CROSS-MÓDSZER

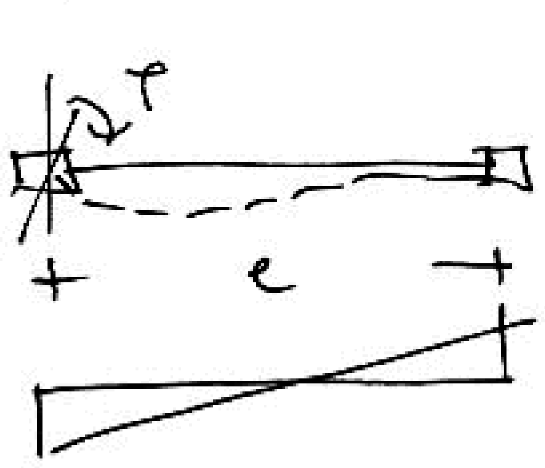
- elmozdulás módszer megoldására
- iterációs megoldás, relaxációval
- nyomatékosztás
- fix és kilengő keretek

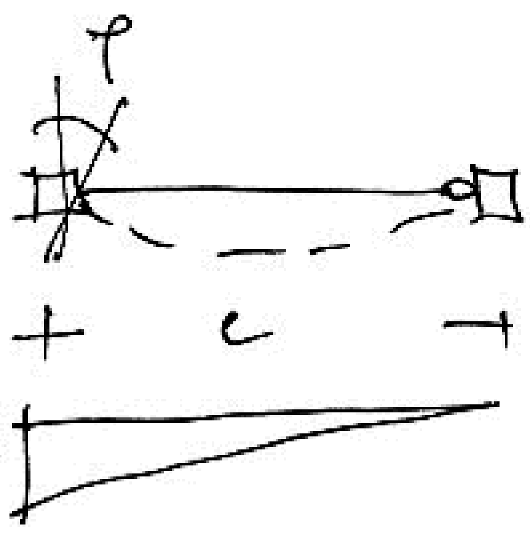
Fix keretek

Keretállandók:

- rúdvégek merevsége

elfordulásból

$k = \frac{4EJ}{l}$  $\frac{2EJ}{l}$

$k = \frac{3EJ}{l}$ 

- átviteli tényező

$M \xrightarrow{\alpha = 0,5} \frac{M}{2}$ $\qquad$ $M \xrightarrow{\alpha = \phi} \phi$

- csomópont összmerevsége:

$$\sum k_i$$

- nyomatékosztó:

$$n_i = \frac{k_i}{\sum k_i}$$

egy csomópontra $\sum n_i = 1$! Ellenőrizendő!

Lépések

1. rúdvégi merevségek
2. csomópontok összmerevsége
3. nyomatékosztók (ellenőrzés = 1,0), átviteli tényezők
4. kezdeti kiegyensúlyozatlan befogási nyomatékok
5. kiegyensúlyozás Cross-olással
6. Igénybevételi ábrák, stb.

aut. IV. 4.

N. II. évfolyam T. 7. gyakorlat

Elmozdulás módszer (nyomatékosztás)

Elmozdulás módszer: 1, egyenlettel 2.) Cross módszer

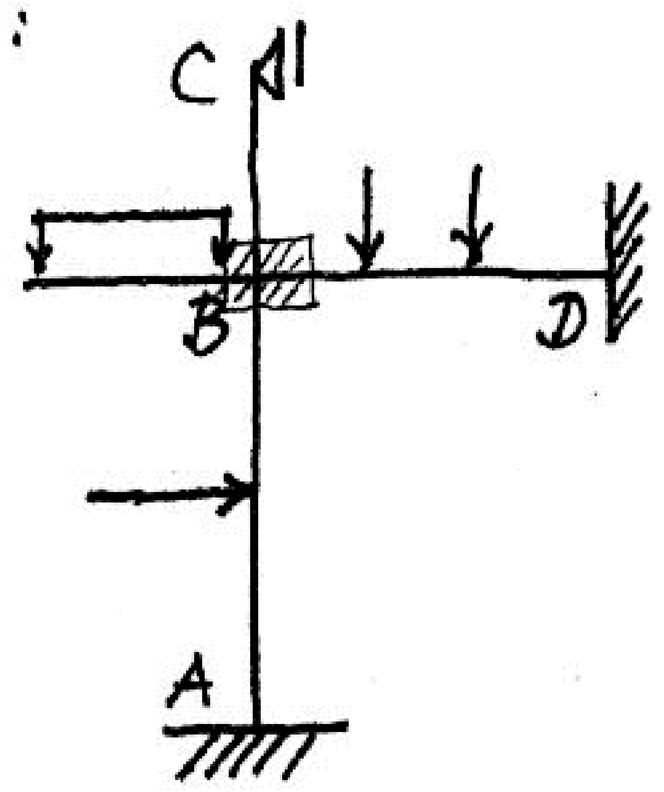
Cross módszer rúdcsillagokon (és többtámaszú tartón!)

- az eljárás bemutatása
- példák

Rúdcsillag – 1 belső csomópontos keret

Ismeretlen mozgás: a csomópont ϑ szögelfordulása

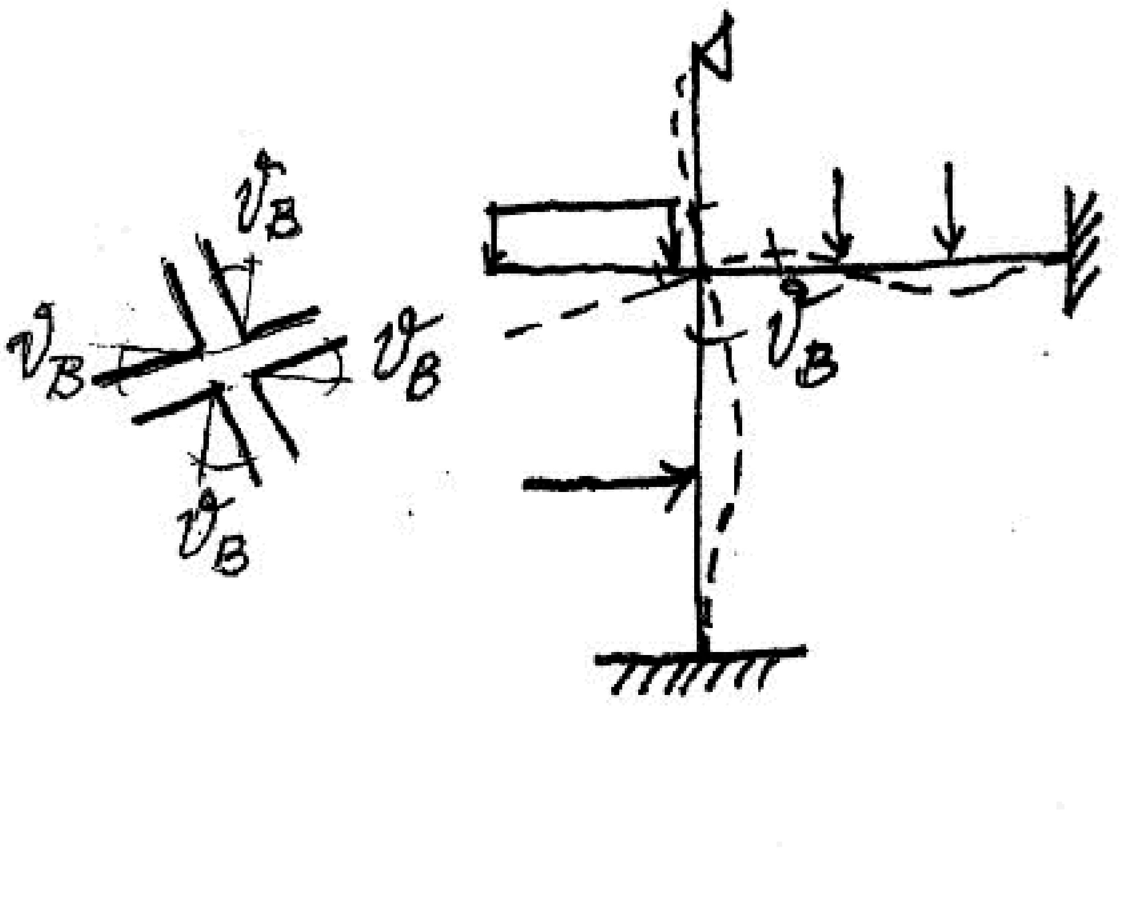
Pl:



Az eljárás menete:

1.) A belső csomópontot merevvé (elfordulásmentessé) tesszük $\vartheta_B = 0$

- meghatározzuk az egyes rudak kezdeti befogási nyomatékait (M^0_{Bi}) (erőmódszerrel – táblázatból – előjel!)
- kiszámítjuk a cs. ponton lévő kiegyensúlyozatlan nyomatékot ($\Delta M_B = \Sigma M^0_{Bi}$)



