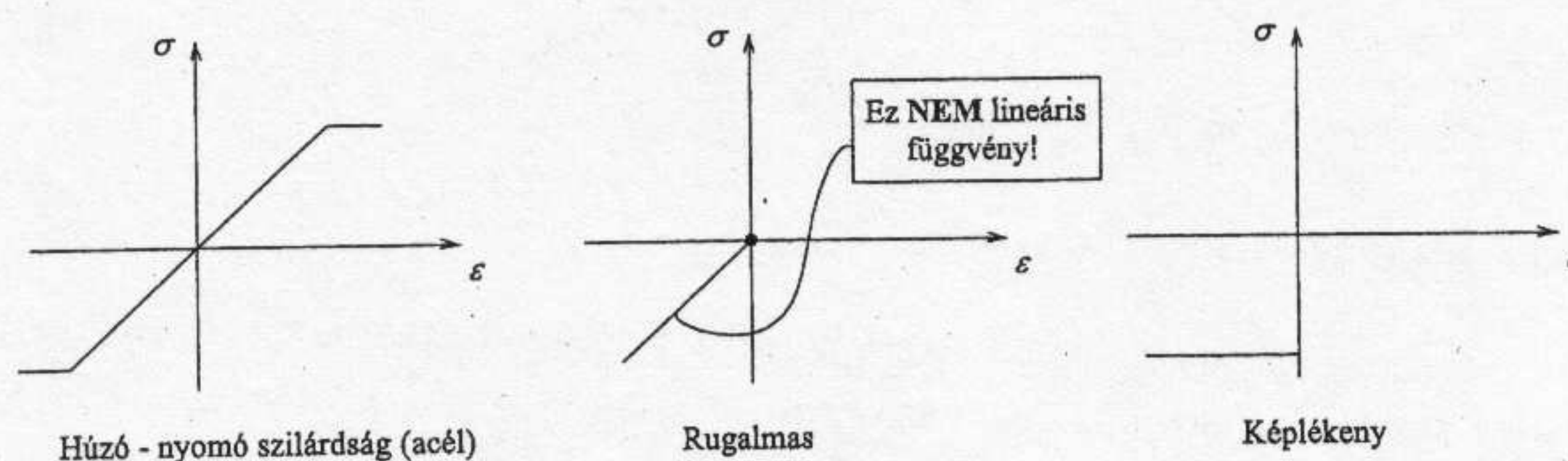
Dualitás: magidom - határ *egyenesének* a konvex burok *pontja*, a magidom-határ *pontjának* a konvex burok *egyenese* felel meg (2.58. ábra).

### 2.15.1. A magidom gyakorlati jelentősége

A magidom gyakorlati jelentősége csak nyomószilárdsággal rendelkező anyagoknál (pl.: beton, falazat) jelentkezik (2.59. ábra). Ilyen anyagnál 3 eset lehet nyomás esetén:



2.58. ábra.