2.) Feloldjuk a belső befogást – ΔM elfordítja a cs. pontot $\vartheta_B = c \cdot \Delta M$, a rúdvégeken ($c = \frac{1}{\Sigma k_i}$) kiegyensúlyozó nyomatékok keletkeznek. Ezek merevségükkel arányosak: $M_i = -\alpha \cdot \Delta M$, ($M_i = k_i \cdot \vartheta_B$) ahol $\alpha_i = \frac{k_i}{\Sigma k_i}$, ($k = c \cdot \frac{EI}{\ell}$) ($c = 3$ v. 4)

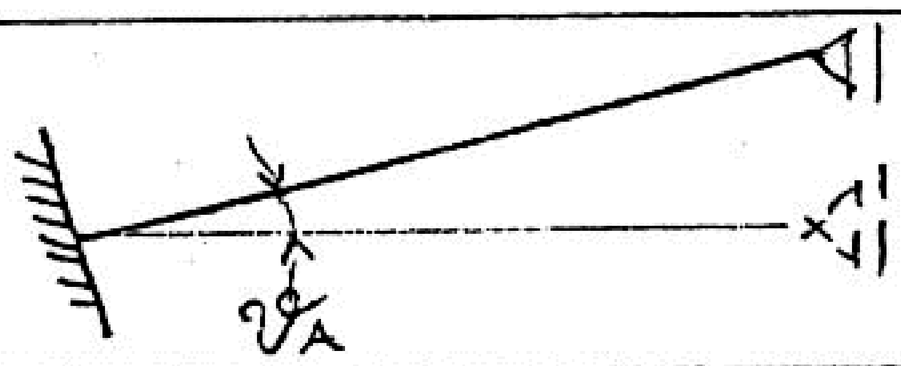
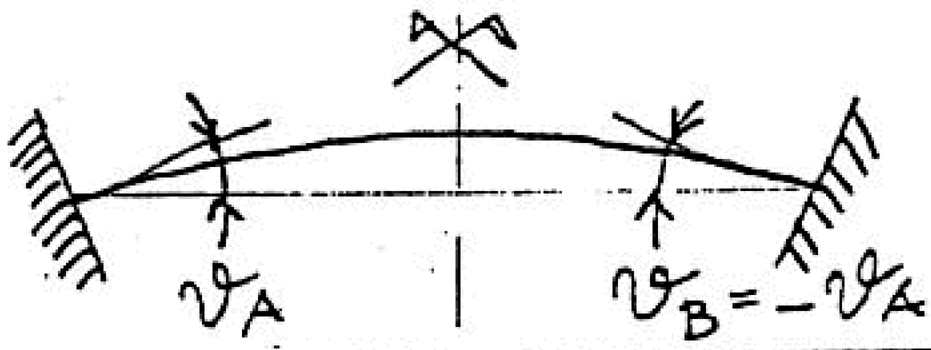
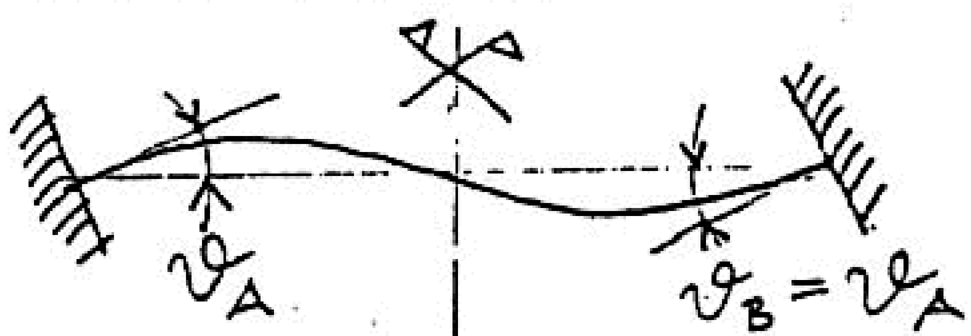
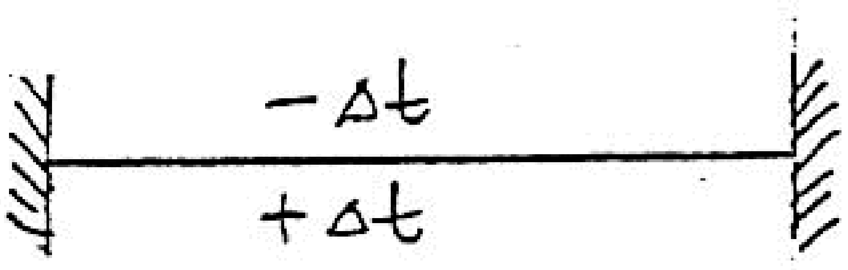
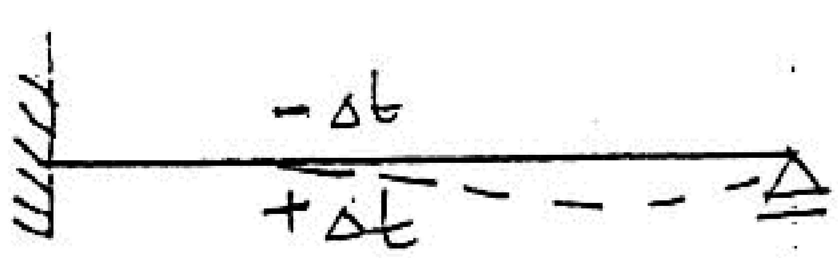
- végleges nyomatékok:
  belső cs. ponton: $M_{Bi} = M^0_{Bi} + M_i$
  külső befogásban: átvitellel ($\bar{a} = 0{,}5$)

Számítási sorrend:

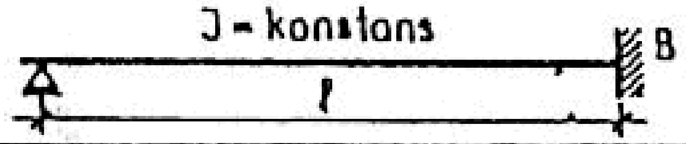
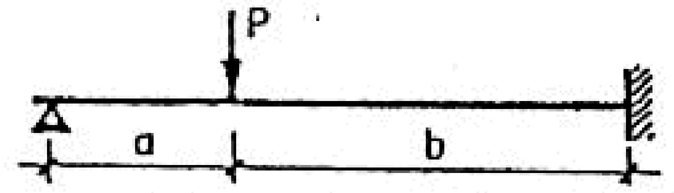
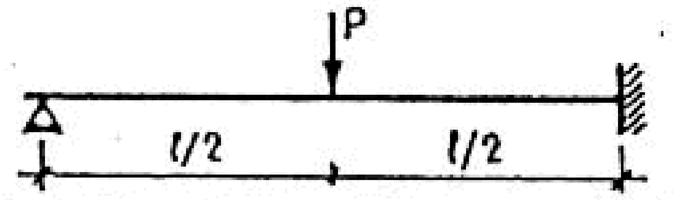
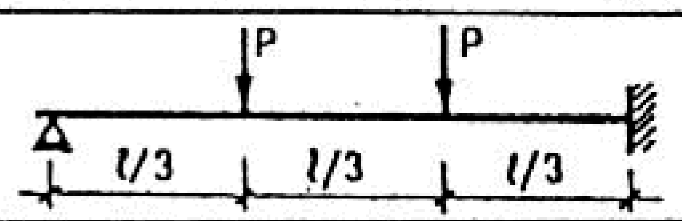
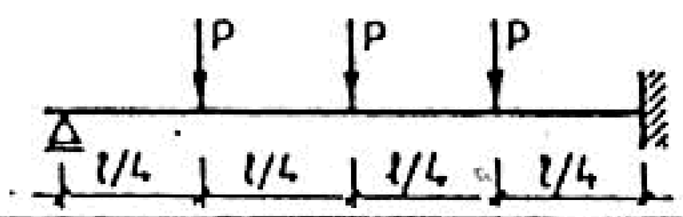
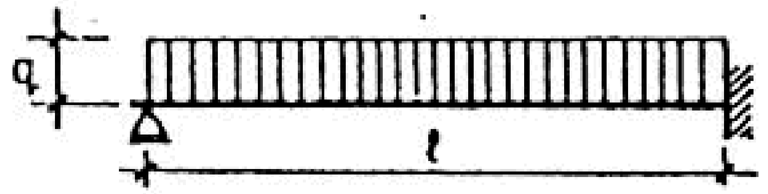
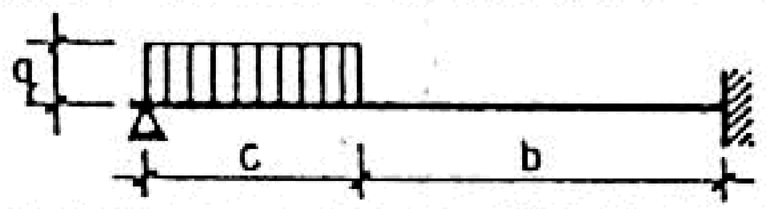
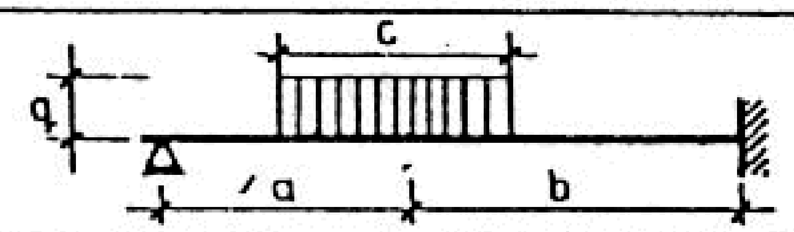
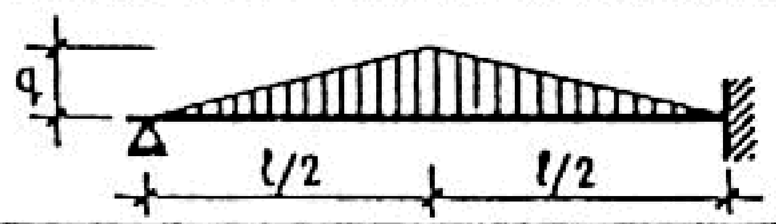
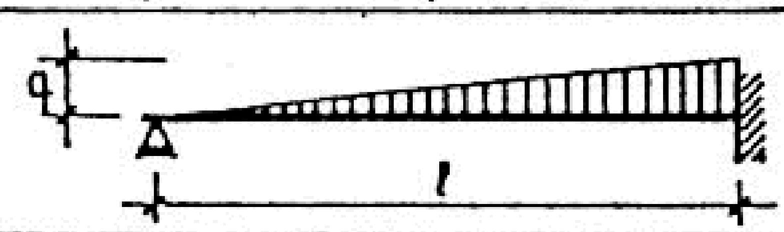
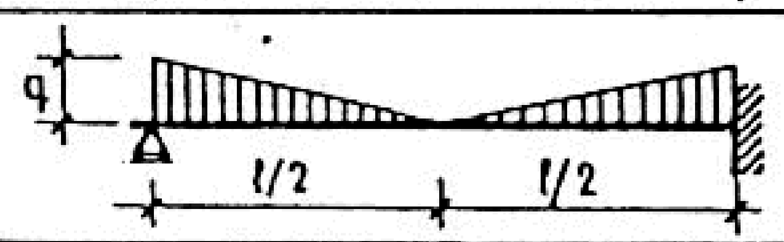
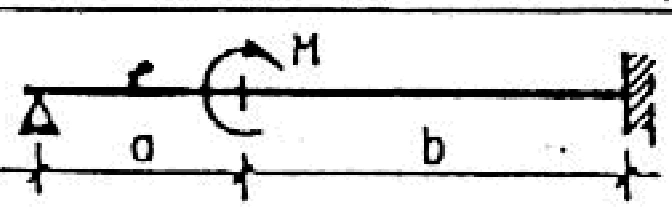
1. merevségek, 2. nyomatékosztók, 3. kezdeti befogási nyomatékok, 4. nyomatékosztás, 5. egyensúlyozás 6. N, T, M ábra