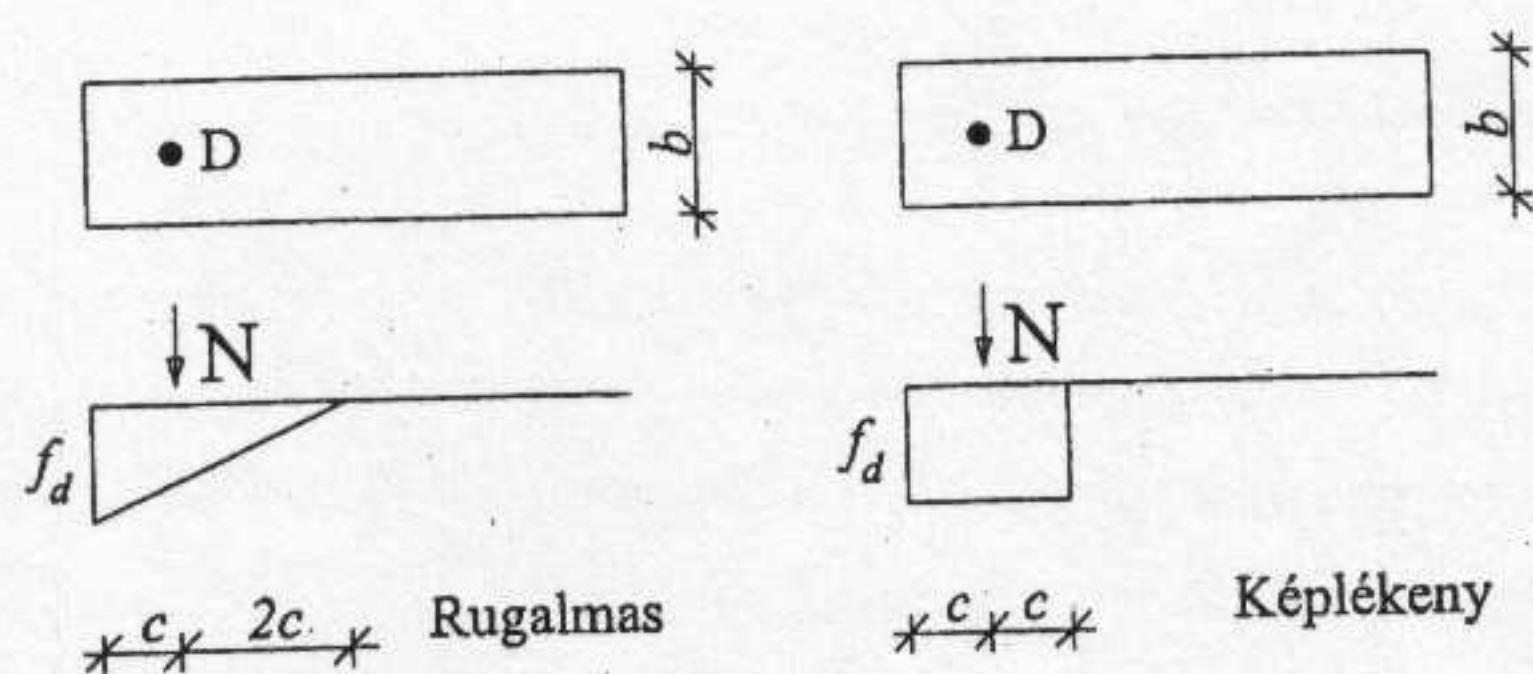
2.59. ábra.

1. Ha a döféspont a magidomon belül található, akkor a teljes keresztmetszet dolgozik, a feszültségek ugyanúgy számíthatók, mint húzó-nyomó szilárdsággal egyaránt rendelkező anyagok esetén, azaz rugalmas esetben:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x + \frac{F}{A}.$$

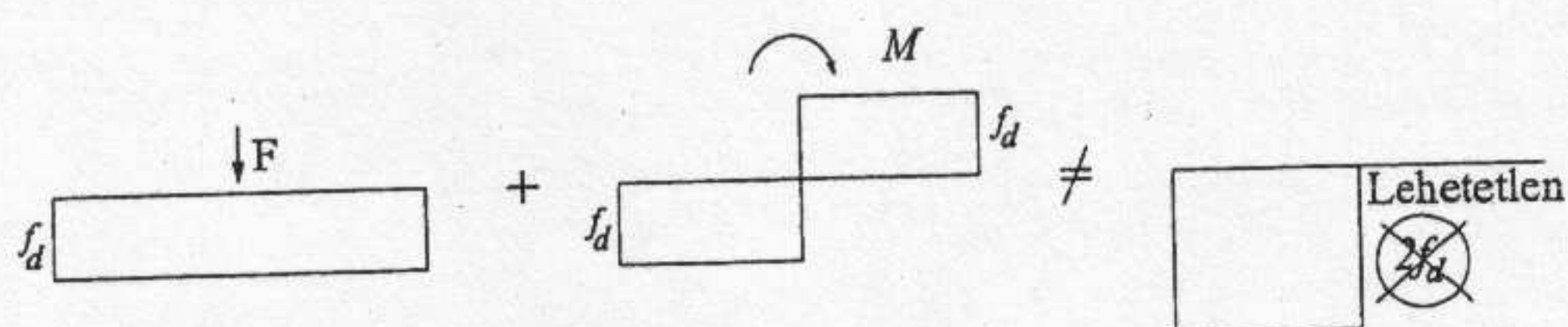
2. Ha döféspont a keresztmetszeten kívül található, akkor *nincs egyensúly*.
3. Ha a döféspont a magidomon kívül, de a keresztmetszeten belül van, akkor egy *nemlineáris feladot* kell megoldani (anyagegyenlet nemlineáris), ekkor *nincs* szuperpozíció. Keressük a dolgozó keresztmetszet részt azon feltételek mellett, hogy  $\sum F = 0$  és  $\sum M = 0$ .

Eddig feltételeztük, hogy *ismerjük az igénybevételeket* és az ezekből külön-külön számított feszültségekre alkalmaztuk a lineáris szuperpozíció elvét. Az



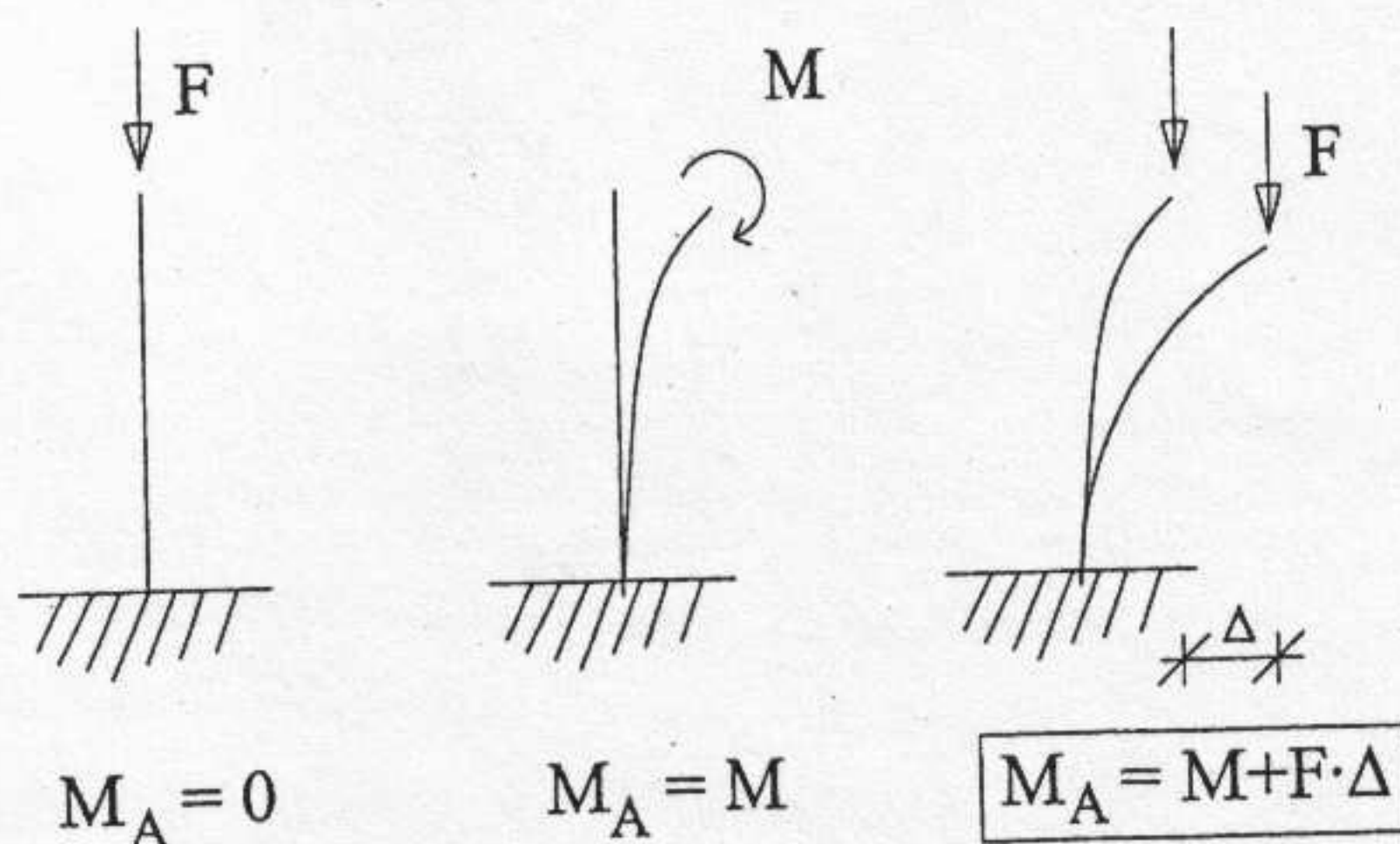
2.60. ábra.