KÉT, ill. EGYOLDALT BEFOGOTT TARTÓK BEFOGÁSI NYOMATÉKA ALAKVÁLTOZÁSI KÉNYSZEREKRE (HATÁSOKRA)

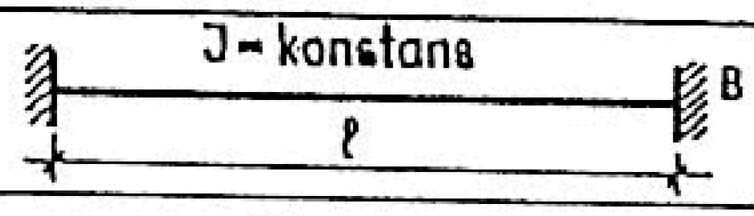
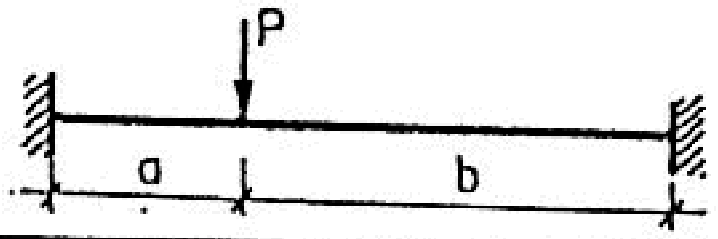
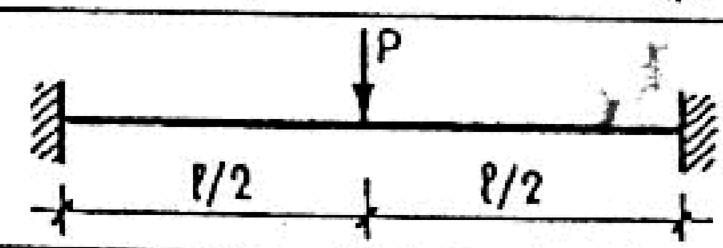
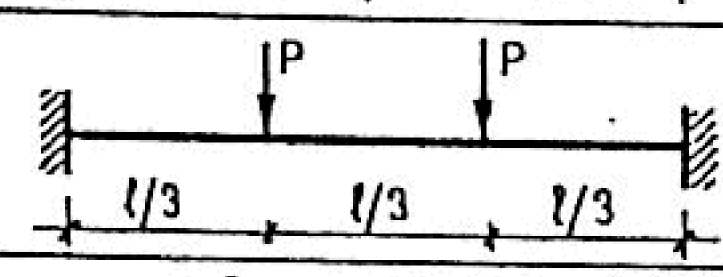
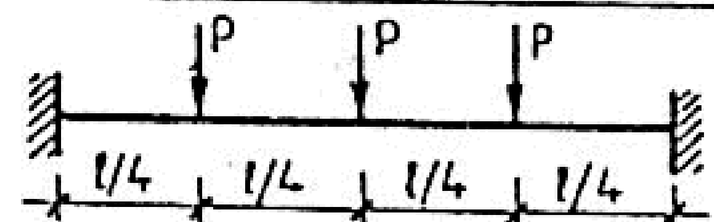
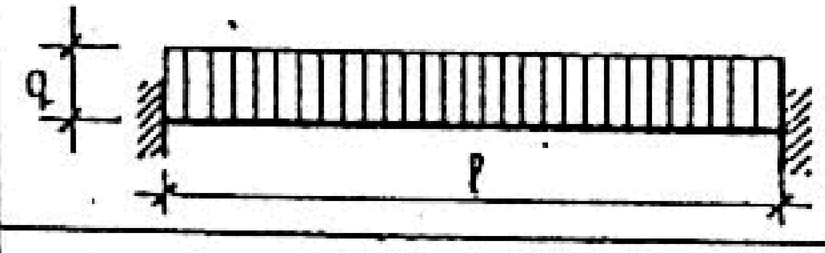
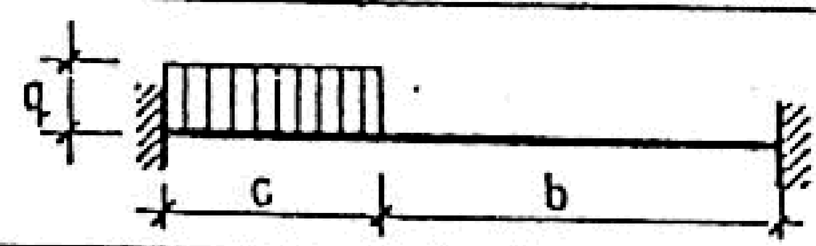
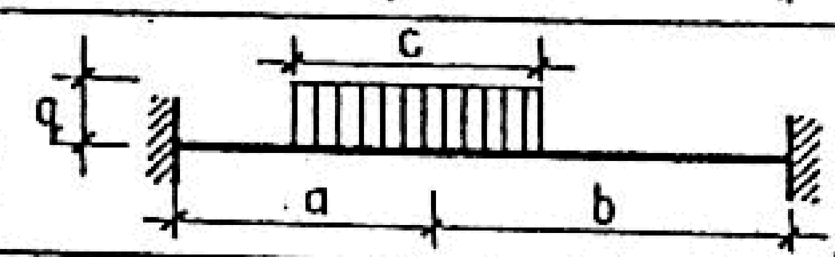
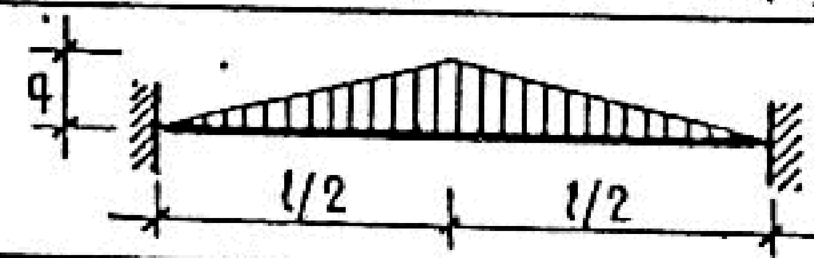
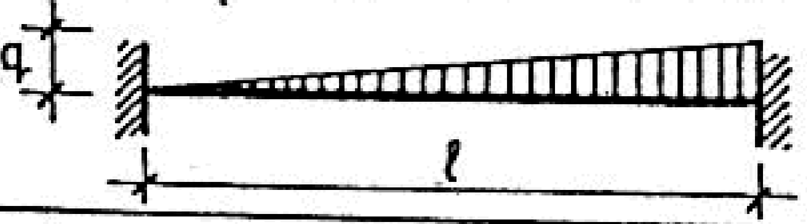
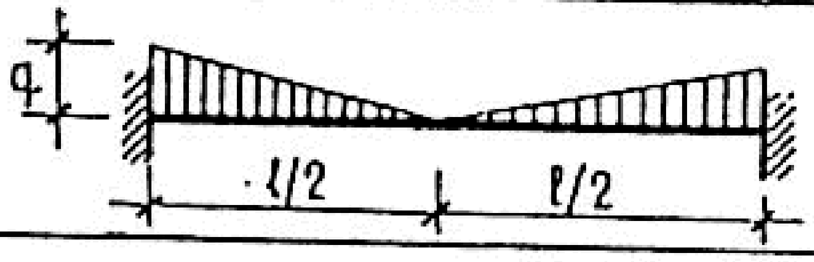
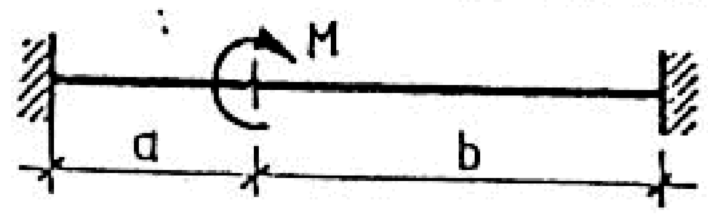
RÚDÁLLANDÓK