utóbbi azért tehattük (azaz ezért voltak lineárisak az összefüggések), mert az *axiómákból* ( $\sigma = E\varepsilon$ ,  $\varepsilon = ax + by + c$ ) ez következett. Képlékeny esetben ez már *nem teljesül* (2.61. ábra)!



2.61. ábra.

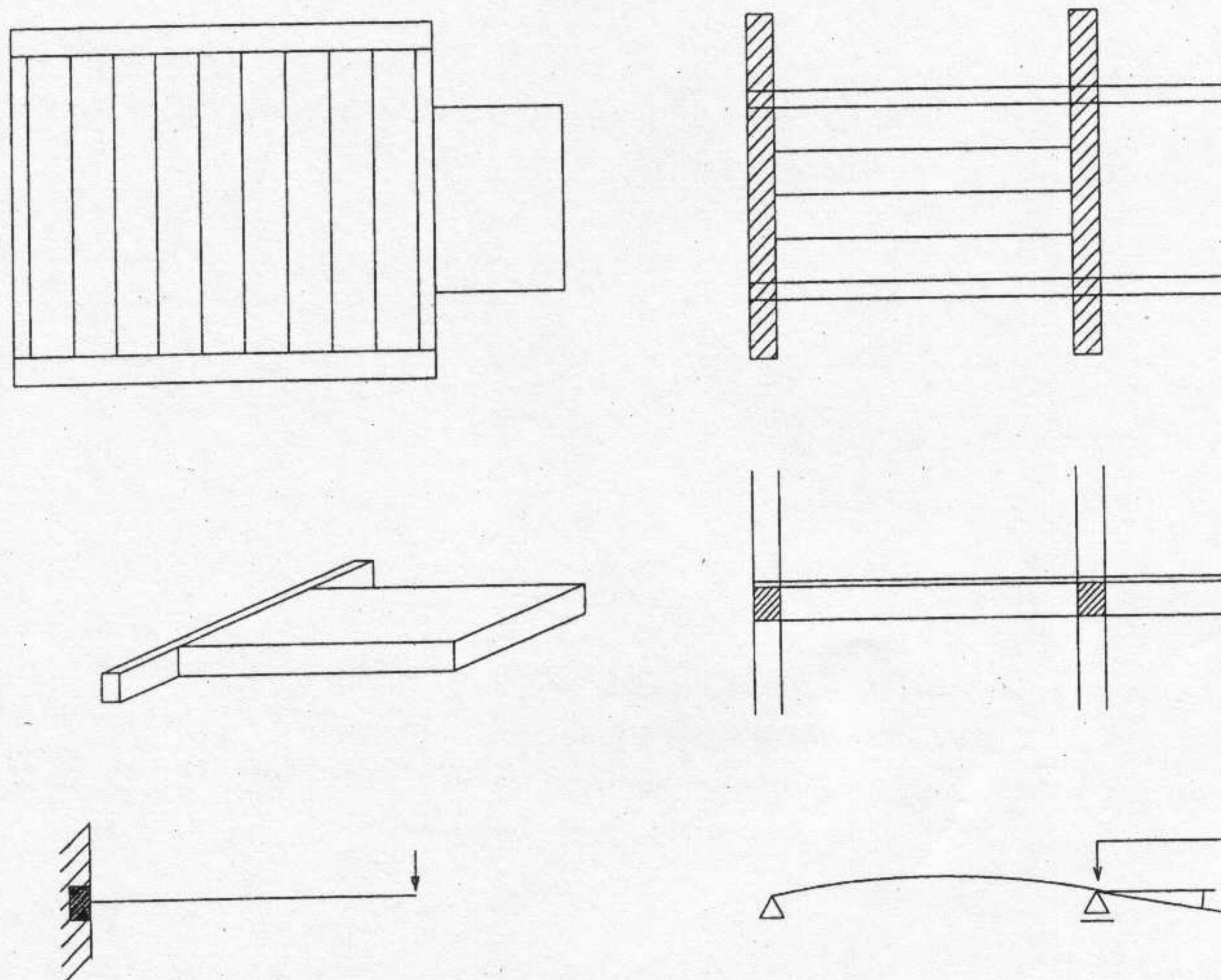
Akkor *sem teljesül*, ha rugalmas ugyan az anyag, de *nincs húzószilárdsága*, hiszen a *fél egyenes nem lineáris* függvény. Ugyanezért *nem teljesül* a lineáris szuperpozíció elve magukra az *igénybevételekre* sem (2.62. ábra), ez utóbbival részletesen a Szilárdságtan 2 tantárgy foglalkozik.



2.62. ábra.

## 2.16. Csavarás

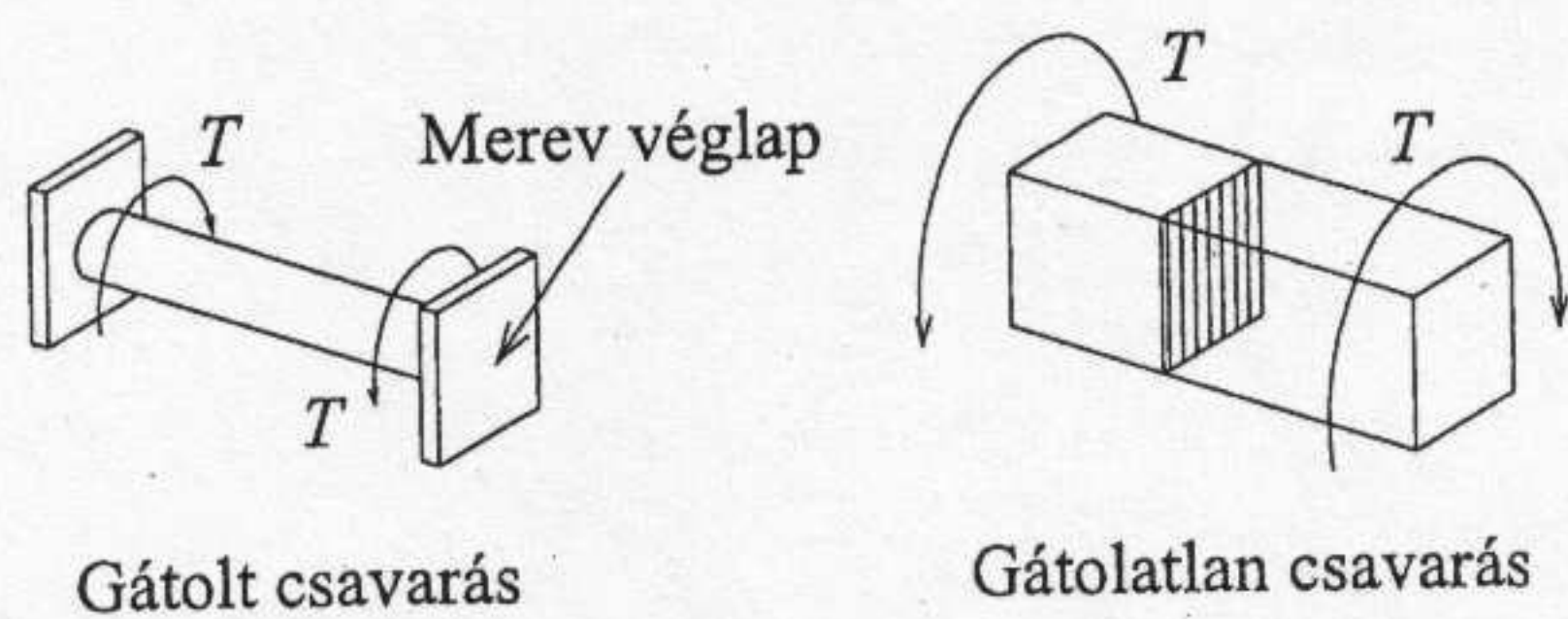
A csavarás számítása szükséges lehet egyes szerkezetek egyensúlyának biztosítására, például a 2.63. ábrán látható konzol befogási nyomatékát a gerenda csavarási merevsége biztosítja. Általában az ilyen szerkezetek tervezése kerülendő! Más szerkezeteknél a szerkezeti elem csavarási merevsége a szerkezet alakváltozását befolyásolja, a 2.63. ábra konzoltartójának lehajlása függ a gerenda csavarási merevségétől, ebben az esetben a gerenda elcsavarodásától az épület nem szakad le!