TÁMASZELFORDULÁS	$k = M_A/\vartheta_A$	EI = állandó l	M_B/ϑ_A
	$4\frac{EI}{l}$		$\frac{M_A}{2} = \left(\frac{2EI}{l}\right)$
	$3\frac{EI}{l}$		ϕ
	ϕ		ϕ
	$\frac{2EI}{l}$		$-\frac{2EI}{l}$
	$\frac{6EI}{l}$		$+\frac{6EI}{l}$
TÁMASZELMOZDULÁS	$\mu = M_A/f$	EI = állandó l	M_B/f
	$\frac{6EI}{l^2}$		$+\frac{6EI}{l^2}$
	$\frac{3EI}{l^2}$		ϕ
HŐMÉRSÉKLET KÜL.	$M_A/\Delta t$	h EI = állandó $\alpha\left[\frac{1}{C^\circ}\right]$	$M_B/\Delta t$
	$\frac{2EI\cdot\alpha}{h}$		$-\frac{2EI\cdot\alpha}{h}$
	$\frac{3EI\cdot\alpha}{h}$		ϕ

5.3 Egyoldalt befogott tartók befogási nyomatéka

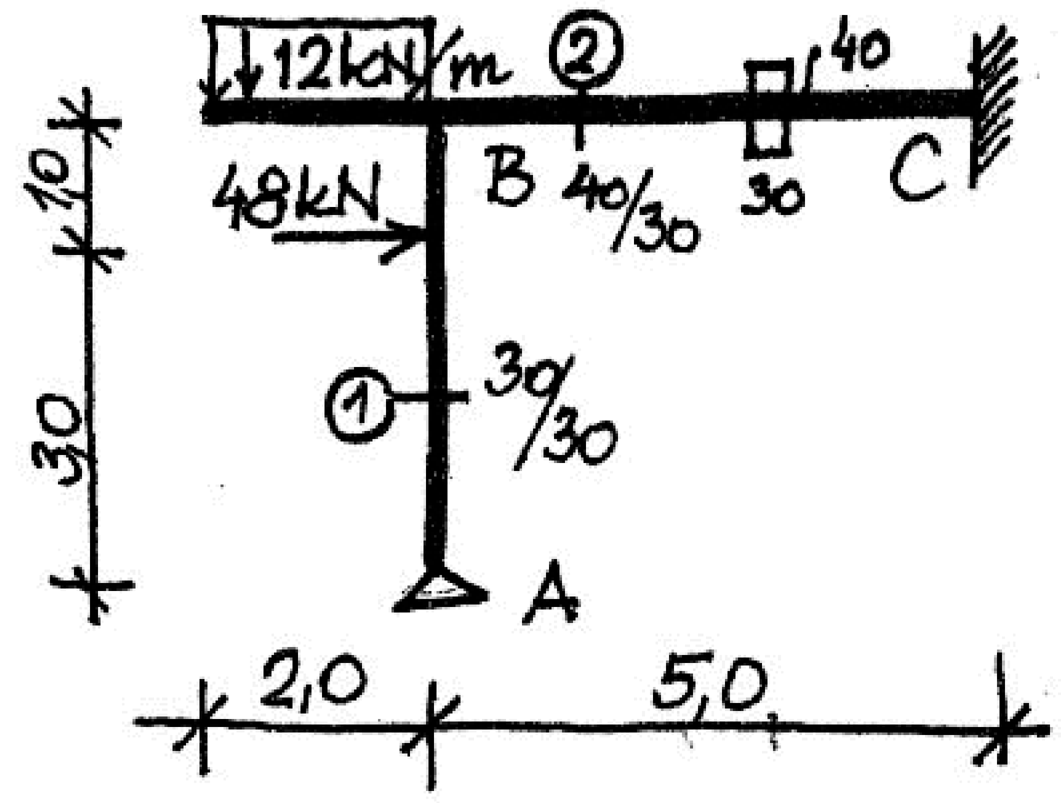
M_A	J = konstans 	M_B
0		$-\frac{Pab}{2\ell^2}(\ell+a)$
0		$-\frac{3}{16}P\ell$
0		$-\frac{1}{3}P\ell$
0		$-\frac{15}{32}P\ell$
0		$-\frac{1}{8}q\ell^2$
0		$-\frac{1}{8}\frac{qc^2}{\ell^2}(2\ell^2-c^2)$
0		$-\frac{1}{8}\frac{qac}{\ell^2}\left[4b(\ell+a)-c^2\right]$
0		$-\frac{5}{64}q\ell^2$
0		$-\frac{1}{15}q\ell^2$
0		$-\frac{3}{64}q\ell^2$
0		$-\frac{M}{2\ell^2}(\ell^2-3a^2)$

5.4 Kétoldalt befogott tartók befogási nyomatékai

M_A	J = konstans 	M_B
$+\frac{Pab^2}{\ell^2}$		$-\frac{Pa^2b}{\ell^2}$
$+\frac{P\ell}{8}$		$-\frac{P\ell}{8}$
$+\frac{2}{9}P\ell$		$-\frac{2}{9}P\ell$
$+\frac{5}{16}P\ell$		$-\frac{5}{16}P\ell$
$+\frac{1}{12}q\ell^2$		$-\frac{1}{12}q\ell^2$
$+\frac{qc^2}{12\ell^2}(6\ell^2-8\ell c+3c^2)$		$-\frac{qc^3}{12\ell^2}(4\ell-3c)$
$+\frac{qc}{12\ell^2}(12b^2a-3c^2b+c^2\ell)$		$-\frac{qc}{12\ell^2}(12ba^2-3c^2a+c^2\ell)$
$+\frac{5}{96}q\ell^2$		$-\frac{5}{96}q\ell^2$
$+\frac{1}{30}q\ell^2$		$-\frac{1}{20}q\ell^2$
$+\frac{1}{32}q\ell^2$		$-\frac{1}{32}q\ell^2$
$-\frac{M}{\ell}\left(2b-\frac{3b^2}{\ell}\right)$		$-\frac{M}{\ell}\left(2a-\frac{3a^2}{\ell}\right)$

N. II. évfolyam   T.7. gyakorlat   Példák

1.pl.: Rajzolja meg a rúdcsillag belsőerő ábráit!