2.63. ábra.

*Gátolt csavarásról* beszélünk, ha külső kényszerek (pl.: megtámasztás) biztosítják a keresztmetszetek sík voltát, *gátolatlan csavarás* esetén a keresztmetszet szabadon kitérhet a síkjából. Gátolt csavarás esetén normál ( $\sigma$ ) és nyíró ( $\tau$ ) feszültségek egyaránt ébrednek, gátolatlan csavarás esetén csak nyírófeszültségek ébrednek.

A csavarás esetében a Bernoulli-Navier hipotézis csak kör, vagy körgyűrű keresztmetszetek esetén ad jó közelítést.



2.64. ábra.

Egyenletek rugalmas esetben:

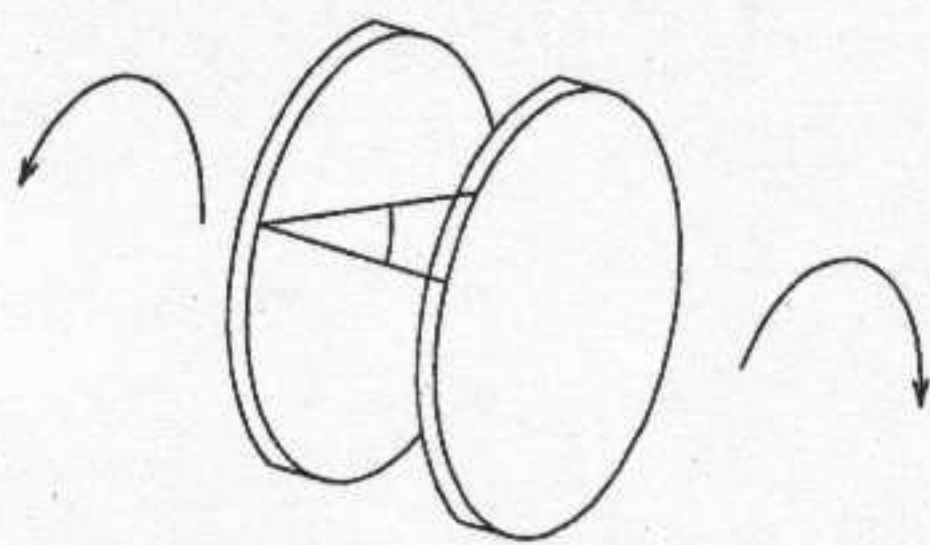
1. Egyensúlyi:

$$(a) \int_A \tau r dA = 0$$

$$(b) \int_A \tau r dA = T$$

2. Geometriai:  $\gamma = ar$ .

3. Anyagegyenlet:  $\tau = G\gamma$ .



2.65. ábra.

Megoldás:

$$T = \int_A \tau r dA = \int_A G\gamma r dA = \int_A G\gamma r^2 dA = Ga \int_A r^2 dA = GaI_p$$

$$a = \frac{T}{GI_p}$$

$$\gamma = \frac{Tr}{GI_p}$$

$$\tau = \frac{T}{I_p} r$$

$$T_{el} = \frac{f_{v,d} I_p}{R} = \frac{R^3 \pi}{2} f_{v,d}$$

Az iménti levezetésben szereplő  $I_p$  az ún. poláris inercianyomaték, melyet a következő összefüggéssel is számíthatunk:

$$I_x + I_y = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A r^2 dA = I_p$$

Egyenletek képlékeny esetben:

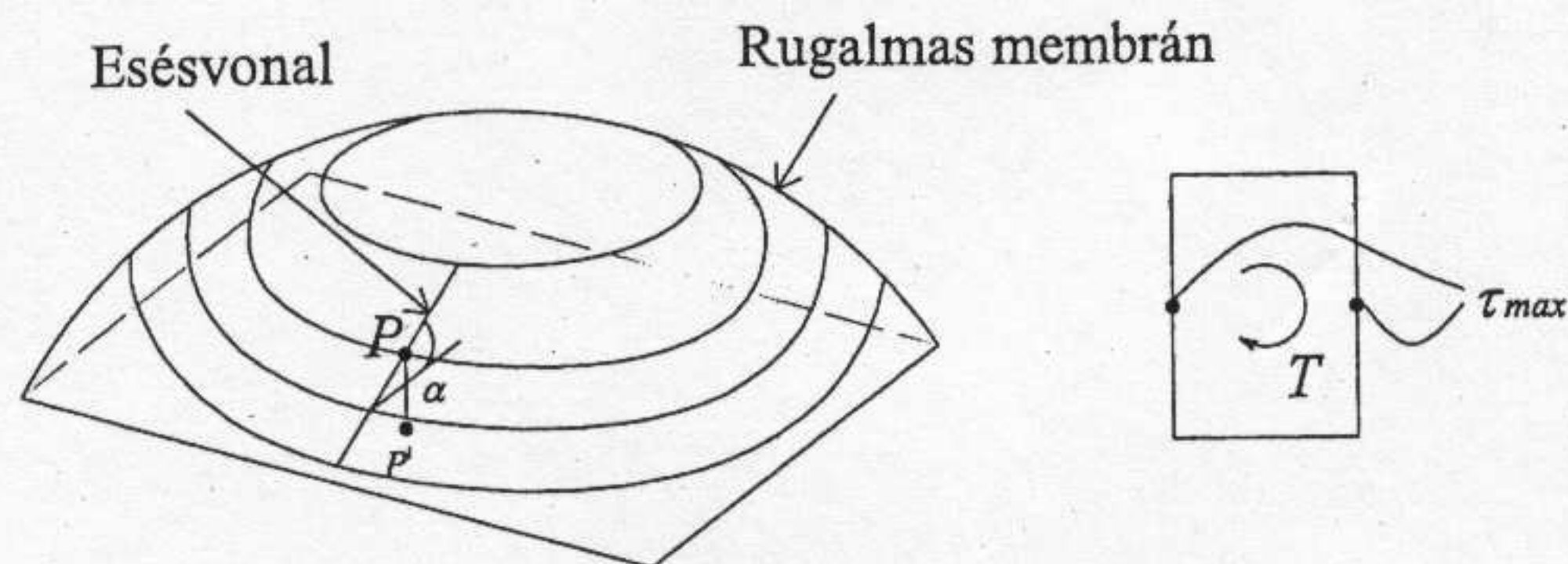
1. Egyensúlyi:  $\int_A \tau r dA = T$
2. Geometriai:  $\gamma = ar$ .
3. Anyagegyenlet:  $\tau = f_{v,d}$ .

Megoldás:

$$T = \int_A \tau r dA = f_{v,d} \int_A r dA = f_{v,d} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} r ds \right) dr = \frac{2R^3\pi}{3} f_{v,d}.$$