E – állandó $(1000\,kN/cm^2)$

$$I_1 = \frac{30^4}{12} = 67500\ cm^4$$

$$I_2 = \frac{30\cdot 40^3}{12} = 160000\ cm^4 = 2{,}37\, I_1$$

– merevségek:

$$k_1 = \frac{3\cdot I_1}{l_1} = \frac{3\cdot 1}{4} = 0{,}75;\quad k_2 = \frac{4\cdot I_2}{l_2} = \frac{4\cdot 2{,}37}{5} = 1{,}896$$

$(k_k = 0!)$ – nyomatékosztók:

$$\alpha_{1B} = \frac{k_1}{\Sigma k} = \frac{0{,}75}{\underbrace{0{,}75+1{,}896}_{2{,}646}} = 0{,}28$$

$$\alpha_{2B} = \frac{1{,}896}{2{,}646} = 0{,}72$$

$$\Sigma \alpha_B = 1{,}0$$

– kezdeti befogási nyomatékok:

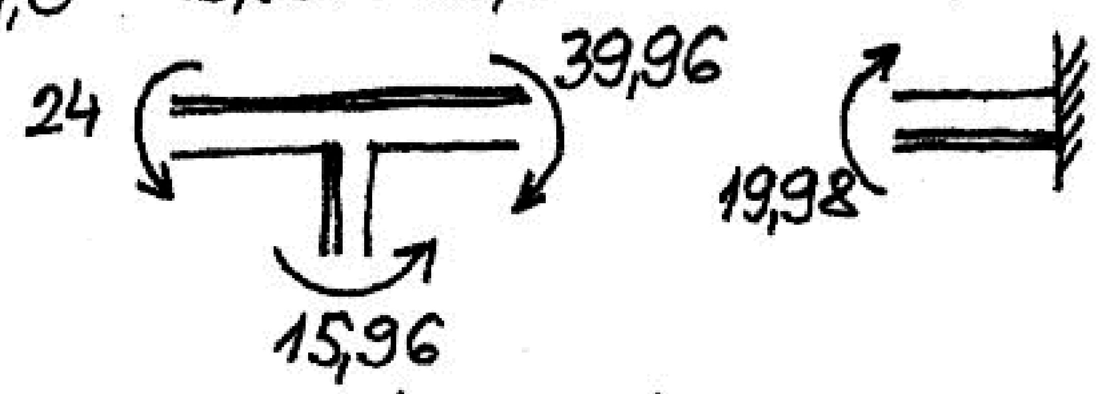
$$M^0_{Bk} = -\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2^2 = -24{,}0\ kNm$$

$$M^0_{B1} = -\frac{48\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4^2}(4+3) = -31{,}5\ kNm$$

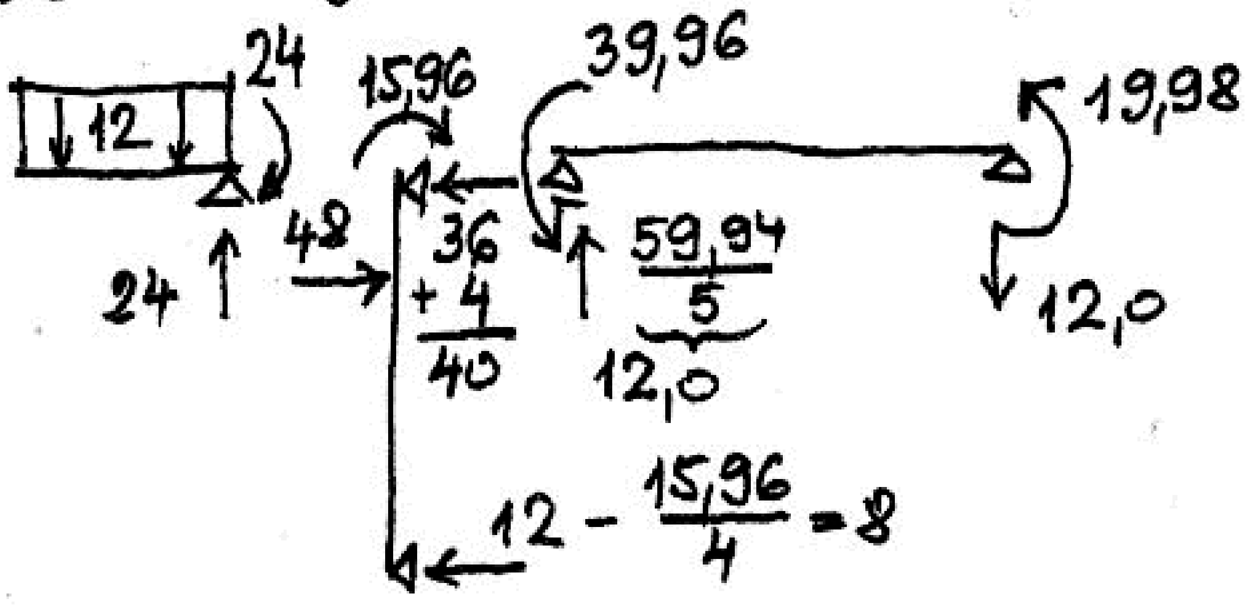
– Nyomatékosztás

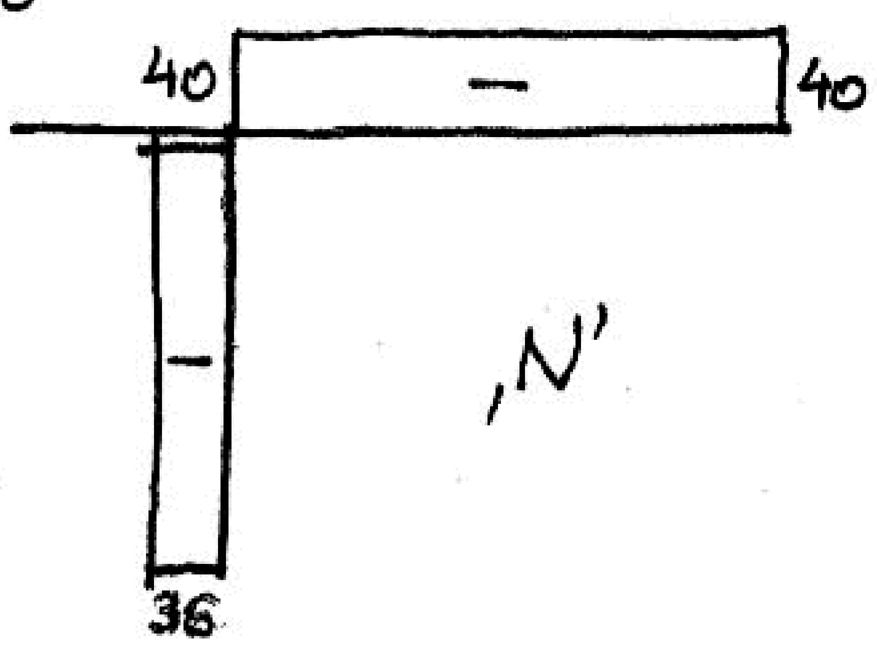
$\Delta M_B = -55{,}5$

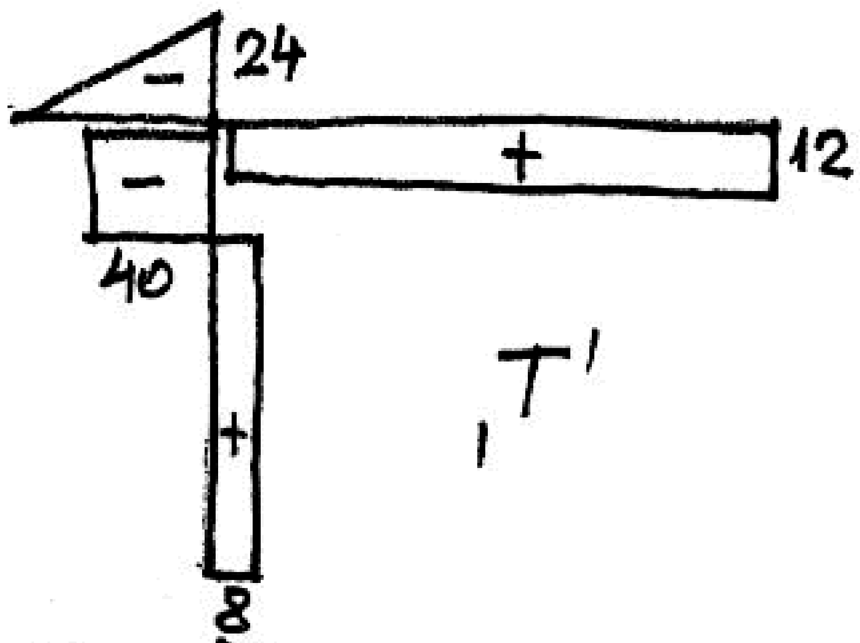
$\boxed{0}$		$\boxed{0{,}72}$	
-24,0	$\boxed{0{,}28}$		
	-31,5		
	+15,54	+ 39,96 $\xrightarrow{\times 0{,}5}$	+ 19,98
-24,0	-15,96	+ 39,96	+ 19,98