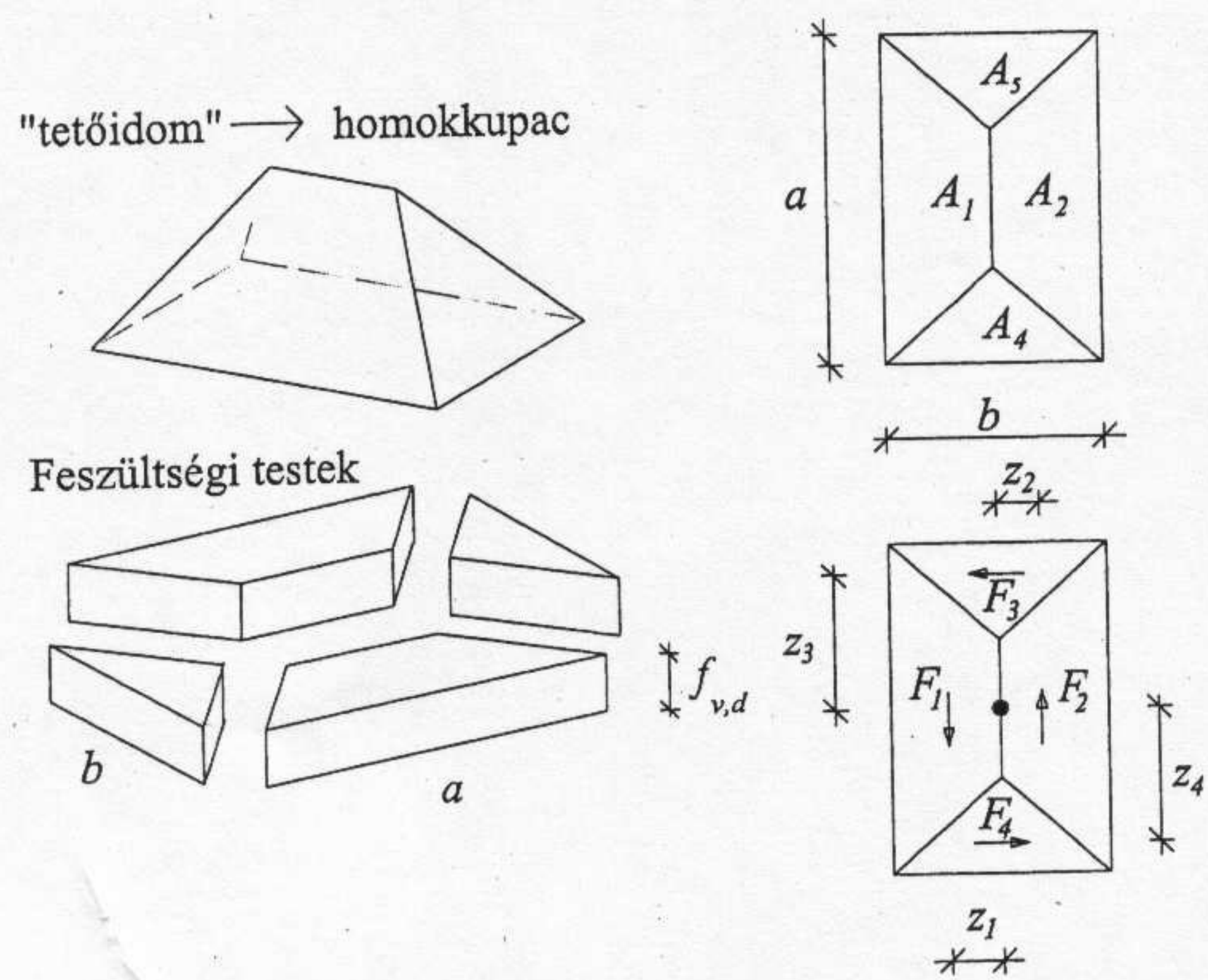
A csavarás szemléltetésére szolgál a *hártya-* és a *homokkupac analógia*.

**Hártya analógia:** a  $P$  pont beli esésvonal meredeksége ( $\tan \alpha$ ) arányos a  $P'$  pontban csavarás hatására ébredő, rugalmas alapon számított feszültséggel (2.66. ábra).



2.66. ábra.

**Homokkupac analógia:** képlékeny esetben ( $\tau = f_{v,d}$ ) a felület meredeksége konstans. A 2.67. ábra alapján  $T_{pl} = \sum T_i z_i = \sum A_i f_{v,d} z_i$ .



2.67. ábra.