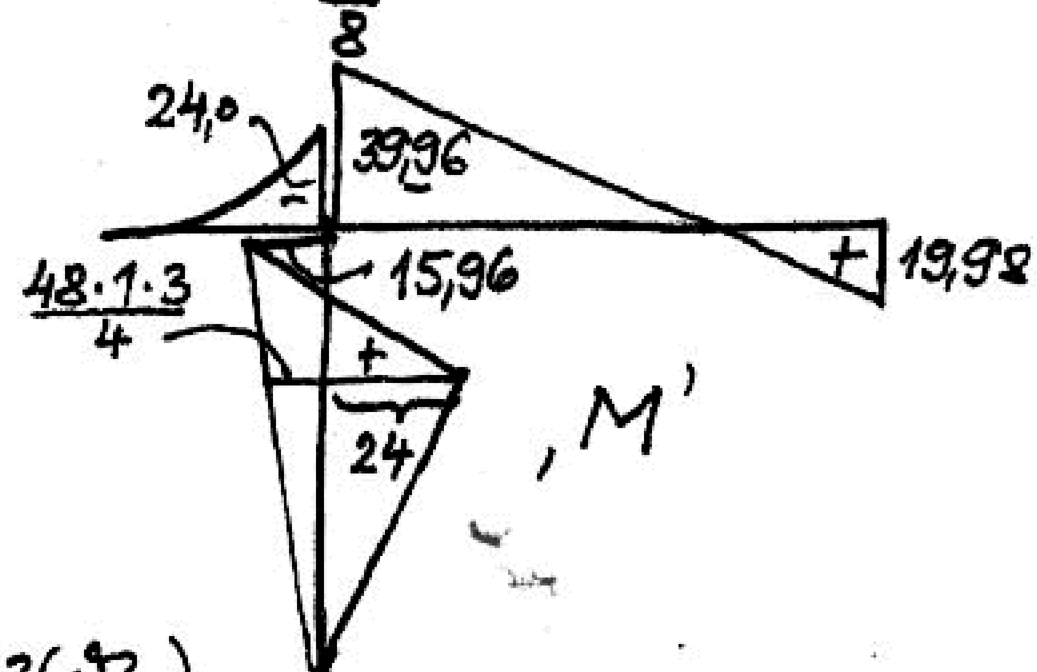


– egyensúlyozás:









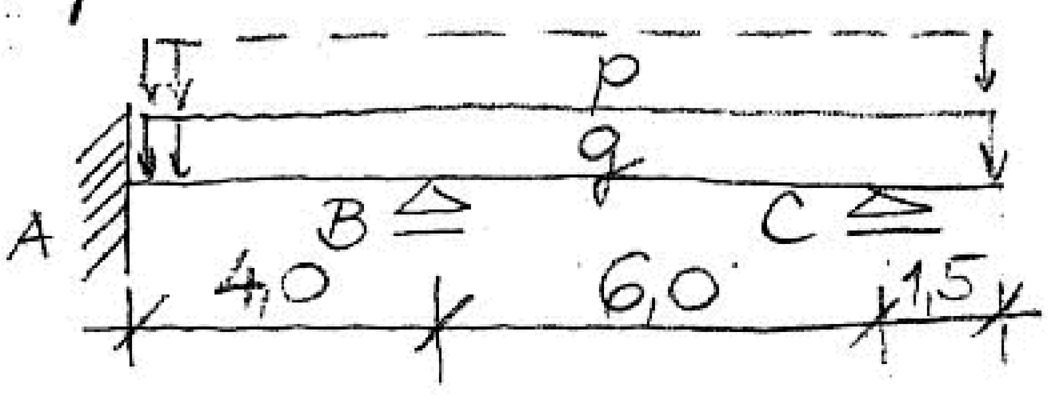
b.) Mennyi 'B' pont szögelfordulása? (ϑ_B)

$$\vartheta_B = \frac{\Sigma\Delta M_B}{\Sigma k} = -\frac{55{,}5\cdot 10^2}{1786{,}05\cdot 10^3} = -3{,}1\cdot 10^{-3}\ rad\ (=0{,}31\%)$$

ahol $\Sigma k = \underset{(I_1)}{2{,}646\cdot 67500}\cdot \underset{[m!]}{10^{-2}} = \underset{[E]}{1786{,}05\cdot 10^3}$

N. II. évf. I. T. gyak. (befejezés otthon!)

2. pl: Határozzuk meg a tartó +Mmax értékeit! (Rajzoljunk szélső M ábrát is!)



I - állandó

$q = 22{,}0\,kN/m$, $p = 16\,kN/m$

merevségek: $k_1 = \frac{4\cdot 1}{4} = 1{,}0$; $k_2 = \frac{3\cdot 1}{6} = 0{,}5$

nyom. osztók: $\alpha_{1B} = \frac{1}{1{,}5} = 2/3$; $\alpha_{2B} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = 1/3$

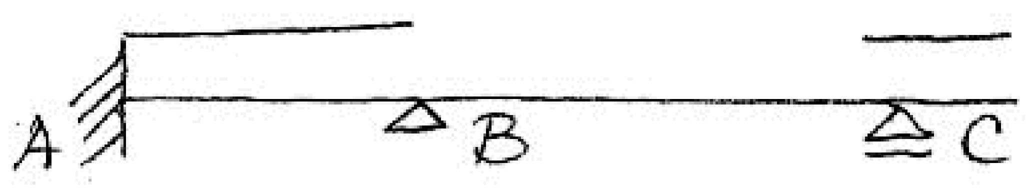
kezdeti bef. nyomatékok:

$M^o_{A1} = -M^o_{B1} = \frac{1}{12}\cdot q_1 \cdot l_1^2 = \frac{16}{12} q_1 = 1{,}33 q_1$

$M^o_{B2} = +\frac{1}{8}\cdot q_2 \cdot l_2^2 = +\frac{36}{8} q_2 = +4{,}5 q_2$

$M^o_{Ck} = +\frac{1}{2} q_k \cdot l_k^2 = +\frac{2{,}25}{2} q_k = +1{,}125 q_k$

1. séma: $+M_{1max}$, M_{Amax} (M_{Cmax})



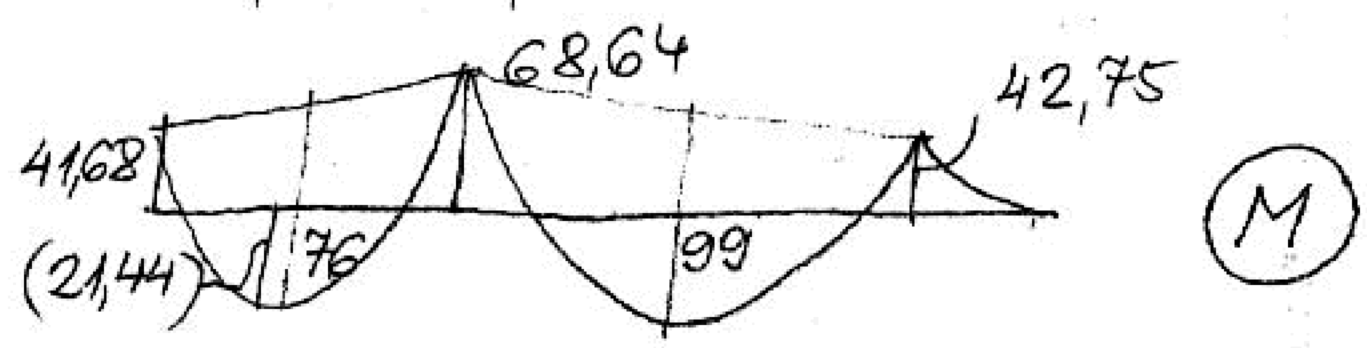
$q_1 = 38{,}0\,kN/m$, $M^o_{A1} = -M^o_{B1} = 1{,}33\cdot 38 = 50{,}67\,kNm$

$q_2 = 22{,}0\,kN/m$, $M^o_{B2} = 4{,}5\cdot 22 = 99{,}0$

$q_k = 38{,}0\,kN/m$, $M^o_{Ck} = 1{,}125\cdot 38 = 42{,}75$

($\Delta M_B = +26{,}95$)

	2/3	1/3	1	0
+50,67	-50,67	+99,0	-42,75	+42,75
		-21,38		
-8,98	-17,97	-8,98		
+41,68	-68,64	+68,64	-42,75	+42,75



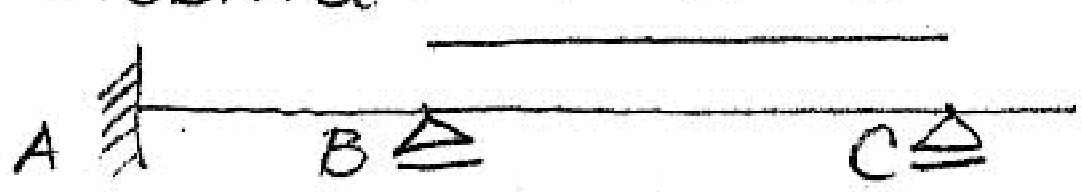
$M_{Amax} = -41{,}68\,kNm$

$A_{max} = 2\cdot 38 - \frac{68{,}64 - 41{,}68}{4} = 69{,}26\,kN$ (6,74)

$+M_{1max} = \frac{69{,}26^2}{2\cdot 38} - 41{,}68 = +21{,}44\,kNm$

($M_{Cmax} = -42{,}75\,kNm$)

2. séma: $+M_{2max}$



$q_1 = 22{,}0\,kN/m \rightarrow M^o_{A1} = 1{,}33\cdot 22 = +29{,}33\,kNm$

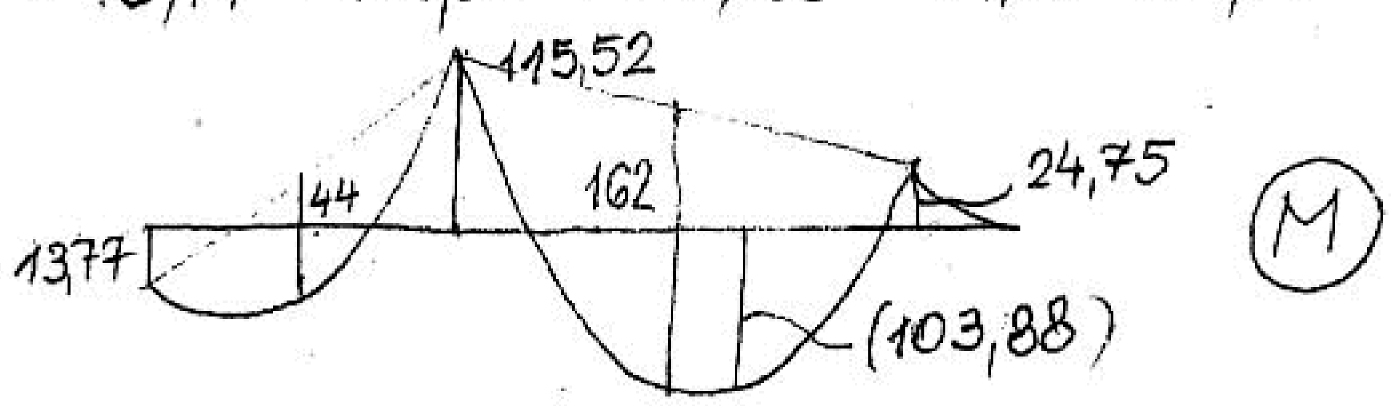
$M^o_{B1} = -29{,}33\,kNm$

$q_2 = 38{,}0\,kNm \rightarrow M^o_{B2} = 4{,}5\cdot 38 = +171{,}0\,kNm$

$q_k = 22{,}0\,kN/m \rightarrow M^o_C = +24{,}75\,kNm$

($\Delta M_B = \pm 129{,}29$)

	2/3	1/3	1	0
+29,33	-29,33	+171,0	-24,75	+24,75
		-12,38		
-43,1	-86,19	-43,1		
-13,77	-115,52	+115,52	-24,75	+24,75



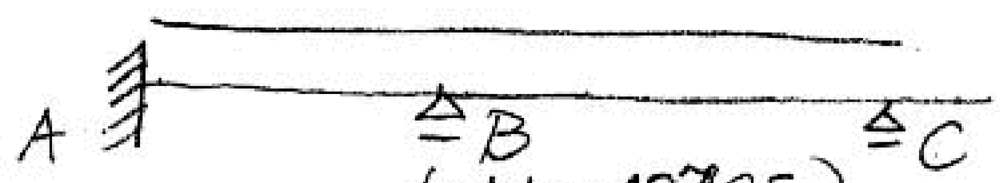
$C' = 3\cdot 38 - \frac{115{,}52 - 24{,}75}{6} = 98{,}87\,kN$ (114; 15,13)

$M_{2max} = \frac{98{,}87^2}{2\cdot 38} - 24{,}75 = 103{,}88\,kNm$

($M_{1max} = 13{,}77 + 4{,}41 = 18{,}18\,kNm$)

N. II. évf. T. 7. gyak.

3. séma: $-M_{B\,max}$



$(\Delta M_B = 107{,}95)$

	2/3	1/3	1	0
+50,67	−50,67	+171,0 −12,38	−24,75	+24,75
−35,98	−71,97	−35,98		
+14,69	−122,64	+122,64	−24,75	+24,75

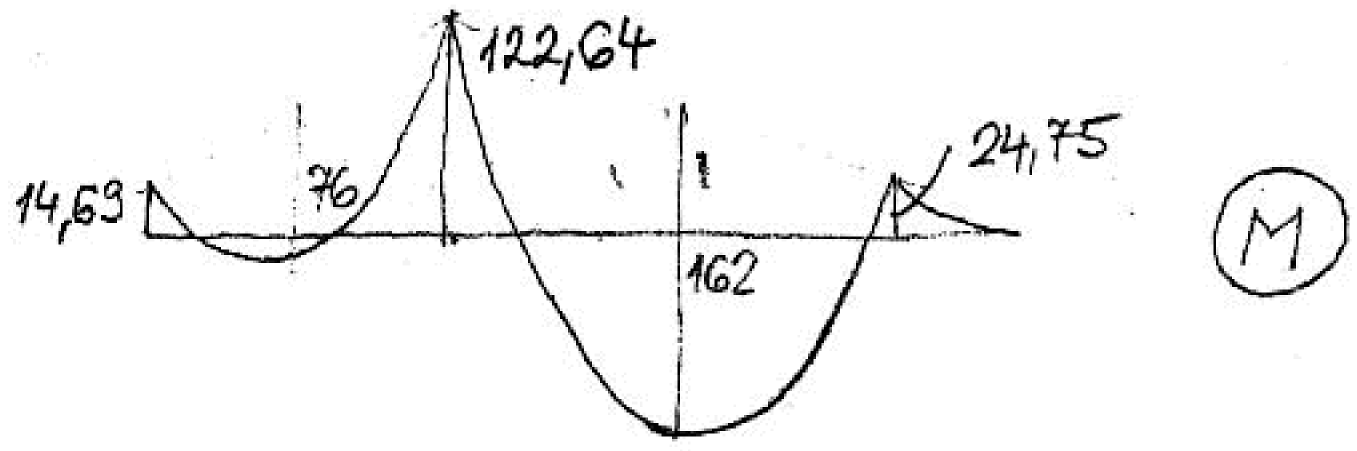
$q_1 = 38{,}0\ kN/m$; $M^0_{A1} = +50{,}67\ kNm$

$M^0_{B1} = -50{,}67\ kNm$

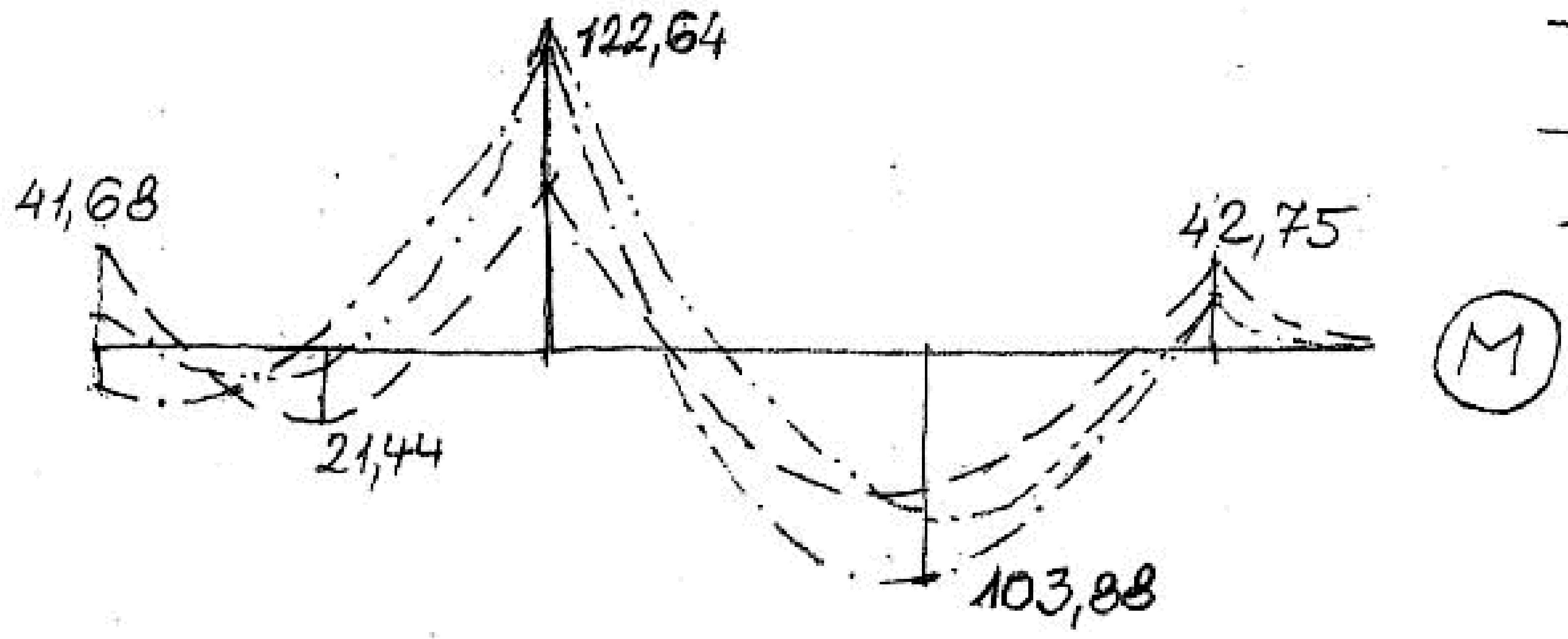
$q_2 = 38{,}0\ kN/m$; $M^0_{B2} = +171{,}0\ kNm$

$q_K = 22{,}0$ –"– $M^0_{CK} = +24{,}75\ kNm$

$-M_{B\,max} = -122{,}64\ kNm$



Szélső M ábra:



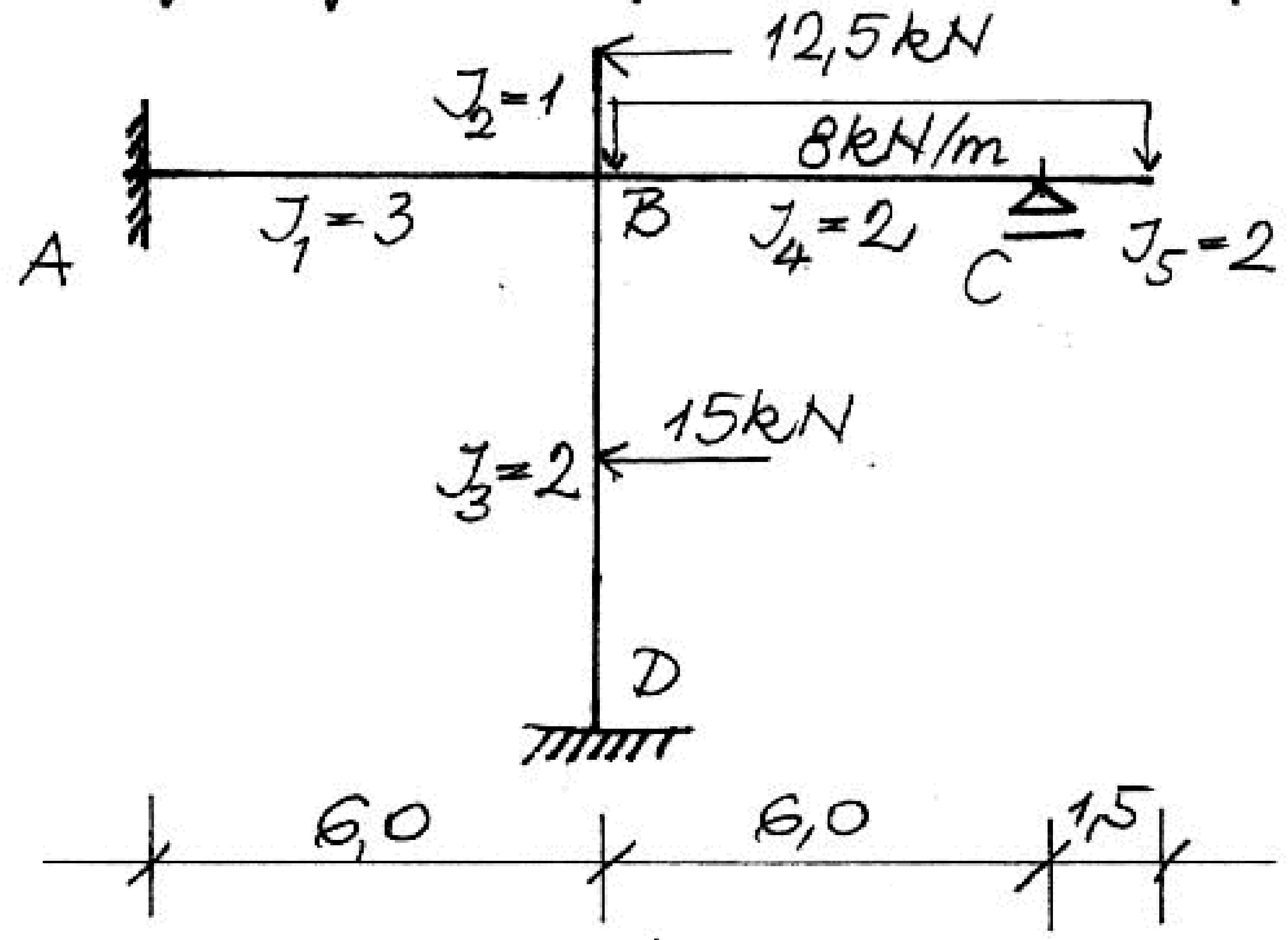
– – – – 1. séma

–·–·–·– 2. séma

–··–··–·· 3. séma

N.II. T.7. gyak.

2.) Rajzolja meg a rúdcsillag M ábráját!



1.) merevségek:

$k_2 = k_5 = 0$ (!)

$k_1 = \frac{4\cdot 3}{6} = 2{,}0$

$k_3 = \frac{4\cdot 2}{8} = 1{,}0$

$k_4 = \frac{3\cdot 2}{6} = 1{,}0$

$\Sigma k_B = 4{,}0$

2.) nyomatékosztók:

$\alpha_{B1} = \frac{2}{4} = 0{,}5$, $\alpha_{B3} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = \alpha_{B4}$

$[\alpha_{C4} = 1{,}0$, $\alpha_{C5} = 0$ (!)$]$

3.) kezdeti befogási nyomatékok:

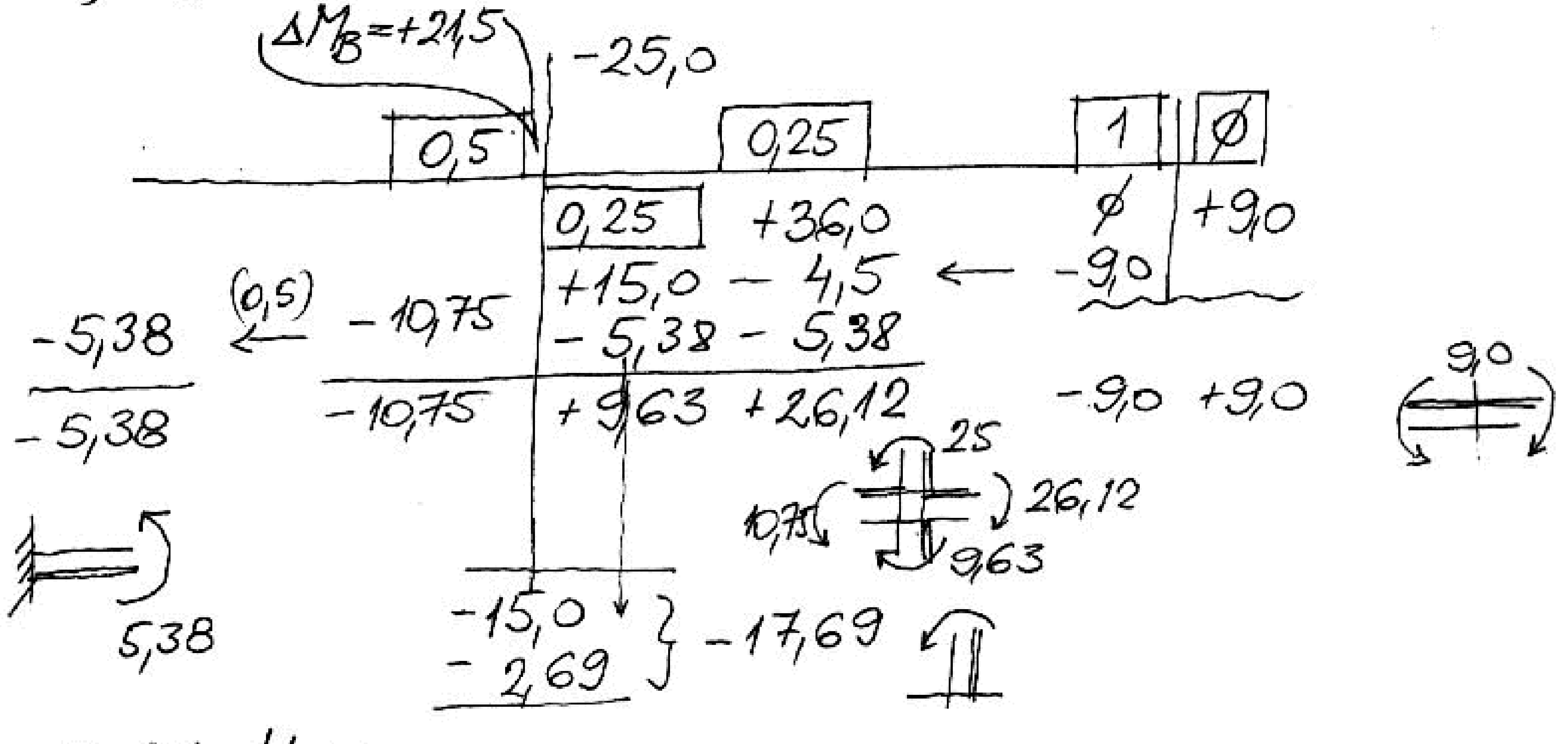
$M^o_{B2} = -12{,}5 \cdot 2 = -25{,}0$ kNm

$M^o_{B3} = +\frac{1}{8} \cdot 15 \cdot 8 = +15{,}0$ kNm $= -M^o_{D3}$

$M^o_{B4} = +\frac{1}{8} \cdot 6^2 \cdot 8 = +36{,}0$ kNm ($M^o_{C4} = \emptyset$!)

$M^o_{C5} = +\frac{1}{2} \cdot 1{,}5^2 \cdot 8 = +9{,}0$ kNm

4.) nyomatékosztás:



5.) M ábra: